

МИНИМИЗАЦИЯ ТОЛЩИНЫ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ
ПРИ ЗАДАННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ОТРАЖЕНИЯ
МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

К. А. Лурье, М. М. Мачевариани

(Ленинград)

Задача о поглощении волн в импедансном неоднородном слое хорошо известна в акустике и электродинамике. Практически импедансные системы проектируются с учетом известных оптимальных требований, основным из которых является требование минимальной толщины поглощающего слоя. Соответствующие математические задачи для воздушных поглотителей звука рассматривались при помощи разных искусственных приемов в конце тридцатых годов Г. Д. Малюжиным, который привлек к ним внимание авторов, а также И. В. Свирским в его кандидатской диссертации (МГУ, 1943 г.). Между тем подобные оптимальные проблемы (и более общие) допускают систематическое исследование, если трактовать их как вариационные задачи Майера — Больца. Эта точка зрения является основной в предлагаемой работе, где приводится решение задачи минимизации толщины неоднородного слоя, на который нормально падает плоская монохроматическая волна.

1. Основные уравнения и формулировка оптимальной задачи. Уравнения звукового поля в неоднородной среде, как известно [1], имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0 \quad (1.1)$$

Здесь p — звуковое давление, \mathbf{v} — скорость в звуковой волне, ρ и c — плотность среды и скорость звука в ней. В общем случае ρ и c являются функциями координат.

Рассматривая нормальное падение плоской монохроматической волны¹ на неоднородный слой, свойства которого изменяются лишь с одной координатой, запишем систему уравнений (1.1) так:

$$-i\omega p + \rho c^2 \frac{dv}{dx} = 0, \quad -i\omega v + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0 \quad (1.2)$$

Вводя при помощи соотношения

$$g = -v/p \quad (1.3)$$

вместо колебательной скорости и давления входной адмитанс g , из двух уравнений (1.2) легко получим

$$\frac{dg}{dx} = -i \frac{\omega}{\rho c^2} + i\omega \rho g^2 \quad (1.4)$$

Будем считать, что среда, из которой на неоднородный слой падает плоская волна, характеризуется удельным акустическим сопротивлением $\rho_0 c_0$, а среда (или система сред), находящаяся за неоднородным слоем — входным адмитансом $g^{(0)}$ (фиг. 1).

¹ В данной работе всюду зависимость от времени принята в форме $e^{-i\omega t}$.

Кроме того, предположим, что неоднородность в слое создается искусственно путем направленного изменения ρ_m и c_m исходного материала. Вводя теперь обозначения

$$G = \rho_0 c_0 g, \quad \tau = \frac{\omega}{c_0} x, \quad \frac{\rho_m}{\rho_0} = \rho^\circ, \quad k^2 = \frac{c_0^2}{c_m^2} \quad (1.5)$$

получим вместо (1.4) уравнение для безразмерного входного адмитанса

$$\frac{dG}{d\tau} = -i \frac{k^2}{\rho^\circ} + i \rho^\circ G^2 \quad (1.6)$$

В дальнейшем для квадрата безразмерной постоянной распространения k^2 в неоднородном слое примем обозначение

$$k^2 = 1 + (1 + i\eta) Q(\tau) \quad (1.7)$$

Эта форма записи охватывает целый ряд задач по распространению волн в искусственных акустических средах [2,3]. Считая, наконец, $\rho^\circ = 1$, т. е. полагая, что неоднородность в слое обуславливается лишь изменяющейся с координатой постоянной распространения $k(\tau)$, вместо (1.6) будем иметь систему уравнений для реальной и мнимой частей адмитанса $G = p + iq$:

$$Dp \equiv \frac{dp}{d\tau} - \eta Q + 2pq = 0, \quad Dq \equiv \frac{dq}{d\tau} - p^2 + q^2 + 1 + Q = 0 \quad (1.8)$$

Аналогичная система уравнений может быть легко получена и для случая нормального падения на неоднородный слой плоской электромагнитной волны.

