Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 3

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ (M, N)-ПРИБЛИЖЕНИЙ УРАВНЕНИЙ УПРУГОГО СЛОЯ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

УДК 539.3

А. Е. Алексеев

**Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск**

Одним из методов построения двумерных уравнений теории пластин и оболочек является метод разложения по толщине с применением полиномов Лежандра (например, [1]). В [2] изложен метод, в основе которого лежит использование нескольких аппроксимаций одних и тех же неизвестных функций в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра. На основе развития этой методики в [3] получено однопараметрическое семейство последовательных приближений уравнений деформирования слоя переменной толщины в произвольной криволинейной системе координат. В ортогональной криволинейной системе координат для слоя постоянной толщины в [4] приводятся последовательные приближения, зависящие от двух параметров и названные (M, N)-аппроксимациями. Ниже излагается отличная от [4] методика сведения трехмерных уравнений теории упругости к двухпараметрической последовательности двумерных задач упругого слоя переменной толщины в произвольной криволинейной системе координат, которая является развитием результатов [2, 3].

1. Определение геометрии слоя. Обозначим через V область трехмерного пространства R^3, которую занимает оболочка. Определим положение лицевых поверхностей S^+ и S^- заданием радиусов-векторов $\mathbf{R}^+$ и $\mathbf{R}^-$ как функций одних и тех же гауссовых координат ξ^α:

$$\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^+(\xi^\alpha), \qquad \mathbf{R}^- = \mathbf{R}^-(\xi^\alpha), \qquad \{\xi^\alpha\} \in S_\xi \subset R^2.$$

Здесь и ниже греческие индексы пробегают значения 1, 2, а латинские — 1, 2, 3.

Функции $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$ отображают плоскую область S_ξ с контуром L_ξ пространства R^2 на лицевые поверхности S^+, S^- соответственно. Положение любой внутренней точки оболочки V определяется вектор-функцией криволинейных координат ξ^k:

$$\mathbf{R}(\xi^k) = \mathbf{r}_0(\xi^\alpha) + \xi^3 \Delta\mathbf{r}(\xi^\alpha), \qquad \{\xi^k\} \in V_\xi \subset R^3, \tag{1.1}$$

где

$$\begin{gathered} V_\xi = \{\xi^k | \xi^\alpha \in S_\xi \subset R^2, \qquad \xi^3 \in [-1,1]\}, \\ \mathbf{r}_0 = 0{,}5\,(\mathbf{R}^+(\xi^\alpha) + \mathbf{R}^-(\xi^\alpha)), \qquad \Delta\mathbf{r} = 0{,}5\,(\mathbf{R}^+(\xi^\alpha) - \mathbf{R}^-(\xi^\alpha)). \end{gathered} \tag{1.2}$$

При этом вектор-функция $\mathbf{R}$ отображает область V_ξ на V, а вектор-функция $\mathbf{r}_0$ отображает плоскую область S_ξ на поверхность S_0 трехмерного пространства, которую в дальнейшем будем называть срединной поверхностью.

Обозначим через h половину толщины слоя в направлении ξ^3. Из (1.2) получим $h = (\Delta\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r})^{0,5}$, $\Delta\mathbf{r} = h\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении ξ^3).

Пусть Σ — боковая поверхность оболочки, L — линия пересечения Σ и S_0. Тогда, согласно (1.2), Σ — линейчатая поверхность, образованная семейством прямых линий, проходящих через точки контура L в направлении вектора $\mathbf{n}$. Зафиксируем в области S_ξ некоторую точку с координатами $\{\xi_0^\alpha\}$. Тогда вектор-функция $\mathbf{R}$ по (1.1) сопоставит этой точке отрезок прямой в трехмерном пространстве, концы которого лежат на лицевых поверхностях. Кроме того, если эта точка лежит на контуре L, то весь отрезок будет принадлежать боковой поверхности Σ.

Таким образом, задание вектор-функций $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$ полностью определяет геометрию оболочки переменной толщины. При этом вектор $\mathbf{n}$ может не быть нормалью к поверхности S_0, а боковая поверхность Σ и срединная поверхность S_0 могут пересекаться не под прямым углом.

2. Локальные базисы координатной системы слоя. Согласно (1.1), в качестве координат любой точки слоя V можно взять тройку чисел $\{\xi^k\}$, где $\{\xi^\alpha\}$ — гауссовы координаты срединной поверхности S_0, а $\xi^3 \in [-1,1]$ — координата в направлении вектора $\mathbf{n}$. Такую криволинейную систему координат будем называть координатной системой слоя.

Дифференцируя обе части равенства (1.1) по переменным ξ^i, получим вектор-функции

$$э_\alpha = \mathbf{R}_{,\alpha} = \Big(\mathbf{R}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^\alpha}\Big) = \mathbf{r}_{0,\alpha} + \Delta\mathbf{r}_{,\alpha}\xi^3, \qquad э_3 = \mathbf{R}_{,3} = \Delta\mathbf{r} = h\mathbf{n}, \tag{2.1}$$

составляющие ковариантный локальный базис координатной системы слоя.

Введем следующие обозначения: $э^0_\alpha = \mathbf{r}_{0,\alpha} = э_\alpha(\xi^\beta, 0)$, $э^0_3 = э_3(\xi^\alpha)$, $э^{0i} = э^i(\xi^\alpha, 0)$.

Тройки векторов $э^0_i$ и $э^{0i}$ образуют локальные базисы срединной поверхности слоя. В произвольной точке слоя эти локальные базисы определяются параллельным переносом из соответствующей точки срединной поверхности.

