

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ РЕГУЛЯРНОГО ПУЧКА ПРИ ЭМИССИИ
С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ
СЛУЧАЕ

В. А. Сыровой

(Москва)

Приведено аналитическое решение уравнений регулярного пучка (§ 1) при эмиссии с произвольной поверхности в нестационарном случае в ρ - и T -режимах и при ненулевой начальной скорости (§§ 2—4). Предполагается, что эмиттер является координатной поверхностью $x^1 = 0$ в ортогональной системе x^i ($i = 1, 2, 3$), а плотность тока J , электрическое поле ϵ на нем и внешнее магнитное поле \mathbf{H} суть заданные функции $J(t, x^2, x^3)$, $\epsilon(t, x^2, x^3)$, $\mathbf{H}(x^1, x^2, x^3)$. Решение представляется в виде рядов по $(x^1)^k$ с коэффициентами, зависящими от t, x^2, x^3 , определяемыми из рекуррентных соотношений ($\kappa = 1/3, 1/2, 1$ в зависимости от условий эмиссии). В § 5 рассматривается теория плоского, цилиндрического и сферического диодов для случая, когда высокочастотная составляющая плотности тока J не мала по сравнению с его постоянной компонентой.

§ 1. Основные уравнения. Регулярный моноэнергетический нерелятивистский пучок заряженных частиц с одним и тем же значением и знаком удельного заряда η в нестационарном случае описывается системой дифференциальных уравнений, которая в тензорной форме в произвольной криволинейной системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{2} g^{kl} v_k v_l - \Phi \right) &= 0, & H^i &= \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ikl} \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ik} \rho v_k) &= 0, & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}) &= \rho \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения (1.1) записаны в безразмерных переменных, принятых в [1], с сохранением смысла основных символов этой работы.

В дальнейшем будем считать, что эмиттер совпадает с координатной поверхностью $x^1 = 0$ в ортогональной системе x^i ($i = 1, 2, 3$) и не деформируется со временем. Таким образом, метрика в x^i не зависит от t .

Покажем, что из условий регулярности течения вытекает требование постоянства внешнего магнитного поля. Интегрируя первое из уравнений (1.1) при $i = 1$, получаем:

$$2\Phi = 2 \int \frac{\partial v_1}{\partial t} dx^1 + V^2 \quad (1.2)$$

При $i = 2$ имеем

$$2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^2} (V^2) \quad (1.3)$$

Комбинируя (1.2) и (1.3) и используя условия регулярности, приходим к выражению

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^1} \right) dx^1 = \int \sqrt{g} \frac{\partial H^3}{\partial t} dx^1 = 0$$

Отсюда $\partial H^3 / \partial t = 0$ и, совершенно аналогично, $\partial H^1 / \partial t = \partial H^2 / \partial t = 0$. Таким образом, регулярный пучок не может быть реализован в меняющемся со временем внешнем магнитном поле.

§ 2. Эмиссия в ρ -режиме определяется следующими условиями на эмиттере: при $x^1 = 0$

$$\begin{aligned} V = 0, \quad \varphi = 0, \quad \partial \varphi / \partial x^1 = 0, \quad \rho v_{x^1} = J(t, x^2, x^3) \quad (2.1) \\ H_{x^1} = 0, \quad H_{x^2} = m(x^2, x^3), \quad H_{x^3} = n(x^2, x^3), \quad m^2 + n^2 = h^2 \end{aligned}$$

Будем искать решение задачи (1.1), (2.1) в виде

$$\begin{aligned} v_1 = \sum_{k=2}^{\infty} U_k (x^1)^{1/3 k}, \quad v_2 = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} V_k (x^1)^{1/3 k}, \quad v_3 = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} W_k (x^1)^{1/3 k} \\ 2\varphi = \sum_{k=4}^{\infty} \varphi_k (x^1)^{1/3 k}, \quad 2\sqrt{g} \rho = \sum_{k=-2}^{\infty} \rho_k (x^1)^{1/3 k} \quad (2.2) \end{aligned}$$

Индексы k под знаками сумм имеют обычный (не тензорный) смысл порядкового номера членов ряда и степеней.

Подставляя выражения для v_i и φ в первое уравнение (1.1) при $i = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_s = \frac{6}{s} (U_{s-3})_0' + \sum_{k=2} \left[\left(U_k^2 + 2 \sum_{l=2}^{k-1} U_l U_{2k-l} \right) A_{1/3(s-2k)} + \right. \\ \left. + \left(2 \sum_{l=2}^k U_l U_{2k-l+1} \right) A_{1/3(s-2k-1)} \right] + \sum_{k=0} \left[\left(V_k^2 + 2 \sum_{l=0}^{k-1} V_l V_{2k-l} \right) B_{1/3(s-2k-6)} + \right. \\ \left. + \left(2 \sum_{l=0}^k V_l V_{2k-l+1} \right) B_{1/3(s-2k-7)} \right] + \left(W_k^2 + 2 \sum_{l=0}^{k-1} W_l W_{2k-l} \right) C_{1/3(s-2k-6)} + \\ + \left(2 \sum_{l=0}^k W_l W_{2k-l+1} \right) C_{1/3(s-2k-7)} \quad (s = 4, 5, \dots) \quad (2.3) \end{aligned}$$

Здесь $(U_s)_0' = \partial U_s / \partial t$. Напомним, что $U_1 = V_1 = W_1 = 0$ по определению, а A_k, B_k, C_k — коэффициенты разложений элементов метрического тензора g^{ik} по $(x^1)^k$; таким образом, для фиксированного s имеют смысл лишь те k , которые дают целочисленные индексы. Так как $\partial H / \partial t = 0$, то два других уравнения ($i = 2, 3$) удовлетворяются тождественно.

Связь между V_k, W_k и U_k определяется теми же формулами, что и в стационарном случае [1]. Не нарушается также зависимость ρ_k от φ_s , но теперь под φ_s понимается выражение (2.3). Используя уравнение сохранения тока, получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов разложений (2.2)

$$\begin{aligned} (\rho_{p-3})_0' + \frac{p}{3} \sum_{t=0}^p \rho_{t-2} \sum_{l=0}^p A_l U_{p-t-3l+2} + \\ + \sum_{t=0}^{p-4} \left[\left(\rho_{t-2} \sum_{l=0}^p B_l V_{p-t-3l-4} \right)_2 + \left(\rho_{t-2} \sum_{l=0}^p C_l W_{p-t-3l-4} \right)_3 \right] = 0 \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (2.4) \end{aligned}$$

