УДК 532.5

*В. А. Владимиров, К. И. Ильин*

# О МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Задача о движении твердого тела в неоднородной по плотности (стратифицированной) жидкости принадлежит к числу трудных и интенсивно исследуемых [1]. Почти полное отсутствие точных ее решений привело к интенсивной разработке моделей линейного приближения [2—5].

В настоящей работе также в линейном приближении построены частные решения задачи обтекания для медленных движений трех- или двумерного твердого тела в идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости. Форма тела и направление его движения могут быть произвольными, а зависимость скорости от времени $t$ имеет специальный вид (пропорциональный $\exp(\alpha t)$ с постоянной $\alpha > 0$). Предложен новый метод построения решения. В его основе лежит следующий замечательный факт: рассматриваемая задача прямым преобразованием сводится к классической постановке о потенциальном обтекании некоторого другого фиктивного тела однородной жидкостью. Такая эквивалентность задач позволяет вычислить поля скорости и силы сопротивления движению тела в стратифицированной жидкости. При этом для силы сопротивления получаются простые аналитические формулы.

Подробно рассмотрены предельные решения при $\alpha \to 0$, представляющие интерес с двух точек зрения. Во-первых, они соответствуют практически важному случаю равномерного движения тела, во-вторых, совпадают с решениями задачи о мгновенном приведении в движение первоначально покоящегося тела. Тем самым задача об импульсивном движении тела, рассматривавшаяся ранее в различных частных постановках [3, 5], решена в общем виде. Вычисления показали, что предельные ($\alpha \to 0$) течения обладают характерной слоистой структурой. Вертикальная составляющая скорости в них равна нулю, движение жидкости происходит в горизонтальных слоях ($z = \text{const}$). Во всех случаях сила сопротивления равномерному движению трехмерного тела (за вычетом Архимедовой силы) равна нулю, так что имеет место результат, аналогичный парадоксу Д'Аламбера. Для двумерного тела ответ принципиально другой: сила сопротивления в пределе $\alpha \to 0$ конечна как для горизонтальных, так и для вертикальных движений тела.

Таким образом, в задаче обтекания тела стратифицированной жидкостью получен ряд общих результатов, касающихся режимов движения с малыми числами Фруда. Аналогичная задача о движении тела во вращающейся жидкости решена в [6]. В свете аналогии эффектов стратификации и вращения [7, 8] полученные в данной работе результаты являются развитием подхода [6].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается трехмерное твердое тело, движущееся в безграничной идеальной несжимаемой неоднородной по плотности жидкости. Уравнения движения жидкости берутся в приближении Буссинеска [9]

$$D\mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g},\ D\rho = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\ D \equiv \partial/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla \tag{1.1}$$

($\mathbf{u}$, $\rho$ и $p$ — поля скорости, плотности и давления, $g$ — однородное поле тяжести). В декартовой системе координат $x, y, z$ полагается $\mathbf{u} = (u, v, w)$, $\mathbf{g} = (0,\ 0,\ -g)$, $g > 0$. Жидкость при $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$ покоится и находится в состоянии устойчивого гидростатического равновесия с профилем плотности $\rho_0(z)$:

$$\mathbf{u} \to 0,\ \rho \to \rho_0(z) \text{ при } r \to \infty. \tag{1.2}$$

На границе тела выполняются условия непротекания

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}_*)\nabla f = 0, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u}_*(t)$— скорость движения тела; граница тела $\partial\tau$ в связанной с ним системе координат задается уравнением

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1.4}$$

Изучаются экспоненциальные режимы движения тела

$$\mathbf{u}_*(t) = \varepsilon \mathbf{u}_0 \exp(\alpha t),\ \alpha > 0 \tag{1.5}$$

($\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0, w_0)$, $|\mathbf{u}_0| = 1$, $\alpha$ и $\varepsilon$ — постоянные). Кроме того, полагается, что при $t \to -\infty$ жидкость (как и тело) покоится:

$$\mathbf{u}(r, t) \to 0,\ t \to -\infty. \tag{1.6}$$

Требуется определить движение жидкости и силу, действующую на тело в случае, когда скорость тела $|\mathbf{u}_*|$ мала.