В каждой точке слоя определим тройку векторов $\mathbf{a}_i$:

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{n} \times (э^0_\alpha \times \mathbf{n}), \qquad \mathbf{a}_3 = \mathbf{n}, \tag{2.2}$$

которую в дальнейшем будем рассматривать как основной локальный базис слоя (ковариантный). Следуя известной формуле векторной алгебры, из (2.2) находим $\mathbf{a}_\alpha = э^0_\alpha - \mathbf{n}\cdot(э^0_\alpha\cdot\mathbf{n})$, т. е. вектор $\mathbf{a}_\alpha$ — проекция $э^0_\alpha$ на плоскость, ортогональную единичному вектору $\mathbf{n}$. Соответствующий биортогональный (контравариантный) базис находится из условий $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}^j = \delta_i^j$ (δ_i^j — дельта Кронекера) и имеет вид $\mathbf{a}^\alpha = э^{0\alpha}$, $\mathbf{a}^3 = \mathbf{n}$. Из (2.2) следует, что вектор $\mathbf{n}$ ортогонален базисным векторам $\mathbf{a}^\alpha$, $\mathbf{a}_\alpha$.

Таким образом, для криволинейной координатной системы слоя можно описанным выше способом ввести три вида локальных базисов: $э_i$, $э^0_i$, $\mathbf{a}_i$. Каждый из векторов одного базиса можно разложить по векторам другого. Обозначим

$$g_{ij} = э_i\cdot э_j, \qquad g^0_{ij} = э^0_i\cdot э^0_j, \qquad a_{ij} = \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j, \tag{2.3}$$

где g_{ij} — компоненты метрического тензора системы координат ξ^i. Из (2.1), (2.3) вытекает $g_{33} = h^2$, а из (2.2) $a_{33} = 1$, $a_{3\alpha} = 0$.

С учетом обозначений $g_\alpha = g_{\alpha 3}/h$, $b^\beta_\alpha = -(\mathbf{a}_{3,\alpha}\cdot\mathbf{a}^\beta)$ формулы (2.1) примут вид

$$э_\alpha = m^\beta_\alpha\mathbf{a}_\beta + g_\alpha\mathbf{a}_3, \qquad э_3 = h\mathbf{a}_3 \qquad (m^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha - b^\beta_\alpha h\xi^3).$$

Соответственно для компонент метрического тензора g_{ij} имеем

$$g_{\alpha\beta} = m^\gamma_\alpha m^\lambda_\beta a_{\gamma\lambda} + g_\alpha g_\beta, \qquad g_{\alpha 3} = hg_\alpha, \qquad g_{33} = h^2. \tag{2.4}$$

Из (2.4) получаем формулы, связывающие определители g, g^0, a матриц $\|g_{ij}\|$, $\|g^0_{ij}\|$, $\|a_{ij}\|$: $g = h^2m^2a$, $g^0 = h^2a$ ($m = m_1^1m_2^2 - m_1^2m_2^1$ — определитель матрицы $\|m_{\alpha\beta}\|$).

3. Уравнения линейной теории упругости в произвольной криволинейной системе координат. Рассмотрим произвольную криволинейную систему координат ξ^i. Уравнения равновесия сплошной среды в векторной форме записываются в виде [1]

$$\hat{\mathbf{t}}^i_{,i} + \hat{\mathbf{f}} = 0, \qquad \hat{\mathbf{t}}^i = J\mathbf{t}^i, \qquad \hat{\mathbf{f}} = J\mathbf{f}, \qquad \mathbf{t}^i = \sigma^{ij}\mathbf{э}_j. \tag{3.1}$$

$$\mathbf{э}_i \times \hat{\mathbf{t}}^i = 0, \qquad J = \mathbf{э}_1 \cdot (\mathbf{э}_2 \times \mathbf{э}_3), \tag{3.2}$$

где J — якобиан преобразования координат; σ^{ij} — компоненты тензора напряжений; $\mathbf{f}$ — вектор объемных сил. Равенство (3.2) является условием симметрии тензора напряжений.

Компоненты тензора деформаций ε_{ij} связаны линейными соотношениями с вектором перемещений $\mathbf{u}$:

$$2\varepsilon_{ij} = (\mathbf{э}_i \cdot \mathbf{u}_{,j}) + (\mathbf{э}_j \cdot \mathbf{u}_{,i}). \tag{3.3}$$

Обобщенный закон Гука имеет вид

$$\sigma^{ij} = C^{ijks}\varepsilon_{ks} \tag{3.4}$$

(C^{ijks} — контравариантные компоненты тензора 4-го ранга, определяющего свойства упругой среды).

Соотношения (3.4) удобно записать в векторной форме

$$\hat{\mathbf{t}}^i = J\widetilde{C}^{ij} \cdot \mathbf{u}_{,j}. \tag{3.5}$$

Здесь $\widetilde{C}^{ij}$ — оператор, определяемый по формуле $\widetilde{C}^{ij} = C^{ijks}(\mathbf{э}_k * \mathbf{э}_s)$, где $*$ — символ тензорного произведения.

Для простоты изложения в дальнейшем ограничимся случаем краевых условий, когда граница S деформируемого тела состоит из двух частей: S_u, где заданы перемещения

$$\mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{u}_*; \tag{3.6}$$

S_σ, где заданы напряжения

$$\mathbf{t}^i\nu_i|_{S_\sigma} = \mathbf{P}_* \tag{3.7}$$

(ν_i — косинусы вектора внешней нормали к границе S, а $\mathbf{u}_*$, $\mathbf{P}_*$ — заданные вектор-функции на S).

Уравнения (3.1), (3.5) совместно с граничными условиями (3.6), (3.7) определяют краевую задачу линейной теории упругости.