Выпишем несколько первых членов разложения потенциала и v_1

$$2\varphi = \left(\frac{9}{2} J \right)^{1/3} s^{4/3} - \frac{3}{5} \left(\frac{9}{2} J \right)^{1/3} \frac{J_0'}{J} s^{5/3} + \left(\frac{2}{5} \frac{J_0''}{J} - \frac{3}{8} \frac{J_0'^2}{J^2} + \frac{1}{10} h^2 \right) s^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{9}{2} J\right)^{2/3} \left(\frac{1}{3} \frac{a_1}{a_0^{1/2}} + \frac{8}{15} T - \frac{1}{21} \frac{J_0'''}{J^2} + \frac{6}{35} \frac{J_0' J_0''}{J^3} - \frac{1}{8} \frac{J_0'^3}{J^4} - \frac{1}{210} \frac{J_0' h^2}{J}\right) s^{2/3} + \\
& + \left(\frac{9}{2} J\right)^{1/3} \left[-\left(\frac{1}{4} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{23}{70} T\right) \frac{J_0'}{J} + \frac{3}{140} \frac{J_0^{IV}}{J^2} - \frac{1}{8} \frac{J_0' J_0'''}{J^3} - \frac{9}{100} \frac{J_0''^2}{J^3} + \right. \\
& + \frac{9}{20} \frac{J_0'^2 J_0''}{J^4} - \frac{33}{128} \frac{J_0'^4}{J^5} + \left(\frac{3}{350} \frac{J_0''}{J^2} - \frac{1}{80} \frac{J_0'^2}{J^3}\right) h^2 + \frac{9}{1400} \frac{h^4}{J} + \\
& + \left. \frac{1}{35} \left(n \frac{J_{P'}}{J} - m \frac{J_{Q'}}{J}\right) - \frac{1}{14} (nk_2 - m\delta_2) + \frac{1}{14} (n_{P'} - m_{Q'})\right] s^{1/3} + \\
& + \left[\frac{a_1}{a_0^{3/2}} \left(\frac{1}{5} \frac{J_0''}{J} - \frac{3}{16} \frac{J_0'^2}{J^2} + \frac{1}{20} h^2\right) + T \left(\frac{153}{700} \frac{J_0''}{J} - \frac{57}{280} \frac{J_0'^2}{J^2} + \frac{27}{700} h^2\right) + \right. \\
& + \frac{1}{28} (\kappa_1 n^2 + \kappa_2 m^2) + \frac{1}{56} (h^2)_S' + \frac{3}{55} \left(-n \frac{J_{0P}''}{J} + m \frac{J_{0Q}''}{J} + n \frac{J_0' J_{P'}}{J^2} - m \frac{J_0' J_{Q'}}{J^2}\right) + \\
& + \frac{13}{280} (-n_{P'} + m_{Q'}) \frac{J_0'}{J} + \frac{3}{28} (nk_1 - m\delta_1) \frac{J_0'}{J} + \frac{13}{280} (nk_2 - m\delta_2) \frac{J_0'}{J} + \frac{441}{19600} \frac{J_0'^2}{J^2} h^4 + \\
& + \left(-\frac{1}{120} \frac{J_0'''}{J^2} + \frac{22}{525} \frac{J_0' J_0''}{J^2} - \frac{13}{280} \frac{J_0'^3}{J^4}\right) h^2 - \frac{1}{120} \frac{J_0^V}{J^2} + \frac{1}{14} \frac{J_0' J_0^{IV}}{J^3} + \\
& + \left.\frac{2}{15} \frac{J_0'' J_0'''}{J^3} - \frac{3}{8} \frac{J_0'^2 J_0'''}{J^4} - \frac{27}{50} \frac{J_0' J_0''^2}{J^4} + \frac{27}{20} \frac{J_0'^3 J_0''}{J^5} - \frac{81}{128} \frac{J_0'^5}{J^6}\right] s^3 + \dots \\
& a_0^{-1/2} v_1 = \left(\frac{9}{2} J\right)^{1/3} s^{2/3} - \frac{1}{2} \frac{J_0'}{J} s + \left(\frac{2}{9J}\right)^{1/3} \left(\frac{9}{20} \frac{J_0''}{J} - \frac{9}{16} \frac{J_0'^2}{J^2} - \frac{9}{20} h^2\right) s^{1/3} + \\
& + \left(\frac{9}{2} J\right)^{1/3} \left(\frac{2}{3} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{4}{15} T - \frac{1}{15} \frac{J_0'''}{J^2} + \frac{3}{10} \frac{J_0'^2}{J^3} - \frac{1}{4} \frac{J_0'^3}{J^4} - \frac{1}{15} \frac{J_0' h^2}{J}\right) s^{2/3} + \\
& + \left[-\left(\frac{3}{8} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{9}{140} T\right) \frac{J_0'}{J} - \frac{27}{1400} \frac{h^4}{J} + \frac{3}{14} \left(n \frac{J_{P'}}{J} - m \frac{J_{Q'}}{J}\right) - \right. \\
& - \frac{1}{28} (nk_2 - m\delta_2) + \frac{1}{28} (n_{P'} - m_{Q'}) + \frac{1}{28} \frac{J_0^{IV}}{J^2} - \frac{1}{4} \frac{J_0' J_0'''}{J^3} - \frac{9}{50} \frac{J_0''^2}{J^3} + \\
& + \left.\frac{81}{80} \frac{J_0'^2 J_0''}{J^4} - \frac{81}{128} \frac{J_0'^4}{J^5} + \left(\frac{13}{175} \frac{J_0''}{J^2} - \frac{11}{80} \frac{J_0'^2}{J^3}\right) h^2\right] s^2 + \left(\frac{2}{9J}\right)^{1/3} \left\{\frac{a_1}{a_0^{3/2}} \left(\frac{3}{8} \frac{J_0''}{J} - \right. \right. \\
& - \frac{15}{32} \frac{J_0'^2}{J^2} - \frac{3}{8} h^2) + T \left(\frac{3}{280} \frac{J_0''}{J} - \frac{3}{560} \frac{J_0'^2}{J^2} + \frac{39}{280} h^2\right) - \\
& - \frac{27}{56} \left[\kappa_1 n^2 + \kappa_2 m^2 + \frac{1}{2} (h^2)_S'\right] - \frac{39}{112} \left(n \frac{J_{0P}''}{J} - m \frac{J_{0Q}''}{J}\right) + \\
& + \frac{51}{112} \left(n \frac{J_0' J_{P'}}{J^2} - m \frac{J_0' J_{Q'}}{J^2}\right) + \frac{3}{560} (-n_{P'} + m_{Q'}) \frac{J_0'}{J} + \frac{3}{56} (nk_1 - m\delta_1) \frac{J_0'}{J} + \\
& + \frac{3}{560} (nk_2 - m\delta_2) \frac{J_0'}{J} - \frac{39}{1120} \frac{J_0'}{J^2} h^4 + \left(-\frac{33}{560} \frac{J_0'''}{J^2} + \frac{51}{140} \frac{J_0' J_0''}{J^3} - \frac{9}{56} \frac{J_0'^3}{J^4}\right) h^2 - \\
& - \frac{3}{560} \frac{J_0^V}{J^2} + \frac{9}{56} \frac{J_0' J_0^{IV}}{J^3} + \frac{3}{10} \frac{J_0'' J_0'''}{J^3} - \frac{15}{16} \frac{J_0'^2 J_0'''}{J^4} - \frac{27}{20} \frac{J_0' J_0''^2}{J^4} + \\
& + \left.\frac{117}{32} \frac{J_0'^3 J_0''}{J^5} - \frac{117}{64} \frac{J_0'^5}{J^6}\right\} s^{1/2} + \dots \quad (s = a_0^{1/2} x^1). \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Здесь a_k — коэффициенты разложения g_{11} по $(x^1)^k$; S, P, Q — длины дуг криволинейных осей x^1, x^2, x^3 ; κ_1 и κ_2 — главные кривизны эмиттирующей поверхности, $T = \kappa_1 + \kappa_2$ — ее полная кривизна; k_1 и k_2, δ_1 и δ_2 — главные кривизны поверхностей $x^2 = \text{const}, x^3 = \text{const}$, вычисленные при $x^1 = 0$.