Перейдем к формулировке оптимальной задачи. Фазовые координаты p и q , описывающие поведение системы, удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.8). Положение системы в начальной точке $\tau = 0$ определим равенствами

$$p(0) = p^{(0)}, \quad q(0) = q^{(0)} \quad (1.9)$$

и потребуем, чтобы значения фазовых координат $p(\tau_e)$ и $q(\tau_e)$ при некотором не фиксированном значении $\tau = \tau_e$ были связаны зависимостями

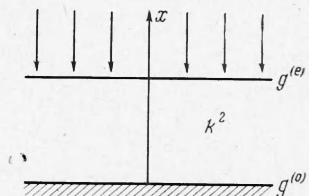
$$\gamma_p \equiv p(\tau_e) - p_l = 0, \quad \gamma_q \equiv q(\tau_e) - q_l = 0 \quad (1.10)$$

Кроме того, будем считать справедливым равенство

$$\psi \equiv Q(N - Q) - v^2 = 0 \quad (1.11)$$

где в соответствии с установившейся терминологией Q и v — функции управления. Причем v является некоторым дополнительным управлением, введенным для того, чтобы существующее в форме неравенства $N \geq Q \geq 0$ ограничение на функцию Q (условие физической осуществимости модели неоднородного слоя) можно было записать в виде эквивалентного равенства (1.11). Этот пункт является принципиальным, так как позволяет свести вариационную задачу на односторонний экстремум к задаче на условный экстремум.

Задачу оптимизации поставим следующим образом. Определить фазовые координаты $p(\tau)$ и $q(\tau)$, удовлетворяющие уравнениям (1.8) и начальным условиям (1.9), и параметры управления Q и v , связанные ра-



Фиг. 1

венством (1.14), так, чтобы при выполнении условий (1.10) функционал

$$J = \tau_e \quad (1.12)$$

принимал минимальное значение. Из-за наличия ограничений, накладываемых на управление Q , допускаются конечные разрывы непрерывности производных фазовых координат $dp/d\tau$ и $dq/d\tau$ в изучаемом интервале $0 \leq \tau \leq \tau_l$. Функции $p(\tau)$ и $q(\tau)$ считаются непрерывными на всем интервале.

2. Необходимые условия стационарности функционала. Эти условия получаются, как обычно, из рассмотрения первой вариации выражения

$$I = J + \int_0^{\tau_l} [\lambda_p Dp + \lambda_q Dq - \mu\psi] d\tau + \chi_p \gamma_p + \chi_q \gamma_q \quad (2.1)$$

в котором $\lambda_p(\tau)$, $\lambda_q(\tau)$, $\mu(\tau)$, χ_p и χ_q — неопределенные множители Лагранжа. Правая часть (2.1) равными нулю слагаемыми отличается от J , так что условия стационарности J и I совпадают. В каждом подынтервале между переключениями (скачкообразными изменениями функции Q) имеем систему (1.8), соотношение (1.11), уравнения

$$\frac{d\lambda_p}{d\tau} = 2q\lambda_p - 2p\lambda_q, \quad \frac{d\lambda_q}{d\tau} = 2p\lambda_p + 2q\lambda_q \quad (2.2)$$

$$\eta\lambda_p - \lambda_q + \mu(N - 2Q) = 0, \quad 2\mu\nu = 0 \quad (2.3)$$

краевые условия для функций λ_p и λ_q

$$\begin{aligned} \lambda_p(\tau_l) + \frac{\partial}{\partial p(\tau_l)} [J + \chi_p \gamma_p + \chi_q \gamma_q] &= 0 \\ \lambda_q(\tau_l) + \frac{\partial}{\partial q(\tau_l)} [J + \chi_p \gamma_p + \chi_q \gamma_q] &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

и равенство

$$\frac{d}{d\tau_l} [J + \chi_p \gamma_p + \chi_q \gamma_q] = 0 \quad (2.5)$$

В точках переключения должны быть непрерывны фазовые координаты $p(\tau)$ и $q(\tau)$ и выполняться следующие условия Эрдмана — Вейерштрасса:

$$\begin{aligned} \lambda_p^-(\tau_M) = \lambda_p^+(\tau_M), \quad \lambda_q^-(\tau_M) = \lambda_q^+(\tau_M) \\ \left[\lambda_p^- \frac{dp^-}{d\tau} + \lambda_q^- \frac{dq^-}{d\tau} - \lambda_p^+ \frac{dp^+}{d\tau} - \lambda_q^+ \frac{dq^+}{d\tau} \right]_{\tau=\tau_M} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Исключая из (2.4) и (2.5) множители χ_p и χ_q , с учетом (1.10) и (1.12) получаем

$$\lambda_p(\tau_e) \frac{dp(\tau_e)}{d\tau_e} + \lambda_q(\tau_e) \frac{dq(\tau_e)}{d\tau_e} = 1 \quad (2.7)$$