4. Разложение функций по полиномам Лежандра. В качестве криволинейной системы координат выберем координатную систему слоя ξ^k. При этом координата $\xi^3 \in [-1,1]$, и неизвестные функции $\mathbf{u}$, $\hat{\mathbf{t}}^i$ можно представить в виде рядов по полиномам Лежандра:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty}[\mathbf{u}]^k P_k, \qquad \hat{\mathbf{t}}^i = \sum_{k=0}^{\infty}[\hat{\mathbf{t}}^i]^k P_k. \tag{4.1}$$

Здесь $P_k(\xi^3)$ — ортогональные полиномы Лежандра; $[\mathbf{u}]^k$, $[\hat{\mathbf{t}}^i]^k$ — коэффициенты разложений, зависящие от гауссовых координат $\{\xi^\alpha\} \in S_\xi \subset R^2$:

$$[\mathbf{u}]^k = \frac{1+2k}{2}\int_{-1}^{1} \mathbf{u} P_k d\xi^3, \qquad [\hat{\mathbf{t}}^i]^k = \frac{1+2k}{2}\int_{-1}^{1} \hat{\mathbf{t}}^i P_k d\xi^3.$$

Разложим величины $\hat{\mathbf{t}}^i$ по основному локальному базису $\mathbf{a}_i$. Согласно (2.4), (3.1), имеем

$$\hat{\mathbf{t}}^i = J\sigma^{ij}\mathbf{э}_j = \sqrt{a}mh\,(\sigma^{i\alpha}\mathbf{э}_\alpha + \sigma^{i3}\mathbf{э}_3) = \sqrt{a}mh\,(\sigma^{i\alpha}m_\alpha^\beta\mathbf{a}_\beta + \sigma^{ik}g_{k3}\mathbf{a}_3),$$

откуда, используя известное правило понижения индекса, получим

$$\hat{\mathbf{t}}^i = \sqrt{a}mh\,(\sigma^{i\alpha}m_\alpha^\beta\mathbf{a}_\beta + \sigma_3^i\mathbf{n}/h). \tag{4.2}$$

Подставим (4.2) в формулы (4.1) разложений $\hat{\mathbf{t}}^i$ по полиномам Лежандра и после простых преобразований находим

$$\hat{\mathbf{t}}^i = \sqrt{a}h\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1+2k}{2}\,(\overset{(k)}{M}{}^{i\gamma}\mathbf{a}_\gamma + \overset{(k)}{Q}{}^i\mathbf{n})\,P_k, \tag{4.3}$$

где

$$\overset{(k)}{M}{}^{i\gamma} = \int_{-1}^{1} mm_\beta^\gamma\sigma^{i\beta}P_k d\xi^3, \qquad \overset{(k)}{Q}{}^i = \frac{1}{h}\int_{-1}^{1} m\sigma_3^i P_k d\xi^3;$$

$\overset{(k)}{M}{}^{\alpha\beta}$ — моменты тангенциальных напряжений k-порядка; $\overset{(k)}{Q}{}^\alpha$ — моменты поперечных (перерезывающих) сил k-порядка.

Подобно усилиям разложим вектор перемещений $\mathbf{u}$ в (4.1) по основному базису:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty}(\overset{(k)}{U}{}^\gamma\mathbf{a}_\gamma + \overset{(k)}{W}\mathbf{n})\,P_k. \tag{4.4}$$

Здесь

$$\overset{(k)}{U}{}^\gamma = \frac{1+2k}{2}\int_{-1}^{1}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}^\gamma)\,P_k d\xi^3, \qquad \overset{(k)}{W} = \frac{1+2k}{2}\int_{-1}^{1}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,P_k d\xi^3$$

— моменты тангенциальных и поперечных перемещений k-порядка.

В [3] показано, что первые члены $\overset{(0)}{M}{}^{\alpha\gamma}$, $\overset{(0)}{Q}{}^\alpha$, $\overset{(1)}{M}{}^{\alpha\gamma}$ в разложении напряжений в ряды по полиномам Лежандра (4.3) имеют смысл усилий и моментов, действующих на элемент слоя, и что произвольное жесткое перемещение слоя содержится в первых членах $\overset{(0)}{U}{}^\alpha$, $\overset{(1)}{U}{}^\alpha$, $\overset{(0)}{W}$ разложений перемещений (4.4). Это накладывает естественное ограничение на минимальное количество членов в аппроксимирующих отрезках ряда (4.1). Так, при учете моментного состояния количество членов в аппроксимирующих отрезках ряда (4.1) для перемещений не может быть меньше двух для тангенциальных смещений и не меньше одного для поперечных.

Аппроксимации величин $\hat{\mathbf{t}}^i$, $\mathbf{u}$ состоят в урезании рядов (4.1) и сведении исходной дифференциальной задачи к решению конечной системы уравнений с двумя независимыми переменными.

5. Аппроксимации напряжений. Рассмотрим уравнения равновесия сплошной среды, которые представим в эквивалентной (3.1) форме

$$\mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{t}}^i_{,i} + \mathbf{f}) = 0, \qquad \mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{t}}^i_{,i} + \hat{\mathbf{f}}) = 0, \tag{5.1}$$

где, как и ранее, $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси ξ^3. Вектор $\mathbf{n}$ не зависит от переменной ξ^3. Поэтому, разлагая равенства (5.1) в ряды по полиномам Лежандра, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\mathbf{n} \times ([\hat{\mathbf{t}}^\alpha]^k_{,\alpha} + [\hat{\mathbf{t}}^3_{,3}]^k + [\hat{\mathbf{f}}]^k) = 0 \qquad (k = \overline{0, M}), \\ &\mathbf{n} \cdot ([\hat{\mathbf{t}}^\alpha]^k_{,\alpha} + [\hat{\mathbf{t}}^3_{,3}]^k + [\hat{\mathbf{f}}]^k) = 0 \qquad (k = \overline{0, N}), \end{aligned} \tag{5.2}$$

где M, N — произвольные числа. Для каждого k умножим равенства (5.2) на P_k и просуммируем. В результате

$$\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{T}}'^\alpha_{,\alpha} + \mathbf{n} \times \sum_{k=0}^{M} [\hat{\mathbf{t}}^3_{,3}]^k P_k + \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{F}} = 0, \qquad \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}}''^\alpha_{,\alpha} + \mathbf{n} \cdot \sum_{k=0}^{N} [\hat{\mathbf{t}}^3_{,3}]^k P_k + \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{F}} = 0.$$