Видно, что при $\partial / \partial t \neq 0$ в разложении потенциала появляется отличный от нуля коэффициент при $s^{3/2}$; в четвертом члене возникает слагаемое, учитывающее нестационарность процесса и пропорциональное квадрату напряженности магнитного поля; коэффициент при $s^{3/2}$ описывает взаимное влияние геометрии эмиттера (через T) и непостоянства плотности тока эмиссии; наконец, в последнем члене в (2.5) отражены эффекты взаимодействия магнитного поля и его неоднородности с неоднородностью J , зависимостью J от t и геометрическими факторами (через nk_1, nk_2 и т. д.).

§ 3. Эмиссия в T -режиме отличается от эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, ненулевым электрическим полем на эмиттере $x^1 = 0$, являющимся функцией от времени

$$\begin{aligned} V = 0, \quad \varphi = 0, \quad \sqrt{g^{11}} \partial \varphi / \partial x^1 = \varepsilon(t, x^2, x^3), \quad \rho v_{x^1} = J(t, x^2, x^3) \\ H_{x^1} = 0, \quad H_{x^2} = m(x^2, x^3), \quad H_{x^3} = n(x^2, x^3) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Как и в стационарном случае, будем строить разложения, удовлетворяющие (1.1), (3.1) по полумцелым степеням x^1

$$\begin{aligned} v_1 = \sum_{k=1}^{\infty} U_k (x^1)^{1/2k}, \quad v_2 = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} V_k (x^1)^{1/2k}, \quad v_3 = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} W_k (x^1)^{1/2k} \\ 2\varphi = \sum_{k=2}^{\infty} \Phi_k (x^1)^{1/2k}, \quad 2\sqrt{g} \rho = \sum_{k=-1}^{\infty} \rho_k (x^1)^{1/2k} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнения движения регулярного пучка приводят к следующему выражению для Φ_s

$$\begin{aligned} \Phi_s = \frac{4}{s} (U_{s-2})_0' + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(U_k^2 + 2 \sum_{l=1}^{k-1} U_l U_{2k-l} \right) A_{1/2(s-k)} + \right. \\ \left. + \left(2 \sum_{l=1}^k U_l U_{2k-l+1} \right) A_{1/2(s-1)-k} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(V_k^2 + 2 \sum_{l=0}^{k-1} V_l V_{2k-l} \right) B_{1/2(s-4)-k} + \right. \\ \left. + \left(2 \sum_{l=0}^k V_l V_{2k-l+1} \right) B_{1/2(s-5)-k} + \left(W_k^2 + 2 \sum_{l=0}^{k-1} W_l W_{2k-l} \right) C_{1/2(s-4)-k} + \right. \\ \left. + \left(2 \sum_{l=0}^k W_l W_{2k-l+1} \right) C_{1/2(s-5)-k} \right] \quad (s = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Формулы для V_k, W_k и ρ_k приведены в [1]. Рекуррентные соотношения для определения коэффициентов разложений (3.2) имеют вид

$$\begin{aligned} (\rho_{p-2})_0' + \sum_{t=1}^p \left\{ \frac{p}{2} \rho_{t-2} \sum_{l=1}^p U_l A_{1/2(p-t-l)+1} + \right. \\ \left. + \left[\rho_{t-2} \sum_{l=0}^p V_l B_{1/2(p-t-l)-1} \right]_2 + \left[\rho_{t-2} \sum_{l=0}^p W_l C_{1/2(p-t-l)-1} \right]_3 \right\} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для потенциала φ и v_1 получаем