Если правая часть уравнений (1.8) и соотношение (1.11) явно не зависит от τ , то равенство (2.7) сохраняется для любых значений τ , представляя собой в этом случае первый интеграл уравнений (1.8) и (2.2)

$$\begin{aligned} H = H_\lambda + H_\mu &\equiv \lambda_p[\eta Q - 2pq] + \\ &+ \lambda_q[-1 - Q + p^2 - q^2] + \mu\psi = 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Экстремальные частичные дуги. Из (2.3) видно, что второму уравнению можно удовлетворить, положив либо $\mu = 0$ (так называемое особое управление), либо $\nu = 0$. Особое управление определяет те участки оптимальной траектории на плоскости адмитанса, нахождения которых, как это легко видеть, фактически не связано с наличием ограничений на управление Q . Действительно, из первого уравнения (2.3) в этом случае вытекает, что

$$\eta\lambda_p - \lambda_q = 0 \quad (3.1)$$

Но тогда из системы (2.2) следует, что $p(\tau)$ тождественно равно нулю, что в соответствии с первым уравнением (1.8) влечет за собой равенство нулю и функции $Q(\tau)$.

К другим участкам экстремального адмитанс-годографа приводит случай $\nu = 0$. Из (1.11) вытекает, что при этом $Q(\tau)$ равно либо 0, либо N максимально возможной величине).

Таким образом, экстремальные дуги являются годографами, отвечающими постоянным значениям волнового числа. В этом случае система (1.8) легко интегрируется и имеем

$$p + iq = \frac{p_0 + iq_0 - i \sqrt{1 + (1 + i\eta)Q} + \operatorname{tg} [\tau \sqrt{1 + (1 + i\eta)Q}]}{1 - i(p_0 + iq_0) [\sqrt{1 + (1 + i\eta)Q}]^{-1} + \operatorname{tg} [\tau \sqrt{1 + (1 + i\eta)Q}]} \quad (3.2)$$

Здесь $Q = 0$; N , а (p_0, q_0) — точка на плоскости адмитанса, соответствующая началу изменения τ на любом подынтервале, внутри которого Q сохраняет свое значение неизменным. Легко видеть, что система (2.2) для множителей Лагранжа λ_p и λ_q тоже может быть проинтегрирована в конечном виде. Однако в рассматриваемом случае нет надобности получать явные выражения для этих множителей, так как минимальная толщина слоя τ_l и оптимальный адмитанс-годограф могут быть найдены с использованием лишь значений p и q (3.2). Это связано с тем, что имеется только по одному переключению для управляющей функции $Q(\tau)$ в областях $\Phi \geq 0$ (см. ниже). Для доказательства этого последнего утверждения поступим аналогично тому, как это делается в теории оптимальных систем [4].

4. Последовательности экстремальных частичных дуг. Перепишем первый интеграл (2.8) в виде

$$H_\lambda \equiv KQ - 2pq\lambda_p + (p^2 - q^2 - 1)\lambda_q = 1 \quad (4.1)$$

где

$$K = \frac{\partial H_\lambda}{\partial Q} = \eta\lambda_p - \lambda_q \quad (4.2)$$

Так как в точке переключения должны быть непрерывными как фазовые координаты p, q , так и множители Лагранжа λ_p и λ_q , то из (4.1) заключаем, что значение первого интеграла в точке переключения не изменится лишь в том случае, если функция «переключения» K в этой точке будет равна нулю (так как Q здесь изменится скачком). Из определения функции K (4.2) в соответствии с принципом максимума следует, что при оптимальных управлениях функционал H_λ достигает максимума при $Q = N$, если $K > 0$ и при $Q = 0$, если $K < 0$. Таким образом, по знаку функции переключения можем судить, соответствует ли оптимальная частичная дуга значению $Q = 0$ или $Q = N$. Зная же поведение функции переключения в окрестности точки переключения, можно определить, какое переключение имело место: с $Q = 0$ на $Q = N$ или наоборот.