В связанной с телом системе координат уравнения (1.1) принимают вид

$$D\mathbf{u} = -\nabla p - \alpha\mathbf{u}_* + \rho\mathbf{g},\ D\rho = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{1.7}$$

а граничные условия (1.2), (1.3) дают

$$\mathbf{u}\nabla f = 0 \text{ при } f = 0, \tag{1.8}$$

$$\mathbf{u} \to -\mathbf{u}_*(t),\ \rho \to \rho_0(z + h(t)),\ r \to \infty,\ h(t) \equiv w_*(t)/\alpha.$$

**2. Медленные движения.** Следующее основное допущение состоит в том, что движение тела (1.5) настолько медленное, что уравнения движения (1.7) могут быть взяты в линеаризованной форме. Такое приближение соответствует малым числам Фруда ($\mathrm{Fr} \ll 1$) и большим числам Рейнольдса ($\mathrm{Re} \gg 1$). Поскольку эти два условия не противоречат друг другу, рассматриваемые режимы движения могут иметь место в реальных условиях.

Линеаризация уравнений (1.7) дает

$$u_t = -p_x - \alpha u_*,\ v_t = -p_y - \alpha v_*, \tag{2.1}$$

$$w_t = -p_z - \rho g - \alpha w_*,\ \rho_t + \rho_0'(w + w_*) = 0,\ u_x + v_y + w_z = 0,$$

где $u$, $v$, $w$ — компоненты скорости в связанной с телом системе координат; $\mathbf{u}_* \equiv (u_*, v_*, w_*)$; поля возмущений $p$, $\rho$ определены как добавки к основному состоянию $p_0(z + h(t))$, $\rho_0(z + h(t))$; штрих сверху означает производную по переменной $z$. Разумеется, всегда существуют столь большие значения $t$, что для закона движения (1.5) линеаризация становится некорректной. Поэтому полученные результаты будут иметь физический смысл только при временах, меньших некоторого значения $t_0$.

Стратификация принимается линейной $\rho_0' = \mathrm{const}$. При этом коэффициенты в уравнениях (2.1) становятся постоянными, зависимость от времени остается только в их правых частях. Решение задачи (1.6), (1.8), (2.1) ищется в виде

$$(\mathbf{u}, p, \rho) = \varepsilon(\mathbf{u}_1, \alpha p_1, \rho_1) \exp(\alpha t) \tag{2.2}$$

с функциями $\mathbf{u}_1$, $p_1$ и $\rho_1$, зависящими только от $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$. Подстановка (2.2) в (2.1) и исключение $\rho$ дают

$$u_1 + u_0 = -p_{1x},\ v_1 + v_0 = -p_{1y}, \tag{2.3}$$

$$(1 + N^2/\alpha^2)(w_1 + w_0) = -p_{1z},\ u_{1x} + v_{1y} + w_{1z} = 0$$

$(N^2 \equiv -g\rho_0')$. Граничные условия для (2.3) следуют из (1.8):

$$\mathbf{u}_1 \to -\mathbf{u}_0 \text{ при } r \to \infty,\ \mathbf{u}_1\nabla f = 0 \text{ при } f = 0. \tag{2.4}$$

После подходящего растяжения переменных в (2.3) можно увидеть, что давление будет играть роль потенциала скорости $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0$. Вводя обозначения $\alpha \equiv kN$, $\varphi \equiv -p_1$, $\varkappa^2 \equiv (1 + k^2)/k^2$, из (2.3) получаем

$$\varkappa^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \varphi_{zz} = 0. \tag{2.5}$$

Граничное условие (2.4) принимает вид

$$\nabla\varphi \to 0 \text{ при } r \to \infty, \tag{2.6}$$

$$\varkappa^2(\varphi_x f_x + \varphi_y f_y) + \varphi_z f_z = \varkappa^2\mathbf{u}_0\nabla f \text{ при } f = 0.$$

С помощью замены независимых переменных

$$\xi = x/\varkappa,\ \eta = y/\varkappa,\ \boldsymbol{\xi} \equiv (\xi, \eta, z) \tag{2.7}$$