$$\begin{aligned} \llbracket 2\varphi = 2\varepsilon s + \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{J}{\sqrt{\varepsilon}} s^{3/2} + \left[\left(\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} + T \right) \varepsilon - \frac{1}{3} \frac{J^2}{\varepsilon^2} - \frac{J_0'}{\varepsilon} + \frac{2}{3} \frac{J\varepsilon_0'}{\varepsilon^2} \right] s^2 + \\ + \frac{4\sqrt{2}}{15} \left[\left(\frac{15}{8} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{11}{4} T \right) \frac{J}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{5}{12} \frac{J^3}{\varepsilon^3} + \frac{1}{4} \frac{Jh^2}{\varepsilon} + \frac{J_0''}{\varepsilon} - \frac{3}{4} \frac{J\varepsilon_0''}{\varepsilon^2} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{J_0' \epsilon_0'}{\epsilon^2} + \frac{7}{4} \frac{JJ_0'}{\epsilon^2} - \frac{5}{3} \frac{J^2 \epsilon_0'}{\epsilon^3} + \frac{5}{3} \frac{J \epsilon_0'^2}{\epsilon^3} \Big] s^{1/2} + \left\{ \left(\frac{1}{3} \frac{a_2}{a_0^2} - \frac{1}{12} \frac{a_1^2}{a_0^3} \right) \epsilon + \right. \\
& + \frac{a_1}{a_0^{3/2}} \left(-\frac{1}{6} \frac{J^2}{\epsilon^2} + \frac{1}{2} cT - \frac{1}{2} \frac{J_0'}{\epsilon} + \frac{1}{3} \frac{J \epsilon_0'}{\epsilon^2} \right) + \frac{1}{3} cT^2 + \frac{1}{3} cT S' + \\
& + T \left(-\frac{1}{5} \frac{J^2}{\epsilon^2} - \frac{5}{9} \frac{J_0'}{\epsilon} + \frac{16}{45} \frac{J \epsilon_0'}{\epsilon^2} \right) + \frac{1}{9\epsilon} \left[(-nk_2 + m\delta_2)J + (Jn)_{P'} - \right. \\
& \left. - (Jm)_{Q'} + (-n\epsilon_{P'} + m\epsilon_{Q'}) \frac{J}{\epsilon} \right] + \frac{1}{3} [(3k_1 + k_2)\epsilon_{P'} + (3\delta_1 + \delta_2)\epsilon_{Q'} - \\
& - 2(k_1^2 + \delta_1^2)\epsilon - (k_1 k_2 + \delta_1 \delta_2)\epsilon - \epsilon_{P''} - \epsilon_{Q''} + (k_{1P'} + \delta_{1Q'})\epsilon] - \\
& - \frac{8}{81} \frac{J^4}{\epsilon^5} - \frac{4}{45} \frac{J^2 h^2}{\epsilon^3} - \frac{1}{9} \frac{J_0'''}{\epsilon^2} - \frac{16}{45} \frac{JJ_0''}{\epsilon^3} + \frac{1}{3} \frac{J_0'' \epsilon_0'}{\epsilon^3} - \frac{1}{3} \frac{J_0'^2}{\epsilon^3} - \frac{5}{9} \frac{J^2 J_0'}{\epsilon^4} - \\
& - \frac{1}{9} \frac{J_0' h^2}{\epsilon^2} + \frac{4}{45} \frac{J \epsilon_0'''}{\epsilon^3} - \frac{2}{3} \frac{J \epsilon_0' \epsilon_0''}{\epsilon^4} + \frac{1}{3} \frac{J_0' \epsilon_0''}{\epsilon^3} + \frac{1}{3} \frac{J^2 \epsilon_0''}{\epsilon^4} + \frac{64}{81} \frac{J \epsilon_0'^3}{\epsilon^3} - \\
& - \frac{8}{9} \frac{J_0' \epsilon_0'^2}{\epsilon^4} - \frac{32}{27} \frac{J^2 \epsilon_0'^2}{\epsilon^5} + \frac{14}{9} \frac{JJ_0' \epsilon_0'}{\epsilon^4} + \frac{16}{27} \frac{J^3 \epsilon_0'}{\epsilon^5} + \frac{2}{15} \frac{J \epsilon_0' h^2}{\epsilon^3} \Big\} s^3 + \dots \\
a_0^{-1/2} v_1 = & \sqrt{2\epsilon} s^{1/2} + \frac{2}{3\epsilon} \left(J - \frac{1}{2} \epsilon_0' \right) s + \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \left[\left(\frac{5}{4} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{1}{2} T \right) \epsilon - \frac{7}{18} \frac{J^2}{\epsilon^2} - \right. \\
& - \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\epsilon_0''}{\epsilon} - \frac{2}{9} \frac{\epsilon_0'^2}{\epsilon^2} + \frac{8}{9} \frac{J \epsilon_0'}{\epsilon^2} - \frac{5}{6} \frac{J_0'}{\epsilon} \Big] s^{3/2} + \left[\left(\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{1}{5} T \right) \frac{J}{\epsilon} + \right. \\
& + \frac{5}{27} \frac{J^3}{\epsilon^4} + \frac{1}{5} \frac{J h^2}{\epsilon^2} + \left(-\frac{1}{4} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{1}{30} T \right) \frac{\epsilon_0'}{\epsilon} + \frac{3}{10} \frac{J_0''}{\epsilon^2} - \frac{5}{6} \frac{J_0' \epsilon_0'}{\epsilon^3} + \\
& + \frac{2}{3} \frac{JJ_0'}{\epsilon^3} - \frac{1}{30} \frac{\epsilon_0'''}{\epsilon^2} + \frac{1}{6} \frac{\epsilon_0' \epsilon_0''}{\epsilon^3} - \frac{1}{3} \frac{J \epsilon_0''}{\epsilon^3} - \frac{4}{27} \frac{\epsilon_0'^3}{\epsilon^4} + \frac{8}{9} \frac{J \epsilon_0'^2}{\epsilon^4} - \frac{7}{9} \frac{J^2 \epsilon_0'}{\epsilon^4} + \\
& \left. + \frac{2}{15} \frac{h^2 \epsilon_0'}{\epsilon^2} + \frac{1}{3} \left(n \frac{\epsilon_{P'}}{\epsilon} - m \frac{\epsilon_{Q'}}{\epsilon} \right) - \frac{1}{2} (nk_1 - m\delta_1) \right] s^2 + \dots \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Сравнение выражений для потенциала в (2.5) и (3.5) показывает, что во время как при эмиссии в ρ -режиме и $\partial / \partial t \neq 0$ действие магнитного поля по-прежнему преобладает над геометрическими эффектами ($J_0' h^2$ входит в коэффициент при $s^{1/2}$, а $J_0' T$ — при $s^{3/2}$), при эмиссии, ограниченной температурой, члены $J_0' T$, $\epsilon_0' T$ и $J_0' h^2$, $\epsilon_0' h^2$ появляются одновременно (при s^3). Вместе с тем при эмиссии в ρ -режиме ранее возникают члены, учитывающие перекрестное действие магнитного поля, нестационарности, геометрии и неоднородности плотности тока эмиссии ($nJ_0' k_1$, $nJ_{0P''}$ и т. д. при s^3).

§ 4. Случай ненулевой скорости эмиссии определяется следующими условиями при $x^1 = 0$:

$$\begin{aligned}
v_{x^1} = u(t), \quad \varphi = 0, \quad \sqrt{g^{11}} \partial \varphi / \partial x^1 = \epsilon(t, x^2, x^3), \quad \rho v_{x^1} = J(t, x^2, x^3) \\
H_{x^1} = 0, \quad H_{x^2} = m(x^2, x^3), \quad H_{x^3} = n(x^2, x^3) \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Решение задачи (1.1), (4.1) ищем в виде

$$\begin{aligned}
v_1 = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x^1)^k, \quad v_2 = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x^1)^k, \quad v_3 = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} W_k(x^1)^k \\
2\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(x^1)^k, \quad 2\sqrt{g} \rho = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k(x^1)^k \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Для коэффициентов разложения потенциала получаем

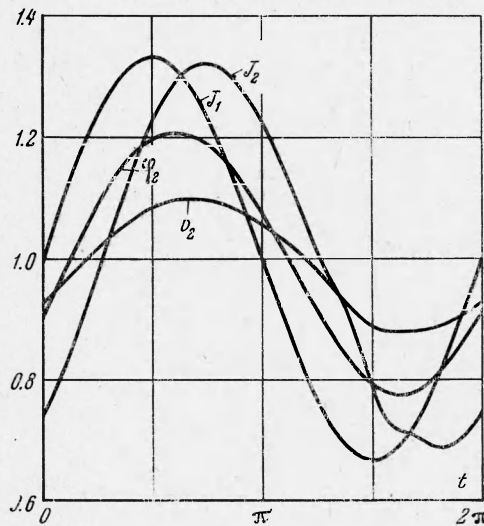
$$\begin{aligned} \varphi_s = & \frac{2}{s} (U_{s-1})'_0 + \sum_{k=0}^s \left[(U_k^2 + 2 \sum_{l=1}^k U_{l-1} U_{2k-l+1}) A_{s-2k} + \right. \\ & + \left(2 \sum_{l=0}^k U_l U_{2k-l+1} \right) A_{s-2k-1} + (V_k^2 + 2 \sum_{l=1}^k V_{l-1} V_{2k-l+1}) B_{s-2k-2} + \\ & + \left(2 \sum_{l=0}^k V_l V_{2k-l+1} \right) B_{s-2k-3} + (W_k^2 + 2 \sum_{l=1}^k W_{l-1} W_{2k-l+1}) C_{s-2k-2} + \\ & \left. + \left(2 \sum_{l=0}^k W_l W_{2k-l+1} \right) C_{s-2k-3} \right] \quad (s=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Формулы для V_k , W_k и ρ_k в [1] сохраняют свой смысл. Рекуррентные соотношения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} (\rho_{p-1})'_0 + p \sum_{t=0}^{p-1} \rho_t \sum_{l=0}^{p-t} A_l U_{p-t-l} + \\ + \sum_{t=0}^{p-2} \left[\left(\rho_t \sum_{l=0}^{p-t-2} B_l V_{p-t-l-2} \right)'_2 + \right. \\ \left. + \left(\rho_t \sum_{l=0}^{p-t-2} C_l W_{p-t-l-2} \right)'_3 \right] = 0 \end{aligned} \quad (p=1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