Здесь величины $\hat{\mathbf{T}}'^\alpha$, $\hat{\mathbf{T}}''^\alpha$, $\hat{\mathbf{F}}$ соответствуют отрезкам рядов

$$\hat{\mathbf{T}}'^\alpha = \sum_{k=0}^{M} [\hat{\mathbf{t}}^\alpha]^k P_k, \quad \hat{\mathbf{T}}''^\alpha = \sum_{k=0}^{N} [\hat{\mathbf{t}}^\alpha]^k P_k, \quad \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{n} \times \Big(\sum_{k=0}^{M} [\hat{\mathbf{f}}]^k \times \mathbf{n} P_k \Big) + \mathbf{n} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{N} [\hat{\mathbf{f}}]^k \cdot \mathbf{n} P_k \Big). \tag{5.3}$$

Рассмотрим функцию $a(\xi)$, отвечающий ей отрезок ряда $A(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{Q} [a]^k P_k(\xi)$ и ряд для производной $A_{,\xi} = \sum\limits_{k=0}^{Q-1} [a_{,\xi}]^k P_k$. Можно показать, что для $L \leqslant (Q-1)$ справедливо равенство

$$A^*_{,\xi} = \sum_{k=0}^{L} [a_{,\xi}]^k P_k, \tag{5.4}$$

где

$$A^*(\xi) = \sum_{k=0}^{Q} [a]^k \overset{(L)}{P_k}(\xi);$$

$\overset{(L)}{P_k}$ — полиномы Лежандра следующего вида:

$$\overset{(L)}{P_k} = \begin{cases} P_k, & k = \overline{0, (L-1)}, \\ P_L, & k = L + 2i, \\ P_{L+1}, & k = L + 2i + 1, \end{cases} \quad i = 0, 1, \ldots$$

При этом на концах отрезка $[-1,1]$ получим $A^*(\pm 1) = A(\pm 1)$. Для произвольной функции $b(\xi)$ можно показать справедливость равенства

$$\int_{-1}^{1} (A^*_{,\xi} b)\, d\xi = \int_{-1}^{1} (A^* b)_{,\xi} d\xi - \int_{-1}^{1} (a B^*_{,\xi})\, d\xi. \tag{5.5}$$

Здесь

$$B^*(\xi) = \sum_{k=0}^{Q+1} [b]^k \overset{(QL)}{P_k}(\xi); \tag{5.6}$$

полиномы $\overset{(QL)}{P_k}$ для четных значений $(Q-L)$ имеют вид

$$\overset{(QL)}{P_k}=\begin{cases} P_k, & k=\overline{0,L},\\ P_{Q+1}, & k=L+2i+1, \quad i=\overline{0,(Q-L)/2},\\ P_Q, & k=L+2i+2, \quad i=\overline{0,(Q-L)/2-1},\end{cases}$$

а для нечетных

$$\overset{(QL)}{P_k}=\begin{cases} P_k, & k=\overline{0,L},\\ P_Q, & k=L+2i+1,\\ P_{Q+1}, & k=L+2i+2,\end{cases} \quad i=\overline{0,(Q-L-1)/2}.$$

Для отрезков рядов $B(\xi)=\sum\limits_{k=0}^{Q+1}[b]^k P_k(\xi)$ и B^* из (5.6) следует $B^*(\pm1)=B(\pm1)$. Используя (5.4), получим, что для отрезка ряда

$$\hat{\mathbf{T}}^3=\mathbf{n}\times\Big(\sum_{k=0}^{M^*}\{[\hat{\mathbf{t}}^3]^k P_k\}\times\mathbf{n}\Big)+\mathbf{n}\cdot\Big(\sum_{k=0}^{N^*}\{[\hat{\mathbf{t}}^3]^k P_k\}\cdot\mathbf{n}\Big)$$

при произвольных M^* и N^*, удовлетворяющих условиям $M^*\geqslant M+1$, $N^*\geqslant N+1$, справедливы равенства

$$\mathbf{n}\times\sum_{k=0}^{M}[\hat{\mathbf{t}}^3_{,3}]^k P_k=\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{T}}^*_{,3},\qquad \mathbf{n}\cdot\sum_{k=0}^{N}[\hat{\mathbf{t}}^3_{,3}]^k P_k=\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{T}}^*_{,3}, \tag{5.7}$$

где

$$\hat{\mathbf{T}}^*=\mathbf{n}\times\Big(\sum_{k=0}^{M^*}\{[\hat{\mathbf{t}}^3]^k \overset{(M)}{P_k}\}\times\mathbf{n}\Big)+\mathbf{n}\cdot\Big(\sum_{k=0}^{N^*}\{[\hat{\mathbf{t}}^3]^k \overset{(N)}{P_k}\}\cdot\mathbf{n}\Big). \tag{5.8}$$

Подставляя (5.7) в (5.2), находим

$$\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{T}}'^i_{,i}+\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{F}}=0,\qquad \mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{T}}''^i_{,i}+\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{F}}=0. \tag{5.9}$$

Здесь для компактности записи введены обозначения $\hat{\mathbf{T}}'^3=\hat{\mathbf{T}}''^3=\hat{\mathbf{T}}^*$.

Таким образом, в уравнениях (5.9) для одних и тех же величин $\hat{\mathbf{t}}^\alpha$ имеем два вида аппроксимаций: $\hat{\mathbf{T}}'^\alpha$ и $\hat{\mathbf{T}}''^\alpha$, отличающихся только количеством удерживаемых членов в рядах.

Если в формулы (5.3), (5.8) подставить выражения (4.3), получим окончательный вид аппроксимаций напряжений:

$$\hat{\mathbf{T}}'^\alpha=\sqrt{a}h\sum_{k=0}^{M}\frac{1+2k}{2}\Big(\overset{(k)}{M}{}^{\alpha\gamma}\mathbf{a}_\gamma+\overset{(k)}{Q}{}^\alpha\mathbf{n}\Big)P_k,$$

$$\hat{\mathbf{T}}''^\alpha=\sqrt{a}h\sum_{k=0}^{N}\frac{1+2k}{2}\Big(\overset{(k)}{M}{}^{\alpha\gamma}\mathbf{a}_\gamma+\overset{(k)}{Q}{}^\alpha\mathbf{n}\Big)P_k, \tag{5.10}$$

$$\hat{\mathbf{T}}^3=\sqrt{a}h\Big(\sum_{k=0}^{M^*}\frac{1+2k}{2}\overset{(k)}{M}{}^{3\gamma}\mathbf{a}_\gamma P_k+\sum_{k=0}^{N^*}\frac{1+2k}{2}\overset{(k)}{Q}{}^3\mathbf{n}P_k\Big),\quad M^*\geqslant M+1,\quad N^*\geqslant N+1.$$

6. Аппроксимации деформаций и перемещений. Рассмотрим произвольный вектор перемещений $\mathbf{u}$, удовлетворяющий условиям (3.6) на границе S_u. Для простоты изложения ограничимся случаем нулевых объемных сил ($\hat{\mathbf{F}} = 0$).