задача (2.5), (2.6) сводится к следующей:

$$\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta} + \varphi_{zz} = 0,\ \nabla_{\xi}\varphi \to 0 \text{ при } |\boldsymbol{\xi}| \to \infty, \tag{2.8}$$

$$\nabla_{\xi}\varphi\nabla_{\xi}f = \mathbf{U}\nabla_{\xi}f \text{ при } f = 0,$$

$$\nabla_{\xi} = (\partial/\partial\xi, \partial/\partial\eta, \partial/\partial z),\ \mathbf{U} = (\varkappa u_0, \varkappa v_0, \varkappa^2 w_0).$$

Замечательный факт состоит в совпадении (2.8) с задачей о движении твердого тела в однородной жидкости с потенциальным режимом обтекания. Функция $\varphi$ при этом играет роль потенциала скорости, $\mathbf{U}$ — скорости движения тела, а роль новой границы тела (1.4) — поверхность $\partial\sigma$, задающаяся уравнением

$$f(\varkappa\xi, \varkappa\eta, z) = 0. \tag{2.9}$$

Таким образом, растяжением переменных (2.7) задача о движении тела в стратифицированной жидкости свелась к фиктивному движению тела в однородной жидкости.

**3. Сила сопротивления.** Обычное представление решения (2.8) имеет вид [7]

$$\varphi = \Phi_i(\xi)U_i \tag{3.1}$$

(по повторяющимся векторным и тензорным индексам производится суммирование). Из (2.2), (3.1) и $\varphi \equiv -p_1$ вычисляется сила сопротивления

$$F_i = -\oint\limits_{\partial\tau} p\, dS_i, \quad F_i^* \equiv (F_1, F_2, F_3/\varkappa) = -\varepsilon k\varkappa N e^{kNt} M_{in} U_n, \tag{3.2}$$

где $M_{in}$ — тензор присоединенной массы в задаче (2.8), который, как известно, является симметричным:

$$M_{in} = M_{ni} = -\oint\limits_{\partial\sigma} \Phi_n\, dS_i. \tag{3.3}$$

Интегрирование в (3.3) ведется по поверхности (2.9). Множители, содержащие $\varkappa$ в (3.2), получаются при переходе от интегрирования по $\partial\tau$ к интегрированию по $\partial\sigma$. В случае трехосного эллипсоида с полуосями $a$, $b$, $c$ уравнение (2.9) запишем как

$$\varkappa^2\xi^2/a^2 + \varkappa^2\eta^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0.$$

Тензор $M_{in}$ диагональный с компонентами, приведенными, например, в [10]. Из (3.2) вытекает

$$F_1 = -\varepsilon k^{-1}(1 + k^2) N e^{kNt} M_{11} u_0, \tag{3.4}$$
$$F_2 = -\varepsilon k^{-1}(1 + k^2) N e^{kNt} M_{22} v_0, \quad F_3 = -\varepsilon k^{-3}(1 + k^2)^2 N e^{kNt} M_{33} w_0.$$

Следует отметить, что, хотя вычисление силы сопротивления свелось к вычислению фиктивного тензора присоединенной массы (3.3), работа приложенной к телу силы (3.2), (3.4) идет на увеличение как кинетической, так и потенциальной энергии жидкости. Появление в выражении (3.2) тензора $M_{in}$ отражает только то, что для выбранного закона движения (1.5) обе формы энергии описываются с помощью этого тензора. Интеграл энергии для уравнений (2.1), записанный в исходной системе координат (жидкость на бесконечности покоится), имеет вид

$$2E = \int \left(u^2 + v^2 + w^2 + \left(N^2/\rho_0'^2\right)\rho^2\right) dx\, dy\, dz.$$

Из закона движения (2.2) вытекает $\alpha\rho = -\rho_0' w$, поэтому $2E = \int (u^2 + v^2 + \varkappa^2 w^2)\, dx\, dy\, dz$. Переходя здесь к обозначениям задачи (2.8), можно получить

$$2E = \varepsilon^2 e^{2\alpha t} M_{in} U_i U_n. \tag{3.5}$$

Таким образом, кинетическая и потенциальная энергии записываются в виде фиктивной кинетической энергии.