Для потенциала φ имеем

$$\begin{aligned} 2\varphi = u^2 + 2\varepsilon s + \\ + \left(\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} \varepsilon + \varepsilon T + \frac{J}{u} \right) s^2 + \dots \end{aligned}$$



Фиг. 1

Добавки к φ_3 и φ_4 , обязанные своим существованием отличным от нуля производным по времени от u , J , ε , задаются формулами

$$\Delta_3 = \left(\frac{2}{3} \frac{Ju'}{u^3} - \frac{1}{3} \frac{J'_0}{u^2} \right) a_0^{3/2}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 = \left[\frac{a_1}{a_0^{3/2}} \left(\frac{1}{2} \frac{Ju'}{u^3} - \frac{1}{4} \frac{J'_0}{u^2} \right) - \frac{1}{4} \frac{Ju''}{u^4} + \frac{Ju'^2}{u^5} - \frac{1}{2} \frac{J'_0 u'}{u^4} + \frac{1}{4} \frac{Ju'}{u^3} T - \right. \\ \left. - \frac{J\varepsilon u'}{u^5} + \frac{1}{6} \frac{J\varepsilon'_0}{u^4} + \frac{1}{2} \frac{J''_0}{u^3} - \frac{1}{4} \frac{J'_0}{u} T + \frac{1}{4} \frac{J'_0 \varepsilon}{u^4} \right] a_0^2 \end{aligned}$$

Интересно сравнить результаты, доставляемые построением разложений, с точными аналитическими решениями уравнений пучка. Число последних, к сожалению, крайне невелико, причем в стационарном случае [2,3] переменные в них разделяются. Поэтому для решения Мельцера [2], например, вопрос сводится к разложению в ряд Тэйлора функции $F = (\sin^3/2\psi)^{1/3}$. При $\psi < 1/3\pi$, где F монотонно возрастает, высокой точности

можно достигнуть сравнительно небольшим числом членов. При $\psi \geq \geq \frac{1}{3}\pi$ это не так. Для построения решения в этой области целесообразно, начиная с некоторого $\psi_0 < \frac{1}{3}\pi$, перейти к разложению по целым степеням x^1 , сопрягая его с решением, описывающим эмиссию в ρ -режиме в области $0 \leq \psi \leq \psi_0$.

В [4] было приведено аналитическое решение, содержащее произвольную функцию от времени $f(t)$ и определяющее некие нестационарные процессы в плоском диоде. Если в качестве характерных величин выбрать параметры, задающие закон $3/2$ Чайлда-Лэнгмюра, то для безразмерного потенциала получаем

$$\varphi = (x + f)^{1/3} - 2f'' x - f'^3 \quad (4.5)$$

Нетрудно убедиться, что радиус сходимости ряда для φ равен f , в то время как решение необходимо построить в области $0 \leq x \leq 1$. Для $f = 2 + \sin t$, задаваясь при $x = 1$ ошибкой порядка 0.1%, обнаруживаем, что требуемая точность достигается при $t = 0$ — пятью, при $t = \frac{1}{2}\pi$ — четырьмя и при $t = \frac{3}{2}\pi$ — девятью членами ряда.

§ 5. Теория плоского, цилиндрического и сферического диодов. Рассмотрение этих наиболее простых конфигураций представляет особый интерес, так как при однородных условиях на эмиттере все эквипотенциальные поверхности $\varphi = \text{const}$ не будут деформироваться со временем. Имея в виду исследовать некоторые высокочастотные процессы в этих устройствах при эмиссии в ρ -режиме и при отсутствии внешнего магнитного поля, выпишем еще несколько членов разложения φ и v_1 . Приводимые формулы относятся к случаю $\mathbf{H} = 0$ и $J = J(t)$ и не связаны с какими-либо другими дополнительными предположениями.

$$\begin{aligned} \Phi_{10} = & \left(\frac{2}{9J}\right)^{1/3} \left[\frac{a_1}{a_0^{3/2}} \left(-\frac{1}{8} \frac{J_0'''}{J} + \frac{9}{20} \frac{J_0' J_0''}{J^2} - \frac{21}{64} \frac{J_0'^3}{J^3} + \frac{7}{5} J T \right) - \right. \\ & - \frac{3}{16} \frac{a_1^2}{a_0^3} J_0' + \frac{a_2}{a_0^2} J + T \left(-\frac{4}{35} \frac{J_0'''}{J} + \frac{163}{400} \frac{J_0' J_0''}{J^2} - \frac{1653}{5600} \frac{J_0'^3}{J^3} \right) + \\ & + \frac{157}{200} J T^2 + \frac{7}{8} J T S' - \frac{15}{8} J (k_1^2 + \delta_1^2) - \frac{7}{8} J (k_1 k_2 + \delta_1 \delta_2) + \frac{7}{8} J (k_1 \rho' + \delta_1 \rho') + \\ & + \frac{1}{350} \frac{J_0^{\text{VI}}}{J^2} - \frac{27}{800} \frac{J_0' J_0^{\text{V}}}{J^3} - \frac{27}{350} \frac{J_0'' J_0^{\text{IV}}}{J^3} + \frac{27}{112} \frac{J_0'^2 J_0^{\text{IV}}}{J^4} - \frac{1}{20} \frac{J_0''^2}{J^3} + \\ & + \frac{9}{10} \frac{J_0' J_0'' J_0'''}{J^4} - \frac{39}{32} \frac{J_0'^3 J_0'''}{J^5} + \frac{27}{125} \frac{J_0''^3}{J^4} - \frac{1053}{400} \frac{J_0'^2 J_0''^2}{J^5} + \\ & \left. + \frac{351}{80} \frac{J_0'^4 J_0''}{J^6} - \frac{2223}{1280} \frac{J_0'^6}{J^7} \right] a_0^{5/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} = & \left\{ \left(\frac{9}{2} J\right)^{1/3} \left[\frac{a_1}{a_0^{3/2}} \left(-\frac{23}{105} \frac{J_0'}{J} T_1 + \frac{1}{70} \frac{J_0^{\text{IV}}}{J^2} - \frac{1}{12} \frac{J_0' J_0''}{J^3} - \frac{3}{50} \frac{J_0''^2}{J^3} + \right. \right. \\ & + \frac{3}{10} \frac{J_0'^2 J_0''}{J^4} - \frac{11}{64} \frac{J_0'^4}{J^5} \left. \right) + \frac{1}{48} \frac{a_1^2}{a_0^3} \frac{J_0'}{J} - \frac{1}{6} \frac{a_2}{a_0^2} \frac{J_0'}{J} + T \left(\frac{23}{2100} \frac{J_0^{\text{IV}}}{J^2} - \right. \\ & - \frac{1459}{23100} \frac{J_0' J_0'''}{J^3} - \frac{873}{19250} \frac{J_0''^2}{J^3} + \frac{41611}{184800} \frac{J_0'^2 J_0''}{J^4} - \frac{41}{320} \frac{J_0'^4}{J^5} \left. \right) + \\ & + \frac{J_0'}{J} \left(-\frac{967}{9240} T^2 - \frac{57}{440} T S' + \frac{37}{120} [k_1^2 + \delta_1^2] + \frac{57}{440} [k_1 k_2 + \delta_1 \delta_2] - \right. \\ & \left. - \frac{57}{440} [k_1 \rho' + \delta_1 \rho'] \right) \left. \right\} + \left(\frac{2}{9J}\right)^{1/3} \left[-\frac{27}{30800} \frac{J_0^{\text{VII}}}{J^2} + \frac{3}{220} \frac{J_0' J_0^{\text{VI}}}{J^3} + \frac{81}{2200} \frac{J_0'' J_0^{\text{V}}}{J^3} - \right. \\ & - \frac{81}{640} \frac{J_0'^2 J_0^{\text{V}}}{J^4} + \frac{9}{154} \frac{J_0'' J_0^{\text{IV}}}{J^3} - \frac{81}{140} \frac{J_0' J_0'' J_0^{\text{IV}}}{J^4} + \frac{27}{32} \frac{J_0'^3 J_0^{\text{IV}}}{J^5} - \frac{3}{8} \frac{J_0' J_0''^2}{J^4} - \end{aligned}$$