Для этого, используя (4.2) и (2.2) и выражение для первого интеграла в форме (4.1), получим следующее дифференциальное уравнение для функции переключения:

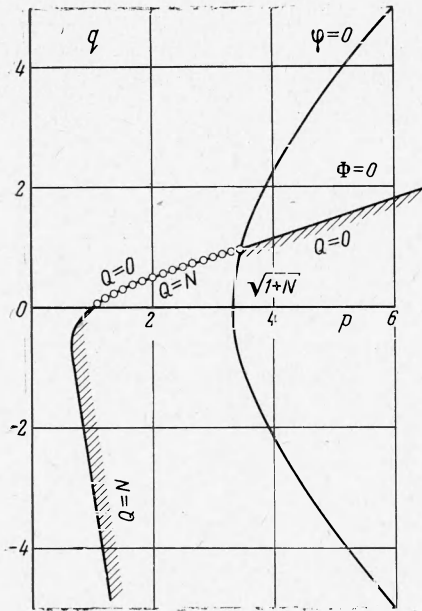
$$\frac{1}{2} \frac{dK}{d\tau} = \left[q - \frac{p}{\eta} - \frac{p(1+\eta^2)(Q - 2\eta^{-1}pq)}{\Phi} \right] K + \frac{(1+\eta^2)p}{\Phi} \quad (4.3)$$

где

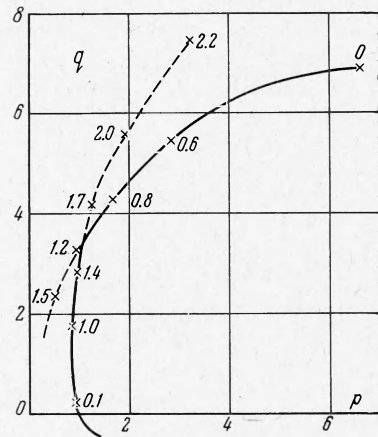
$$\Phi = 2pq + \eta(1 + p^2 - q^2) \quad (4.4)$$

Представляя функцию K в окрестности точки переключения рядом Тейлора, с учетом (2.6) и (2.7) из этого уравнения можно получить для оптимальных дуг с максимальным и нулевым значением Q следующие условия:

$$\frac{(1+\eta^2)p}{\Phi} (\tau - \tau_M) \geq 0 \quad (4.5)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Так как по физическому смыслу p не может быть отрицательным, то из (4.5) заключаем, что на плоскости адмитанса в области, где $\Phi > 0$, возможны лишь переходы функции Q с 0 на N , и наоборот, если $\Phi < 0$. А отсюда следует, что экстремальный адмитанс-годограф содержит только по одной точке переключения в каждой области, а именно: в области $\Phi > 0$ с 0 на N , в области $\Phi < 0$ — с N на 0¹. Пересечение экстремальными адмитанс-годографами границы этих областей происходит следующим образом. Из условия конечности функции переключения при помощи уравнения (4.3) получаем выражение для K в точках, принадлежащих гиперболе $\Phi = 0$

$$K = \frac{1}{Q - 2\eta^{-1}pq} \quad (4.6)$$

Пользуясь принципом максимума, находим из (4.6), что оптимальный адмитанс-годограф, отвечающий решению системы (1.8) при $Q = N$, мо-

¹ Понятно, что в случае, если фазовая точка на плоскости адмитанса, начав свое движение в какой-то области, вновь возвращается в нее, то может произойти второе переключение в этой области, но опять таки в дозволённом неравенством (4.5) порядке.

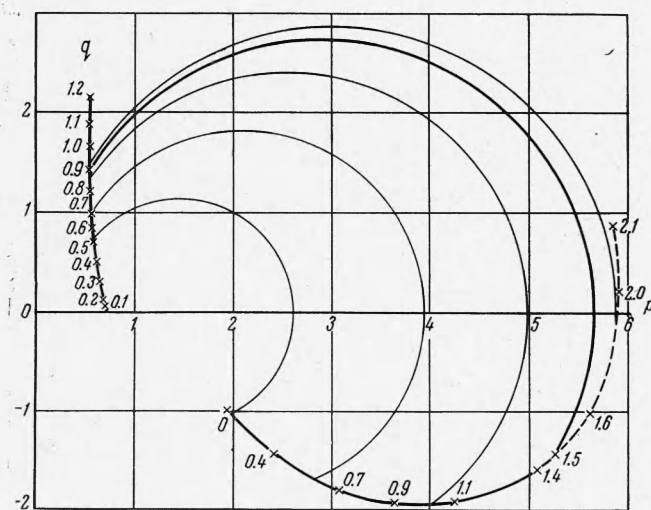
жет пересекать гиперболу лишь в точках, для которых справедливо неравенство:

$$2pq = \eta (-1 + p^2 - q^2) \leq \eta N \quad (4.7)$$

Аналогичным образом устанавливаем, что частичные дуги оптимального адмитанс-годографа, для которого $Q = 0$, переходят границу областей $\Phi \geq 0$ в точках