Все предыдущее рассмотрение переносится на случай движения двумерного тела. Для силы сопротивления (на единицу длины вдоль оси $y$) вместо (3.2) находим

$$F_1 = -\varepsilon N k e^{kNt} M_{1n} U_n, \quad F_3 = -\varepsilon N \sqrt{1 + k^2} e^{kNt} M_{3n} U_n. \tag{3.6}$$

Если тело — эллиптический цилиндр с полуосями $a$ и $c$, то (3.6) принимает вид

$$(F_1, F_3) = -\pi\varepsilon N\sqrt{1+k^2}e^{kNt}(c^2u_0, a^2w_0). \tag{3.7}$$

**4. Структура течения при равномерном движении тела.** Большой интерес представляет движение тела с постоянной скоростью, которому в (1.5) и последующих соотношениях соответствует переход к пределу $\alpha \to 0$, $k \to 0$.

Характерные для этого режима поля скорости можно получить, переходя к пределу $k \to 0$ в решениях задачи (2.8). Это нетрудно сделать, когда известен явный вид решения для конечных $k$ (как, например, для эллипсоида или эллиптического цилиндра). В общем случае перейти к пределу $k \to 0$ в решениях задачи (2.8) удается только для вертикальных движений трех- или двумерного тела. Это возможно благодаря тому, что при малых $k$ деформированная поверхность (2.9) для трехмерного тела представляет собой вертикальную «иглу» с поперечным размером порядка $k$, а для плоского тела — вертикальную пластину с толщиной порядка $k$. Это позволяет для малых $k$ решить задачу (2.8) в рамках хорошо разработанного приближения тонкого тела и в полученном решении перейти к пределу $k \to 0$.

Рассмотрим движение трехмерного тела в вертикальном направлении. Пусть для простоты поверхность тела обладает осевой симметрией и описывается уравнением $r = f(z)$, $|z| < a$ $(r \equiv \sqrt{x^2 + y^2})$. Пусть также $\Phi = \varphi - Wz$, $W = \varkappa^2 w_0$, $\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Тогда для потенциала скорости $\Phi$ получается известная [11] задача об обтекании тонкого осесимметричного тела $\zeta = \varkappa^{-1}f(z)$ $(|z| < a)$ однородным потоком со скоростью на бесконечности $\mathbf{U} = (0, 0, -W)$. С использованием приближения тонкого тела [11] для радиальной $\sigma$ и осевой $w$ компонент скорости получаются выражения

$$\sigma = -\frac{w_0}{2\varkappa}\int_{-a}^{a} f(z')f'(z')\zeta[(z-z')^2 + \zeta^2]^{-3/2}dz',$$

$$w = -w_0 - \frac{w_0}{2\varkappa^2}\int_{-a}^{a} f(z')f'(z')(z-z')[(z-z')^2+\zeta^2]^{-3/2}dz'.$$

Обратное преобразование к исходным переменным и переход к пределу $k \to 0$ дают искомое поле скорости

$$w = -w_0, \quad \sigma = \begin{cases} -w_0 f(z)f'(z)r^{-1}, & |z| < a, \\ 0, & |z| > a. \end{cases}$$

В системе отсчета, связанной с покоящейся на бесконечности жидкостью, вертикальная компонента скорости равна нулю. Движение жидкости происходит таким образом, что жидкость как бы «раздвигается» перед телом, растекаясь в горизонтальных плоскостях, и «смыкается» за ним.

Аналогичная структура течения имеет место и для плоской задачи. Здесь также можно использовать приближение тонкого тела. При движении по вертикали симметричного тела $x = \pm f(z)(|z| < a)$ получается поле скорости

$$w = -w_0, \quad u = \begin{cases} -w_0 \operatorname{sign}(x) f'(z), & |z| < a, \\ 0, & |z| > a. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что в плоском случае предельные решения не затухают на бесконечности. В то же время в решениях с конечными $\alpha$ возмущения на бесконечности отсутствуют. Это означает, что в пределе $\alpha \to 0$ нарушаются условия (2.4), (2.6).