Из уравнений (5.9) следует

$$\int\limits_{V_\xi} \{(\hat{\mathbf{T}}'^{i}_{,i} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) + (\hat{\mathbf{T}}''^{i}_{,i} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\}\, dV_\xi = 0, \qquad dV_\xi = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3. \tag{6.1}$$

Интегрируя (6.1) по частям, находим

$$\int\limits_{V_\xi} \{[\hat{\mathbf{T}}'^{i} \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n}))]_{,i} + [(\hat{\mathbf{T}}''^{i} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})]_{,i}\}\, dV_\xi =$$

$$= \int\limits_{V_\xi} \{\hat{\mathbf{T}}'^{i} \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n})]_{,i} + \hat{\mathbf{T}}''^{i} \cdot [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})]_{,i}\}\, dV_\xi. \tag{6.2}$$

Преобразуем правую часть (ПЧ) (6.2):

$$\text{ПЧ} = \int\limits_{V_\xi} \{\hat{\mathbf{T}}'^{i} \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n})]_{,i} + \hat{\mathbf{T}}''^{i} \cdot [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})]_{,i}\}\, dV_\xi =$$

$$= \int\limits_{V_\xi} \{\hat{\mathbf{T}}'^{\alpha} \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n})]_{,\alpha} + \hat{\mathbf{T}}''^{\alpha} \cdot [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})]_{,\alpha} + \hat{\mathbf{T}}^{3} \cdot \mathbf{u}_{,3}\}\, dV_\xi =$$

$$= \int\limits_{V_\xi} \Big\{\hat{\mathbf{t}}^{\alpha} \cdot \Big[\mathbf{n} \times \Big(\sum_{k=0}^{M} [\mathbf{u}]^k P_k \times \mathbf{n}\Big)\Big]_{,\alpha} + \hat{\mathbf{t}}^{\alpha} \cdot \Big[\mathbf{n} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{N} [\mathbf{u}]^k P_k \cdot \mathbf{n}\Big)\Big]_{,\alpha} + \hat{\mathbf{t}}^{3} \cdot \mathbf{U}''_{,3}\Big\}\, dV_\xi =$$

$$= \int\limits_{V_\xi} \{\hat{\mathbf{t}}^{\alpha} \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \hat{\mathbf{t}}^{3} \cdot \mathbf{U}''_{,3}\}\, dV_\xi. \tag{6.3}$$

Здесь

$$\mathbf{U}' = \sum_{k=0}^{M} (\mathbf{n} \times ([\mathbf{u}]^k \times \mathbf{n}))\, P_k + \sum_{k=0}^{N} (\mathbf{n} \cdot ([\mathbf{u}]^k \cdot \mathbf{n}))\, P_k;$$

$$\mathbf{U}'' = \sum_{k=0}^{M^*+1} (\mathbf{n} \times ([\mathbf{u}]^k \times \mathbf{n})) \overset{(M^*M)}{P_k} + \sum_{k=0}^{N^*+1} (\mathbf{n} \cdot ([\mathbf{u}]^k \cdot \mathbf{n})) \overset{(N^*N)}{P_k}.$$

Выражения для $\mathbf{U}''$ получены с использованием соотношений (5.5), (5.6). Подставляя в (6.3) выражения (3.1) для $\hat{\mathbf{t}}^i$ и пользуясь симметрией тензора напряжений, проведем дальнейшее преобразование:

$$\text{ПЧ} = \int\limits_{V_\xi} \{\hat{\mathbf{t}}^{\alpha} \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \hat{\mathbf{t}}^{3} \cdot \mathbf{U}''_{,3}\}\, dV_\xi = \int\limits_{V} \{\sigma^{\alpha k} \mathbf{э}_k \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \sigma^{3k} \mathbf{э}_k \cdot \mathbf{U}''_{,3}\}\, dV =$$

$$= \int\limits_{V} \{\sigma^{\alpha\beta} 0{,}5\, [\mathbf{э}_\beta \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \mathbf{э}_\alpha \cdot \mathbf{U}'_{,\beta}] + \sigma^{3\alpha} [\mathbf{э}_\alpha \cdot \mathbf{U}''_{,3} + \mathbf{э}_3 \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha}] + \sigma^{33} [\mathbf{э}_3 \cdot \mathbf{U}''_{,3}]\}\, dV$$

$$(dV = J\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3).$$

Обозначая выражения в квадратных скобках через E_{ij}, получим

$$2E_{\alpha\beta} = \mathbf{э}_\beta \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \mathbf{э}_\alpha \cdot \mathbf{U}'_{,\beta}, \quad 2E_{3\alpha} = \mathbf{э}_\alpha \cdot \mathbf{U}''_{,3} + \mathbf{э}_3 \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha}, \quad E_{33} = \mathbf{э}_3 \cdot \mathbf{U}''_{,3}; \tag{6.4}$$

окончательно имеем

$$ПЧ = \int_V \sigma^{ij} E_{ij} dV. \tag{6.5}$$

Сопоставляя (6.4) с выражениями деформаций через перемещения (3.3), полагаем, что величины E_{ij} являются аппроксимациями деформаций ε_{ij} в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра, а векторы $\mathbf{U}'$ и $\mathbf{U}''$ соответственно представляют две аппроксимации вектора перемещений $\mathbf{u}$: одна отвечает производным по координатам ξ^{α}, а другая — производной по координате ξ^3.