$$2\eta^{-1} pq < 0, \text{ т. е. } q > 0 \quad (4.8)$$

Неравенства (4.7) и (4.8), таким образом, показывают, что оптимальные переходы из области $\Phi > 0$ в область $\Phi < 0$ (или наоборот) вдоль адмитанс-годографов, отвечающих максимальным и минимальным значениям постоянной распространения, могут происходить лишь на определенных участках границы этих областей, т. е. так, как это изображено на фиг. 2, где эти участки выделены штриховкой и на них указаны соответствующие значения Q , при которых могут совершаться эти переходы.



Фиг. 4

В заключение остановимся на двух примерах построения оптимальных неоднородных слоев, соответствующих экстремальным годографам, проходящим через точки (6.6, 7), (1,0) и (2, -1), (1,0).

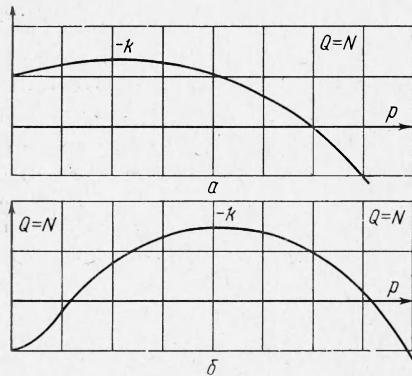
В первом случае адмитанс-годограф целиком расположен в области $\Phi > 0$, во втором же годограф начинается в точке (2, -1) области $\Phi < 0$, переходит через гиперболу $\Phi = 0$ и заканчивается в точке (1, 0). Обе задачи легко решаются графически, как это показано на фиг. 3 и 4. Действительно, построим годограф, проходящий через точку (1, 0), с помощью интегрирования системы (1.8) в обратном порядке при $Q = N$ и годограф

$$|\beta| = \text{const} \quad \left(|\beta| = \frac{(1-p)^2 + q^2}{(1+p)^2 + q^2} \right)$$

проходящий через точку (6.6, 7).

Находя графически точку пересечения этих годографов, определим искомые толщины двух однородных слоев по формуле (3.2). Вдоль всякой кривой $Q = N$ или $Q = 0$ на фиг. 3 и 4 отложены масштабные метки, соответствующие приведенным толщинам слоев. Вычисления велись по формуле (3.2) при $Q = N$ и $Q = 0$.

Во втором примере помимо годографа, выходящего из точки $(1, 0)$, нужно построить аналогичный годограф, который начинается в точке $(+2; -1)$, изображающей адмиттанс нагрузки. В этом случае, как легко видеть из фиг. 4, существует целое семейство



Фиг. 5

экстремальных годографов, состоящих из последовательностей дуг, отвечающих решениям системы (1.8) при $Q = N$, $Q = 0$, $Q = N$. Оптимальным будет тот, для которого толщина неоднородного слоя, состоящего теперь в общем случае из трех однородных слоев, будет минимальной. Нахождение этого годографа производится графически просто подбором соответствующей окружности $|\beta| = \text{const}$ (фиг. 4).
Разумеется, эти же задачи весьма эффективно можно решать и при помощи электронных машин. Для этого необходимо интегрировать уравнения системы (1.8) для p и q при условиях (1.9), а также уравнения (2.2) для множителей Лагранжа λ_p и λ_q . При этом последовательности значений Q в уравнениях (1.8) устанавливаются автоматически в зависимости от поведения функции переключения $K = \lambda_p - \lambda_q$. Основная трудность заключается в том, что в начале интегрирования значения для λ_p и λ_q заранее не известны. Их приходится определять подбором до тех пор, пока в результате интегрирования систем (1.8) и (2.2) не будет удовлетворяться условие (4.1) и условие (1.9) в конце интервала. Фактически необходимо подобрать лишь отношение λ_p / λ_q , так как моменты переключения (скачкообразного изменения функции Q) определяются нулевыми значениями функции переключения, положения которых не зависят от умножения ее на произвольную константу. На фиг. 5 в качестве иллюстрации такой возможности приведены результаты решения тех же двух задач на моделирующей машине МН-8.

Поступила 1 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Б р е х о в с к и х Л. М. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. Ц в и к к е р К., К о с т е н К. Звукопоглощающие материалы. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
3. С к у ч и к Е. Основы акустики. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
4. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. М., «Наука», 1965.