При рассмотрении горизонтальных движений в общем виде перейти к пределу $k \to 0$ не удается. Можно, однако, сделать предельный переход в уравнениях движения и затем решать полученные предельные уравнения. Совпадение же решений предельных уравнений с пределами решений задачи (2.8) можно показать на конкретных примерах (например, для эллипсоида или эллиптического цилиндра). Рассмотрим трехмерную задачу. Полагая $k = 0$ в (2.5), (2.6), находим

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \ \nabla\varphi \to 0 \text{ при } |\mathbf{r}| \to \infty,$$
$$\varphi_x f_x + \varphi_y f_y = \mathbf{u}_0 \nabla f \text{ при } f = 0. \tag{4.1}$$

Задача разбивается на совокупность плоских задач в горизонтальных плоскостях ($z = \text{const}$). Учитывая, что $w_1 + w_0 = -\varkappa^{-2}\varphi_z$, из (4.1) можно заключить, что при движении трехмерного тела по горизонтали вертикальная составляющая скорости равна нулю, движение жидкости происходит только в плоскостях $z = \text{const}$, причем в каждой из них есть режим плоского потенциального обтекания. Этот же результат упоминался ранее в [12].

В случае горизонтального движения плоского тела удобно перейти к пределу $k \to 0$ в задаче (2.8). В этом пределе деформированная поверхность (2.9) представляет собой вертикальную пластину, т. е. (2.8) является задачей о потенциальном движении пластины. Поскольку решение ее известно, то, чтобы получить искомое поле скорости, достаточно сделать обратное преобразование переменных. В системе отсчета, связанной с телом, оно имеет вид

$$w = 0, \ u = \begin{cases} 0, & |z| < a, \\ -u_0 \dfrac{|z|}{\sqrt{z^2 - a^2}}, & |z| > a \end{cases}$$

для любого тела, поверхность которого можно задать уравнением $f(x, z) = 0$, $|z| < a$. Следует отметить, что это поле скорости определяется только вертикальным размером тела и не зависит от его формы. Видно также, что в пределе $k \to 0$ нарушаются условия на бесконечности, как и при вертикальном движении плоского тела.

Таким образом, у предельных течений характерная слоистая структура. Вертикальная составляющая скорости в них равна нулю, движение происходит только в горизонтальных плоскостях.

**5. Сила сопротивления при равномерном движении тела.** Для вычисления предельного ($k \to 0$) значения силы сопротивления (3.2) необходимо знать поведение тензора $M_{in}$ вблизи точки $k = 0$. Для трехосного эллипсоида из выражений, приведенных в [10], можно получить $M_{11} \sim k^2$, $M_{22} \sim k^2$, $M_{33} \sim k^4 \ln k$, из чего для компонент силы (3.4) вытекает $F_1 \sim k$, $F_2 \sim k$, $F_3 \sim k \ln k$. Значит, в пределе $k \to 0$ сила сопротивления движению эллипсоида в любом направлении равна нулю.

Для плоской задачи результат принципиально другой: сила сопротивления при $k \to 0$ стремится к конечному пределу. Так, для эллиптического цилиндра сила (3.7) дает предел

$$(F_1, F_3) = -\pi\varepsilon N(c^2 u_0, a^2 w_0). \tag{5.1}$$

Полученное качественное различие в силе сопротивления при равномерном движении трех- и двумерного тел становится понятным, если рассмотреть энергетические соотношения. Мощность совершаемой телом работы $\partial E/\partial t = -F_n u_{*n}(t)$. Согласно (3.5), это выражение можно переписать в виде $2\alpha E = -F_n u_{*n}$. Отсюда следует, что сила сопротивления равна нулю, если при $\alpha \to 0$ энергия $E(\alpha)$ растет медленнее, чем $\alpha^{-1}$, что и имеет место в трехмерном случае. При движении же плоского тела $E(\alpha) \sim \alpha^{-1}$ при $\alpha \ll 1$, что соответствует конечным значениям силы сопротивления.