$$-\frac{27}{50} \frac{J_0''^2 J_0'''}{J^4} + \frac{189}{40} \frac{J_0'^2 J_0'' J_0'''}{J^5} - \frac{1071}{256} \frac{J_0'^4 J_0'''}{J^6} + \frac{567}{250} \frac{J_0' J_0''^3}{J^5} - \frac{9639}{800} \frac{J_0'^3 J_0''^2}{J^6} +$$

$$+ \frac{9639}{640} \frac{J_0'^5 J_0''}{J^7} - \frac{10557}{2048} \frac{J_0'^7}{J^8} \Big] a_0^{11/4}$$

$$\Phi_{12} = \left\{ \frac{a_1}{a_0^{3/2}} \left[T \left(\frac{459}{2800} \frac{J_0''}{J} - \frac{171}{1120} \frac{J_0'^2}{J^2} \right) - \frac{1}{160} \frac{J_0^V}{J^2} + \frac{3}{56} \frac{J_0' J_0^{IV}}{J^3} + \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{10} \frac{J_0'' J_0'''}{J^3} - \frac{9}{32} \frac{J_0'^2 J_0'''}{J^4} - \frac{81}{200} \frac{J_0'^3 J_0''}{J^5} - \left. \frac{243}{512} \frac{J_0'^5}{J^6} \right] + \frac{a_1^2}{a_0^3} \left(-\frac{1}{120} \frac{J_0''}{J} + \right.$$

$$+ \frac{1}{128} \frac{J_0'^2}{J^2} \Big) + \frac{a_2}{a_0^3} \left(\frac{2}{15} \frac{J_0''}{J} - \frac{1}{8} \frac{J_0'^2}{J^2} \right) + T \left(-\frac{53}{13200} \frac{J_0^V}{J^2} + \frac{1831}{53900} \frac{J_0' J_0^{IV}}{J^3} + \right.$$

$$+ \frac{389}{6160} \frac{J_0'' J_0'''}{J^3} - \frac{987}{5600} \frac{J_0'^2 J_0'''}{J^4} - \frac{1063}{4200} \frac{J_0'^3 J_0''^2}{J^4} + \frac{14069}{22400} \frac{J_0'^3 J_0''}{J^5} - \frac{26191}{8960} \frac{J_0'^5}{J^6} \Big) +$$

$$+ \frac{J_0''}{J} \left[\frac{281}{4200} T^2 + \frac{51}{550} T S' - \frac{1021}{13200} (k_1^2 + \delta_1^2) - \frac{69}{2200} (k_1 k_2 + \delta_1 \delta_2) + \frac{69}{2200} (k_{1P}' + \delta_{1Q}') \right] +$$

$$+ \frac{J_0'^2}{J^2} \left[-\frac{10691}{172480} T^2 - \frac{61}{704} T S' + \frac{433}{3520} (k_1^2 + \delta_1^2) + \frac{161}{3520} (k_1 k_2 + \delta_1 \delta_2) + \right.$$

$$\left. - \frac{161}{3520} (k_{1P}' + \delta_{1Q}') \right] + \frac{1}{18480} \frac{J_0^{VIII}}{J^3} - \frac{3}{1400} \frac{J_0' J_0^{VII}}{J^4} - \frac{1}{300} \frac{J_0'' J_0^{VI}}{J^4} +$$

$$+ \frac{1}{80} \frac{J_0'^2 J_0^{VI}}{J^5} - \frac{1}{160} \frac{J_0'' J_0^V}{J^4} + \frac{189}{2800} \frac{J_0' J_0'' J_0^V}{J^5} - \frac{27}{256} \frac{J_0'^3 J_0^V}{J^6} - \frac{3}{784} \frac{J_0^{IV2}}{J^4} +$$

$$+ \frac{873}{7700} \frac{J_0' J_0'' J_0^{IV}}{J^5} + \frac{13149}{192500} \frac{J_0'^2 J_0^{IV}}{J^5} - \frac{597}{175} \frac{J_0'^2 J_0'' J_0^{IV}}{J^6} + \frac{1215}{1792} \frac{J_0'^4 J_0^{IV}}{J^7} +$$

$$+ \frac{566}{6875} \frac{J_0'' J_0''^2}{J^5} - \frac{15}{32} \frac{J_0'^2 J_0''^2}{J^6} - \frac{18441}{13750} \frac{J_0' J_0'^2 J_0''}{J^6} + \frac{81}{16} \frac{J_0'^3 J_0'' J_0'''}{J^7} -$$

$$- \frac{1701}{512} \frac{J_0'^5 J_0''}{J^8} - \frac{10773}{68750} \frac{J_0''^4}{J^6} + \frac{729}{200} \frac{J_0'^2 J_0''^3}{J^7} - \frac{4212891}{352000} \frac{J_0'^4 J_0''^2}{J^8} +$$

$$+ \frac{1472571}{140800} \frac{J_0'^6 J_0''}{J^9} - \frac{16197}{5120} \frac{J_0'^8}{J^{10}} \Big\} a_0^2$$