7. Аппроксимации граничных условий. В левой части (ЛЧ) (6.2) проведем операцию интегрирования:

$$ЛЧ = \int_\Sigma \{\hat{\mathbf{T}}'^1 \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n})) + (\hat{\mathbf{T}}''^1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\}\, d\xi^2 d\xi^3 + \int_\Sigma \{\hat{\mathbf{T}}'^2 \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n})) +$$

$$+ (\hat{\mathbf{T}}''^2 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\}\, d\xi^1 d\xi^3 + \int_{S^+} \hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}\, d\xi^1 d\xi^2 - \int_{S^-} \hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}\, d\xi^1 d\xi^2. \tag{7.1}$$

Оценим сумму первых двух интегралов в (7.1). Для этого, пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра, заменим вектор $\mathbf{u}$ на соответствующий отрезок ряда $\mathbf{U}'$. Далее, поскольку Σ — линейчатая поверхность, имеют место равенства

$$d\xi^1 d\xi^3 = (\nu_2^0 / J^0)\, d\sigma^0, \qquad d\xi^2 d\xi^3 = (\nu_1^0 / J^0)\, d\sigma^0.$$

Здесь ν_α^0 — косинусы внешней нормали $\boldsymbol{\nu}^0$ к боковой поверхности Σ в точках контура L; $J^0 = э_1^0 \cdot (э_2^0 \times э_3^0)$; $d\sigma^0 = |d\mathbf{L} \times э_3| d\xi^3$; $d\mathbf{L}$ — приращение единичного вектора, касательного к кривой L, при движении вдоль контура против часовой стрелки. В результате для суммы первых двух интегралов в (7.1) получим выражение

$$\int_\Sigma \frac{\hat{\mathbf{T}}^\alpha \cdot \mathbf{U}'}{J^0} \nu_\alpha^0 d\sigma^0 \qquad (\hat{\mathbf{T}}^\alpha = \mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{T}}'^\alpha \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{T}}''^\alpha \cdot \mathbf{n})).$$

В последних двух интегралах в (7.1), относящихся к лицевым поверхностям S^+ и S^-, заменим произведение $d\xi^1 d\xi^2$ по формулам

$$d\xi^1 d\xi^2 = \left[\frac{\nu_3 dS}{J}\right]^+ = -\left[\frac{\nu_3 dS}{J}\right]^-,$$

где $\nu_3 = \boldsymbol{\nu} \cdot э_3$; $\boldsymbol{\nu}$ — внешняя нормаль к поверхности S; знаки + и − соответствуют поверхностям S^+ и S^-.

После перечисленных выше преобразований равенство (7.1) приведем к виду

$$ЛЧ = \int_\Sigma \frac{\hat{\mathbf{T}}^\alpha \cdot \mathbf{U}'}{J^0} \nu_\alpha^0 d\sigma^0 + \int_{S^+} \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}}{J} \nu_3 dS^+ + \int_{S^-} \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}}{J} \nu_3 dS^-. \tag{7.2}$$

Из первого интеграла в (7.2) естественным образом следует аппроксимация граничных условий (3.6), (3.7) отрезками рядов:

$$\mathbf{U}'|_{\Sigma_u} = \mathbf{u}'_*; \tag{7.3}$$

$$\left.\frac{\hat{\mathbf{T}}^\alpha \nu_\alpha^0}{J^0}\right|_{\Sigma_\sigma} = \mathbf{P}'_* \qquad (\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma). \tag{7.4}$$

Здесь

$$\mathbf{u}'_* = \sum_{k=0}^{M} (\mathbf{n} \times ([\mathbf{u}_*]^k \times \mathbf{n}))\, P_k + \sum_{k=0}^{N} (\mathbf{n} \cdot ([\mathbf{u}_*]^k \cdot \mathbf{n}))\, P_k;$$

$$\mathbf{P}'_* = \sum_{k=0}^{M} (\mathbf{n} \times ([\mathbf{P}_*]^k \times \mathbf{n}))\, P_k + \sum_{k=0}^{N} (\mathbf{n} \cdot ([\mathbf{P}_*]^k \cdot \mathbf{n}))\, P_k.$$

Рассмотрим лицевые поверхности S^+ и S^-. Согласно граничным условиям (3.6), (3.7), на части поверхностей S_u^+ и S_u^- заданы перемещения $\mathbf{u}|_{S_u^+} = \mathbf{u}_*$, $\mathbf{u}|_{S_u^-} = \mathbf{u}_*$, а на S_σ^+ и S_σ^- — напряжения

$$\mathbf{t}^3 \nu_3 \Big|_{S_\sigma^+} = \mathbf{P}_*, \qquad \mathbf{t}^3 \nu_3 \Big|_{S_\sigma^-} = \mathbf{P}_*. \tag{7.5}$$

В последних двух интегралах правой части (7.2) в качестве поверхностных сил выступает величина $\hat{\mathbf{T}}^3 \nu_3 / J$. Поэтому естественно потребовать на S_σ^+ и S_σ^- вместо (7.5) граничные условия

$$\frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \nu_3}{J}\Big|_{S_\sigma^+} = \mathbf{P}_*, \qquad \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \nu_3}{J}\Big|_{S_\sigma^-} = \mathbf{P}_*. \tag{7.6}$$

Пользуясь произволом в выборе вектора $\mathbf{u}$, потребуем, чтобы на лицевых поверхностях S_u^+ и S_u^- выполнялись граничные условия

$$\mathbf{U}''\Big|_{S_u^+} = \mathbf{u}_*, \qquad \mathbf{U}''\Big|_{S_u^-} = \mathbf{u}_*. \tag{7.7}$$