Таким образом, при равномерном движении трехмерного тела в произвольном направлении сила сопротивления отсутствует, т. е. получается результат, аналогичный парадоксу Д'Аламбера. При равномерном движении плоского тела сила сопротивления конечна.

**6. Связь с задачей об импульсивном движении тела.** Выражение (5.1) для горизонтальной составляющей силы $F_1$ совпадает со значением, полученным в [3] с помощью предельного перехода $t \to \infty$ в задаче о мгновенном приведении в движение первоначально покоящегося тела. Это совпадение пределов не является случайным. Покажем, что оно всегда наблюдается как для силы, так и для поля скорости.

Задача об импульсивном движении тела ставится так. Решаются уравнения

$$u_t = -p_x,\ v_t = -p_y,\ w_t = -p_z - \rho g,$$
$$\rho_t + \rho_0'(w + w_0) = 0,\ u_x + v_y + w_z = 0 \tag{6.1}$$

с граничными условиями

$$\mathbf{u} \to -\mathbf{u}_0 \text{ при } |\mathbf{r}| \to \infty,\ \mathbf{u}\nabla f = 0 \text{ при } f = 0. \tag{6.2}$$

Так как тело разгоняется мгновенно, то в начальный момент ($t = 0$) движение должно быть потенциальным и удовлетворять граничным условиям (6.2), т. е. $\mathbf{u}(t = 0) = \nabla\varphi_0$. Потенциал скорости $\varphi_0$ удобно взять в форме $\varphi_0 = -\mathbf{u}_0\mathbf{r} + \chi$. Применяя к (6.1) преобразование Лапласа по времени, получим

$$s\bar{u} + u_0 = \bar{\Phi}_x,\ s\bar{v} + v_0 = -\bar{\Phi}_y,$$
$$s\bar{w} + w_0 = q^{-2}\bar{\Phi}_z,\ \bar{u}_x + \bar{v}_y + \bar{w}_z = 0. \tag{6.3}$$

Здесь $\bar{f}(s) = \int\limits_0^\infty \exp(-st) f(t)\,dt$; $\bar{\Phi} = -\bar{p} + \chi$; $q^2 = 1 + N^2/s^2$; $N$ — частота плавучести; черта сверху обозначает изображение соответствующей функции. Граничные условия следующие: $\bar{\mathbf{u}}\nabla f = 0$ при $f = 0$, $s\bar{\mathbf{u}} \to -\mathbf{u}_0$ при $|\mathbf{r}| \to \infty$. В терминах функции $\bar{\Phi}$ задача принимает вид

$$\bar{\Phi}_{xx} + \bar{\Phi}_{yy} + q^{-2}\bar{\Phi}_{zz} = 0,$$
$$\bar{\Phi}_x f_x + \bar{\Phi}_y f_y + q^{-2}\bar{\Phi}_z f_z = \mathbf{u}_0 \nabla f \text{ при } f = 0,\ \nabla\bar{\Phi} \to 0 \text{ при } |\mathbf{r}| \to \infty. \tag{6.4}$$

Решая задачу (6.4), находим функцию $\bar{\Phi}$. Затем уравнения (6.3) дают $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.

Для приведения в соответствие задач (2.5), (2.6) и (6.4) удобно рассмотреть случай действительных $s$. Перейдем к пределу $s \to 0$ в (6.3). В силу известного [13] свойства преобразования Лапласа

$$\lim_{s\to 0} s\bar{f}(s) = \lim_{t\to\infty} f(t),\ |\arg s| < \pi/2 - \delta$$

получим

$$u_0 + \lim_{t\to\infty} u = \lim_{s\to 0} \bar{\Phi}_x,$$
$$v_0 + \lim_{t\to\infty} v = \lim_{s\to 0} \bar{\Phi}_y,\ w_0 + \lim_{t\to\infty} w = \lim_{s\to 0} q^{-2}\bar{\Phi}_z. \tag{6.5}$$

Функция $\bar{\Phi}$ в (6.5) является решением задачи (6.4), которая формально совпадает с задачей (2.5), (2.6), сформулированной ранее при изучении экспоненциальных движений. С учетом соотношений (2.3) и (6.5) это означает, что поле скорости в задаче об импульсивном движении тела в пределе $t \to \infty$ совпадает с полем скорости, получающимся при решении (2.5), (2.6) в пределе $\alpha \to 0$, отвечающем равномерному движению тела.