$$U_8 = \left(\frac{2}{9J} \right)^{3/4} \left[\frac{a_1}{a_0^{3/2}} \left(-\frac{11}{40} \frac{J_0'''}{J} + \frac{99}{80} \frac{J_0' J_0''}{J^2} - \frac{33}{32} \frac{J_0'^3}{J^3} + \frac{11}{10} J T \right) - \right.$$

$$- \frac{11}{32} \frac{a_1^2}{a_0^3} J + \frac{11}{4} \frac{a_2}{a_0^2} J + T \left(\frac{11}{560} \frac{J_0'''}{J} - \frac{641}{5600} \frac{J_0' J_0''}{J^2} + \frac{123}{1120} \frac{J_0'^3}{J^3} \right) +$$

$$+ \frac{93}{400} J T^2 + \frac{7}{16} J T S' - \frac{33}{16} J (k_1^2 + \delta_1^2) - \frac{7}{16} J (k_1 k_2 + \delta_1 \delta_2) +$$

$$+ \frac{7}{16} J (k_{1P}' + \delta_{1Q}') + \frac{1}{160} \frac{J_0^{VI}}{J^2} - \frac{27}{320} \frac{J_0' J_0^V}{J^3} - \frac{27}{140} \frac{J_0'' J_0^{IV}}{J^3} - \frac{297}{448} \frac{J_0'^2 J_0^{IV}}{J^4} -$$

$$- \frac{1}{8} \frac{J_0''^2}{J^3} + \frac{99}{40} \frac{J_0' J_0'' J_0'''}{J^4} - \frac{231}{64} \frac{J_0'^3 J_0'''}{J^5} + \frac{297}{500} \frac{J_0''^3}{J^4} -$$

$$\left. - \frac{6237}{800} \frac{J_0'^2 J_0''^2}{J^5} + \frac{35343}{2560} \frac{J_0'^4 J_0''}{J^6} - \frac{11781}{2048} \frac{J_0'^6}{J^7} \right] a_0^{11/4}$$

$$U_9 = \left\{ \frac{a_1}{a_0^{3/2}} \left(-\frac{9}{140} \frac{J_0'}{J} T + \frac{1}{28} \frac{J_0^{IV}}{J^2} - \frac{1}{4} \frac{J_0' J_0'''}{J^3} - \frac{9}{50} \frac{J_0''^2}{J^3} + \frac{81}{80} \frac{J_0'^2 J_0''}{J^4} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{81}{128} \frac{J_0'^4}{J^5} \right) + \frac{1}{48} \frac{a_1^2}{a_0^3} \frac{J_0'}{J} - \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_0^2} \frac{J_0'}{J} + T \left(-\frac{11}{2100} \frac{J_0^{IV}}{J^2} + \frac{22}{525} \frac{J_0' J_0'''}{J^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{131}{4200} \frac{J_0''^2}{J^3} - \frac{3149}{16800} \frac{J_0'^2 J_0''}{J^4} + \frac{279}{2240} \frac{J_0'^4}{J^5} \right) + \frac{J_0'}{J} \left[-\frac{59}{4200} T^2 - \frac{1}{40} T S' + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{7}{15} (k_1^2 + \delta_1^2) + \frac{1}{40} (k_1 k_2 + \delta_1 \delta_2) - \frac{1}{40} (k_{1P}' + \delta_{1Q}') \Big] - \frac{1}{2100} \frac{J_0^{\text{VII}}}{J^3} + \\
& + \frac{1}{120} \frac{J_0' J_0^{\text{VI}}}{J^4} + \frac{9}{400} \frac{J_0'' J_0^{\text{V}}}{J^4} - \frac{27}{320} \frac{J_0'^2 J_0^{\text{V}}}{J^5} + \frac{1}{28} \frac{J_0''' J_0^{\text{IV}}}{J^4} - \frac{27}{70} \frac{J_0' J_0'' J_0^{\text{IV}}}{J^5} + \\
& + \frac{135}{224} \frac{J_0'^3 J_0^{\text{IV}}}{J^6} - \frac{1}{4} \frac{J_0' J_0''^2}{J^5} - \frac{333}{250} \frac{J_0''^2 J_0'''}{J^5} + \frac{27}{8} \frac{J_0'^2 J_0'' J_0'''}{J^6} - \frac{405}{128} \frac{J_0'^4 J_0'''}{J^7} + \\
& + \frac{81}{50} \frac{J_0' J_0''^3}{J^6} - \frac{729}{80} \frac{J_0'^3 J_0''^2}{J^7} + \frac{15309}{1280} \frac{J_0'^5 J_0''}{J^8} - \frac{2187}{512} \frac{J_0'^7}{J^9} \Big\} a_0^2 \\
U_{10} = & \left(\frac{2}{9J} \right)^{1/3} \left\{ \frac{a_1}{a_0^{3/2}} \left[T \left(\frac{13}{1120} \frac{J_0''}{J} - \frac{13}{2240} \frac{J_0'^2}{J^2} \right) - \frac{39}{2240} \frac{J_0^{\text{V}}}{J^2} + \frac{39}{224} \frac{J_0' J_0^{\text{IV}}}{J^3} + \right. \right. \\
& + \frac{13}{40} \frac{J_0'' J_0'''}{J^3} - \frac{65}{64} \frac{J_0'^2 J_0'''}{J^4} - \frac{117}{80} \frac{J_0' J_0''^2}{J^4} + \frac{507}{128} \frac{J_0'^3 J_0''}{J^5} - \frac{507}{256} \frac{J_0'^5}{J^6} \Big] + \\
& + \frac{a_2}{a_0^2} \left(\frac{13}{40} \frac{J_0''}{J} - \frac{13}{32} \frac{J_0'^2}{J^2} \right) \Big\} T \left(\frac{221}{61600} \frac{J_0^{\text{V}}}{J^2} - \frac{8471}{215600} \frac{J_0' J_0^{\text{IV}}}{J^3} - \frac{2333}{30800} \frac{J_0'' J_0'''}{J^3} + \right. \\
& + \frac{173}{700} \frac{J_0'^2 J_0'''}{J^4} + \frac{10159}{28000} \frac{J_0' J_0''^2}{J^4} - \frac{11453}{11200} \frac{J_0'^3 J_0''}{J^5} + \frac{2379}{4480} \frac{J_0'^5}{J^6} \Big) + \\
& + \frac{J_0''}{J} \left[\frac{19}{1750} T^2 + \frac{39}{4400} T S' - \frac{1317}{3300} (k_1^2 + \delta_1^2) + \frac{6}{275} (k_1 k_2 + \delta_1 \delta_2) - \right. \\
& - \frac{6}{275} (k_{1P}' + \delta_{1Q}') \Big] + \frac{J_0'^2}{J^2} \left[- \frac{113}{8624} T^2 - \frac{13}{1760} T S' + \frac{2081}{3520} (k_1^2 + \delta_1^2) - \right. \\
& - \frac{23}{1760} (k_1 k_2 + \delta_1 \delta_2) + \frac{23}{1760} (k_{1P}' + \delta_{1Q}') \Big] + \frac{13}{92400} \frac{J_0^{\text{VIII}}}{J^3} - \frac{3}{800} \frac{J_0' J_0^{\text{VII}}}{J^4} - \\
& - \frac{1}{100} \frac{J_0'' J_0^{\text{VI}}}{J^4} + \frac{13}{320} \frac{J_0'^2 J_0^{\text{VI}}}{J^5} - \frac{3}{160} \frac{J_0''' J_0^{\text{V}}}{J^4} + \frac{351}{1600} \frac{J_0' J_0'' J_0^{\text{V}}}{J^5} - \frac{819}{2240} \frac{J_0'^3 J_0^{\text{V}}}{J^6} - \\
& - \frac{9}{784} \frac{J_0^{\text{IV}2}}{J^4} + \frac{10821}{30800} \frac{J_0' J_0'' J_0^{\text{IV}}}{J^5} + \frac{188379}{385000} \frac{J_0''^2 J_0^{\text{IV}}}{J^5} - \frac{85539}{22400} \frac{J_0'^2 J_0'' J_0^{\text{IV}}}{J^6} + \\
& + \frac{2223}{896} \frac{J_0'^4 J_0^{\text{IV}}}{J^7} + \frac{44119}{55000} \frac{J_0'' J_0'''^2}{J^5} - \frac{13}{8} \frac{J_0'^2 J_0'''^2}{J^6} - \frac{43839}{6875} \frac{J_0' J_0''^2 J_0'''}{J^6} + \\
& + \frac{741}{40} \frac{J_0'^3 J_0'' J_0'''}{J^7} - \frac{8151}{640} \frac{J_0'^5 J_0'''}{J^8} - \frac{96903}{13750} \frac{J_0''^4}{J^6} + \frac{13338}{4000} \frac{J_0'^2 J_0''^3}{J^7} - \\
& - \frac{4209219}{176000} \frac{J_0'^4 J_0''^2}{J^8} + \frac{13237731}{281600} \frac{J_0'^6 J_0''}{J^9} - \frac{2409207}{163840} \frac{J_0'^8}{J^{10}} \Big\} a_0^{13/6} \quad (5.1)
\end{aligned}$$