Окончательно с учетом (7.3), (7.4), (7.6), (7.7) равенство (7.2) записывается в виде

$$\text{ЛЧ} = \int\limits_{\Sigma_\sigma} \mathbf{P}'_* \cdot \mathbf{U}' d\sigma^0 + \int\limits_{\Sigma_u} \frac{\hat{\mathbf{T}}^\alpha \cdot \mathbf{U}'_*}{J^0} \nu_\alpha^0 d\sigma^0 + \int\limits_{S_\sigma^+} \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{U}'' dS^+ +$$

$$+ \int\limits_{S_\sigma^-} \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{U}'' dS^- + \int\limits_{S_u^+} \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}_*}{J} \nu_3 dS^+ + \int\limits_{S_u^-} \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}_*}{J} \nu_3 dS^-. \tag{7.8}$$

Сопоставляя левые и правые части равенства (6.2), которые вычисляются по формулам (6.5) и (7.8), получим

$$\int\limits_V \sigma^{ij} E_{ij} dV = \int\limits_{\Sigma_\sigma} \mathbf{P}'_* \cdot \mathbf{U}' d\sigma^0 + \int\limits_{\Sigma_u} \frac{\hat{\mathbf{T}}^\alpha \cdot \mathbf{U}'_*}{J^0} \nu_\alpha^0 d\sigma^0 + \int\limits_{S_\sigma^+} \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{U}'' dS^+ +$$

$$+ \int\limits_{S_\sigma^-} \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{U}'' dS^- + \int\limits_{S_u^+} \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}_*}{J} \nu_3 dS^+ + \int\limits_{S_u^-} \frac{\hat{\mathbf{T}}^3 \cdot \mathbf{u}_*}{J} \nu_3 dS^-. \tag{7.9}$$

Соотношение (7.9) является условием равенства (баланса) работ внешних и внутренних сил.

8. Аппроксимация закона Гука. Закон Гука (3.4) аппроксимируем в виде соотношений

$$\sigma^{ij} = C^{ijks} E_{ks}, \tag{8.1}$$

где E_{ks} — аппроксимации тензора деформаций ε_{ks} (6.4):

$$2E_{\alpha\beta} = \text{э}_\beta \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \text{э}_\alpha \cdot \mathbf{U}'_{,\beta}, \qquad 2E_{3\alpha} = \text{э}_\alpha \cdot \mathbf{U}''_{,3} + \text{э}_3 \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha}, \qquad E_{33} = \text{э}_3 \cdot \mathbf{U}''_{,3}.$$

Представим (8.1) в векторной форме подобно равенствам (3.5): $\mathbf{t}^i = J\sigma^{ij}\text{э}_j = J(\widetilde{C}^{i\alpha} \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \widetilde{C}^{i3} \cdot \mathbf{U}''_{,3})$. Отсюда для коэффициентов рядов (5.3), (5.5) находим

$$[\hat{\mathbf{t}}^i]^k = \frac{1+2k}{2} \int\limits_{-1}^{1} J\,(\widetilde{C}^{i\alpha} \cdot \mathbf{U}'_{,\alpha} + \widetilde{C}^{i3} \cdot \mathbf{U}''_{,3})\, P_k d\xi^3. \tag{8.2}$$

9. Система уравнений для (M,N)-приближения. На основе изложенных выше результатов сформулируем систему двумерных уравнений. Длины соответствующих отрезков рядов определяются заданием двух пар чисел (M,N) и (M^*,N^*). Причем, как следует из (5.10), должны быть выполнены неравенства

$$M^* \geqslant M + 1, \qquad N^* \geqslant N + 1. \tag{9.1}$$

Естественно, исходя из ограничений (9.1), выбрать минимально возможные значения (M^*,N^*). Однако в этом случае задание произвольных условий на лицевых поверхностях может повлиять на дифференциальный порядок уравнений. Причиной этого является условие симметрии тензора напряжений (3.2) $\text{э}_i \times \hat{\mathbf{t}}^i = 0$, которое можно записать в эквивалентной форме $\text{э}_\alpha \times \hat{\mathbf{t}}^\alpha = -h\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{t}}^3$. Умножая последнее равенство скалярно и векторно на $\mathbf{n}$, после преобразований получим

$$\text{э}_\alpha \cdot (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{t}}^\alpha) = 0, \qquad \mathbf{n} \times (\text{э}_\alpha \times \hat{\mathbf{t}}^\alpha) = h\mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{t}}^3 \times \mathbf{n}). \tag{9.2}$$

Рассмотрим второе равенство (9.2), поскольку именно оно содержит величину $\hat{\mathbf{t}}^3$, которая отвечает за задание напряжений на лицевых поверхностях (условие (7.6)). Для простоты ограничимся изучением пластин постоянной толщины, поскольку в более общем случае все рассуждения проводятся аналогично. Для пластин постоянной толщины

$$\text{э}_\alpha = \overset{0}{\text{э}}_\alpha, \qquad \mathbf{n} \cdot \overset{0}{\text{э}}_\alpha = 0. \tag{9.3}$$

Из (9.2), (9.3) следует $\overset{0}{\text{э}}_\alpha \cdot (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{t}}^\alpha) = h\mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{t}}^3 \times \mathbf{n})$, а для коэффициентов рядов по полиномам Лежандра соответственно

$$\overset{0}{\text{э}}_\alpha \cdot (\mathbf{n} \cdot [\hat{\mathbf{t}}^\alpha]^k) = h\mathbf{n} \times ([\hat{\mathbf{t}}^3]^k \times \mathbf{n}). \tag{9.4}$$

Первые производные величин $(\mathbf{n} \cdot [\hat{\mathbf{t}}^\alpha]^k)$ входят в уравнения равновесия (5.2), и параметр k принимает значения от 0 до N. С другой стороны, произведения $\mathbf{n} \times ([\hat{\mathbf{t}}^3]^k \times \mathbf{n})$ входят в ряд для $\mathbf{T}^3$, и параметр k принимает значения от 0 до M^*. Этот ряд определяет граничные условия для напряжений (7.6) на лицевых поверхностях. Следовательно, из (9.4) вытекает, что, для того чтобы задание граничных условий в напряжениях на лицевых поверхностях не влияло на дифференциальный порядок уравнений, необходимо выполнение неравенства

$$M^* \geqslant N + 2. \tag{9.5}$$

Объединяя (9.1) и (9.5), запишем систему неравенств

$$M^* \geqslant M + 1, \qquad N^* \geqslant N + 1, \qquad M^* \geqslant N + 2. \tag{9.6}$$