Асимптотическое при $t \to \infty$ выражение для силы сопротивления вычисляется аналогично:

$$F_i = -\lim_{t\to\infty} \int\limits_{\partial\tau} p\,dS_i = \lim_{s\to 0} s \int\limits_{\partial\tau} \bar{\Phi}\,dS_i. \tag{6.6}$$

Нетрудно увидеть, что (6.6) с точностью до обозначений совпадает с соответствующим выражением (3.2), взятым в пределе $\alpha \to 0$. Тем самым показано, что рассмотренные в работе предельные ($\alpha \to 0$) решения совпадают с решениями задачи об импульсивном движении тела в стратифицированной жидкости, взятыми в пределе $t \to \infty$.

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Построенные решения характеризуются параметрами $\varepsilon$ и $k$. Если, следуя [6], просуммировать различные комбинации $\varepsilon$ и $k$, то это позволит решить задачу для законов движения тела $\mathbf{u}_*(t)$, заданных в виде интегральных представлений

$$\mathbf{u}_*(t) = \mathbf{u}_0 \int_0^{k_0} \varepsilon(k) \exp(kNt)\, dk, \quad 0 < k_0 \leqslant \infty,$$

где $\varepsilon(k)$ — произвольная функция, обеспечивающая сходимость и малость интеграла. При этом формулы для силы сопротивления получаются интегрированием по $k$ соотношений (3.2).

2. Полностью аналогично случаю экспоненциальных движений тела (1.5) можно рассмотреть колебательные движения $\mathbf{u}_*(t) = \varepsilon \mathbf{u}_0 \cos(\alpha t)$ с частотой $\alpha$, большей частоты плавучести $N$.

3. Предложенный в работе подход применим также при движении тела в прямолинейных каналах, как горизонтальных, так и вертикальных.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Стратифицированные** течения: Библиогр. указ. отеч. и иностр. лит-ры за 1972—1976 гг.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1978.— Вып. 2.
2. **Аксенов А. В., Городцов В. А., Стурова И. В.** Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью.— М., 1986.— (Препр./АН СССР, Ин-т проблем механики; № 282).
3. **Krishna D. V.** Unsteady stratified flow past a cylinder // Zastosow. mat.— 1968.— V. 9, N 4.
4. **Warren F. W. G.** Wave resistance to vertical motion in a stratified fluid // J. Fluid Mech.— 1960.— V. 7, N 2.
5. **Bretherton F. P.** The time-dependent motion due to a cylinder moving in an unbounded rotating or stratified fluid // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 28, N 3.
6. **Никольский А. А.** Симметричные движения идеальной жидкости из состояния ее вращения как твердого тела // ДАН СССР.— 1961.— Т. 137, вып. 3.
7. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.
8. **Владимиров В. А.** О сходстве эффектов плотностной стратификации и вращения // ПМТФ.— 1985.— № 3.
9. **Филлипс О. М.** Динамика верхнего слоя океана.— М.: Мир, 1969.
10. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика.— М.: Физматгиз, 1963.— Ч. 1.
11. **Yih C.-H.** Fluid mechanics.— N. Y.: McGraw-Hill, 1969.
12. **Drazin P. G.** On the steady flow of fluid of variable density past an obstacle // Tellus.— 1961.— V. 13, N 2.
13. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1965.



*г. Новосибирск* — *Поступила 3/VII 1989 г., в окончательном варианте — 15/XI 1989 г.*


---


УДК 532.526



*М. Б. Зельман, Б. В. Смородский*


# О ВЛИЯНИИ ПЕРЕГИБА В ПРОФИЛЕ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ НА РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Характер ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП) в сдвиговых течениях существенно зависит от распределения завихренности среднего движения. Появление экстремумов в таких распределениях (точек перегиба в профиле скорости), согласно линейной теории устойчивости, ведет к уширению спектра и росту инкрементов не-