В дальнейшем будем считать, что эмиттирует либо плоскость $x = 0$, либо цилиндр $R = R_0$, либо сфера $r = r_0$. В первых двух случаях кривизны поверхностей, ортогональных к эмиттеру, — нулевые, в последнем $k_2 \neq 0$, но она входит в формулы лишь через гауссову кривизну $k_1 k_2$ и поэтому также выпадает. Пусть плотность тока эмиссии J задается выражением

$$J = 3 + \sin t \quad (5.2)$$

Формулы (2.5) и (5.1) дают возможность определить потенциал и скорость. Для вычисления плотности тока в любой точке воспользуемся соотношениями, которые получаются при интегрировании уравнения сохранения тока и учете того факта, что ток смещения на эмиттере равен нулю

$$\begin{aligned}
J(t, x) = J_1(t) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x}, \quad J(t, \bar{R}) = \frac{J(t)}{R_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial R} \\
J(t, r) = \frac{J(t)}{r^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial r}
\end{aligned}$$

При этом в качестве характерного линейного размера a в плоском случае выберем расстояние между электродами, а в цилиндрическом и сферическом — радиус эмиттера. Результаты удобно привести в безразмерных переменных, связанных с решением Чайлда-Лэнгмюра для плоского диода [4]. Переход от переменных ξ (φ°) к этим новым безразмерным переменным (φ_L°) при выполнении (5.2) осуществляется при помощи множителей

$$\varphi_L^\circ = 2 \left(\frac{2}{27} \right)^{1/3} \varphi^\circ, \\ v_L^\circ = \left(\frac{2}{27} \right)^{1/2} v^\circ, \quad J_L^\circ = 1/3 J^\circ$$

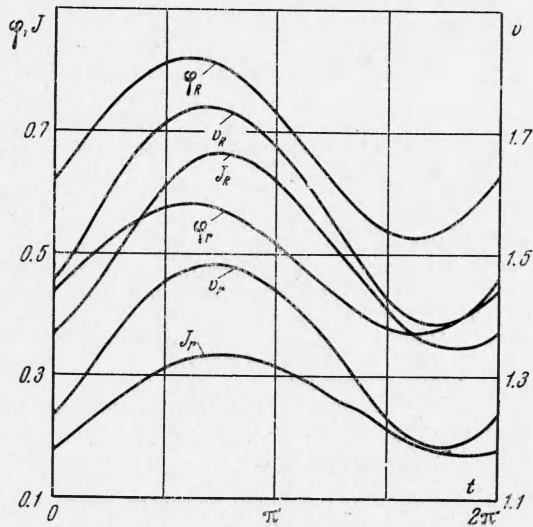
Для плоского диода $g_{11} = 1$, т. е. $a_0 = 1$, $a_k = 0$ ($k > 0$), $T = 0$. Для цилиндрического и сферического диодов в качестве x^1 выберем логарифм радиуса ($\ln R$, $\ln r$), следовательно, $g_{11} = \exp(2x^1)$ и $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$ и т. д. Кроме того, $T = -1/R$, $T_S' = 1/R^2$ в цилиндрическом случае и $T = -2/r$, $T_S' = 2/r^2$ — в сферическом. На фиг. 1 приведены кривые $\varphi_L^\circ(t, 1) = \varphi_2$, $v_L^\circ(t, 1) = v_2$, $J_L^\circ(t, 1) = J_2$ и $J_L^\circ(t, 0) = 1 + 1/3 \sin t$. Индекс 2 относится к величинам на коллекторе. На фиг. 2 аналогичные кривые построены для цилиндрического и сферического диодов при расстоянии между электродами, равном радиусу эмиттера.

Приведенные решения описывают высокочастотные режимы плоского, цилиндрического и сферического диодов при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом. Частота $\omega = 1$ соответствует размерной частоте $\omega \sim U/a$, где a — характерный линейный размер, U — скорость, приобретаемая частицей на коллекторе плоского диода $0 \leq x \leq a$, плотность тока в котором равна J . Уменьшение частоты и понижение амплитуды высокочастотной составляющей ведут к более быстрой сходимости рядов, причем в первую очередь это касается разложения для φ .

Поступила 28 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Сыровой В. А. О решении уравнений регулярного пучка при произвольных условиях эмиссии на криволинейной поверхности. ПМТФ, 1966, № 3.
2. M e l t z e r B. Single-Component Stationary Electron Flow Under Space-Charge Conditions. J. Electronics, 1956, vol. 2, No 2.
3. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений плоского стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1962, № 4.
4. Сыровой В. А. О некоторых новых решениях, получаемых при помощи инвариантных преобразований. ПМТФ, 1965, № 3.



Фиг. 2