Выбирая наименьшие значения параметров M^*, N^*, удовлетворяющие неравенствам (9.6), имеем два возможных варианта:

$$M^* = M+1, \qquad N^* = N+1, \qquad \text{если} \quad M \geqslant N+1,$$
$$M^* = N+2, \qquad N^* = N+1, \qquad \text{если} \quad M \leqslant N+1.$$

При $M = N+1$ получим однопараметрическое семейство N-приближений уравнений упругого слоя переменной толщины [3]. Таким образом, длины всех отрезков рядов, входящих в уравнения, определяются заданием двух чисел: M и N. Двумерная система уравнений (M,N)-приближения состоит из:
уравнений равновесия (см. (5.9))

$$\mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{T}}'^{i}_{,i} \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{T}}''^{i}_{,i} \cdot \mathbf{n}) = 0; \tag{9.7}$$

уравнений закона Гука (8.2), записанных в виде рядов (5.3), (5.8),

$$\begin{gathered}
\hat{\mathbf{T}}'^{\alpha} = \sum_{k=0}^{M} P_k \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} J\,(\tilde{C}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{U}'_{,\beta} + \tilde{C}^{\alpha 3} \cdot \mathbf{U}''_{,3})\, P_k d\xi^3, \\
\hat{\mathbf{T}}''^{\alpha} = \sum_{k=0}^{N} P_k \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} J\,(\tilde{C}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{U}'_{,\beta} + \tilde{C}^{\alpha 3} \cdot \mathbf{U}''_{,3})\, P_k d\xi^3, \\
\hat{\mathbf{T}}'^{3} = \hat{\mathbf{T}}''^{3} = \hat{\mathbf{T}}^{*} = \mathbf{n} \times \Big(\sum_{k=0}^{M^*} \overset{(M)}{P_k} \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} J\,(\tilde{C}^{3\beta} \cdot \mathbf{U}'_{,\beta} + \tilde{C}^{33} \cdot \mathbf{U}''_{,3}) \times \mathbf{n} P_k d\xi^3 \Big) + \\
+ \mathbf{n} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{N^*} \overset{(N)}{P_k} \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{1} J\,(\tilde{C}^{3\beta} \cdot \mathbf{U}'_{,\beta} + \tilde{C}^{33} \cdot \mathbf{U}''_{,3}) \cdot \mathbf{n} P_k d\xi^3 \Big);
\end{gathered} \tag{9.8}$$

условий на лицевых поверхностях S^+ и S^- (см. (7.6), (7.7))

$$\mathbf{U}''|_{S_u^+} = u_*, \qquad \mathbf{U}''|_{S_u^-} = u_*, \qquad \frac{\hat{\mathbf{T}}^* \nu_3}{J}\bigg|_{S_\sigma^+} = \mathbf{P}_*, \qquad \frac{\hat{\mathbf{T}}^* \nu_3}{J}\bigg|_{S_\sigma^-} = \mathbf{P}_*. \tag{9.9}$$

Чтобы определить дифференциальный порядок системы уравнений (9.7)–(9.9), проведем аналогично [3] следующие рассуждения. В соотношения деформации — перемещения (6.4) коэффициенты ряда $\mathbf{U}'$ входят вместе со своими частными производными 1-го порядка относительно гауссовых координат ξ^α срединной поверхности S^0, а коэффициенты ряда $(\mathbf{U}'' - \mathbf{U}')$ входят без производных. Соответственно первую группу неизвестных коэффициентов назовем основными, а вторую — дополнительными. Дополнительные неизвестные определяются из уравнений (9.9), которые являются граничными условиями на лицевых поверхностях. Эти уравнения представляют собой систему алгебраических уравнений относительно дополнительных неизвестных, решая которую находим выражения дополнительных неизвестных через основные.

Далее, если внести эти выражения в (9.8), получим формулы, связывающие вектор-функции $\hat{\mathbf{T}}'^{\alpha}$, $\hat{\mathbf{T}}''^{\alpha}$, $\hat{\mathbf{T}}^*$ и основные неизвестные — коэффициенты ряда $\mathbf{U}'$. Эти формулы представляют собой линейные формы относительно коэффициентов ряда $\mathbf{U}'$ и их первых производных.

Если внести выражения для $\hat{\mathbf{T}}'^{\alpha}$, $\hat{\mathbf{T}}''^{\alpha}$, $\hat{\mathbf{T}}^*$ в уравнения равновесия (9.7), то получим систему, состоящую из $2\,(M+1)+N+1$ скалярных уравнений, каждое из которых содержит

$2(M+1)+N+1$ скалярных функций $(\mathbf{n}\times([u]^k\times\mathbf{n})$ $(k=\overline{0,M})$, $[u]^k\cdot\mathbf{n}\,(k=\overline{0,N}))$ и их частные производные до второго порядка включительно. Таким образом, будем иметь систему $2n$-го порядка для определения n функций, где

$$n=2(M+1)+N+1. \tag{9.10}$$

Дифференциальный порядок системы уравнений (M,N)-приближения не зависит от вида граничных условий на лицевых поверхностях: могут задаваться как напряжения, так и перемещения.

При $M=1$ и $N=0$ получаем первое приближение. В этом случае из (9.10) следует, что $n=5$, т. е. количество основных неизвестных равно пяти: трем перемещениям срединной поверхности и двум углам поворота. Соответствующий дифференциальный порядок системы (9.7)–(9.10) равен десяти.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Векуа И. Н.** Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982.
2. **Иванов Г. В.** Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1980.
3. **Алексеев А. Е.** Построение уравнений слоя переменной толщины на основе разложений по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 137–147.
4. **Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М.** Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1988.

Поступила в редакцию 2/III 1995 г.