

УДК 532.526.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, НАПОЛОВИНУ ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ПОЛОСТЬ

Ю. В. Пивоваров

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: pivov@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача о плоскопараллельном стационарном движении маловязкой несжимаемой жидкости, наполовину заполняющей вращающуюся цилиндрическую полость. На границе жидкости с твердой стенкой ставится условие проскальзывания Навье, а на свободной границе — условие отсутствия касательных напряжений. Уравнение пограничного слоя, рассматриваемого на всей границе полукруга в качестве единого целого, путем замены переменной сводится к уравнению теплопроводности. Решение задачи строится в виде ряда, при этом угловые пограничные слои не рассматриваются. Проводятся расчеты и сравнение с решением, построенным ранее с помощью метода конечных разностей.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, уравнения Навье — Стокса, условие проскальзывания, слабый пограничный слой, завихренность, функция тока.

DOI: 10.15372/PMTF20210203

Введение. В работе [1] рассматривалась задача о плоскопараллельном стационарном движении маловязкой жидкости, наполовину заполняющей вращающийся цилиндр. Данная задача может применяться для описания метода очистки полупроводникового материала с помощью горизонтальной зонной плавки (см. также работы [2, 3]). На границе с твердой стенкой, имеющей форму полуокружности, ставилось условие проскальзывания Навье, на свободной границе, являющейся диаметром круга, — условие отсутствия касательных напряжений. Искомыми являлись завихренность и функция тока в области течения, а также форма возмущенной движением жидкости свободной границы. Задача решалась с использованием метода конечных разностей. Поскольку в задачу входит малый параметр при старшей производной, для достижения необходимой точности сетка в области течения существенно измельчалась, вследствие чего время расчета было очень большим.

В настоящей работе данная задача решается аналитически с использованием метода пограничного слоя (ПС). Решение задачи записывается в виде ряда, однако при этом не учитываются угловые ПС. Использование данного метода позволяет уменьшить время расчета приблизительно в 30 раз по сравнению со случаем использования метода конечных разностей.

1. Постановка задачи. Пусть xOy — декартова система координат. Ось Ox направлена по горизонтали вправо, ось Oy — по вертикали вверх. Область течения D ограни-

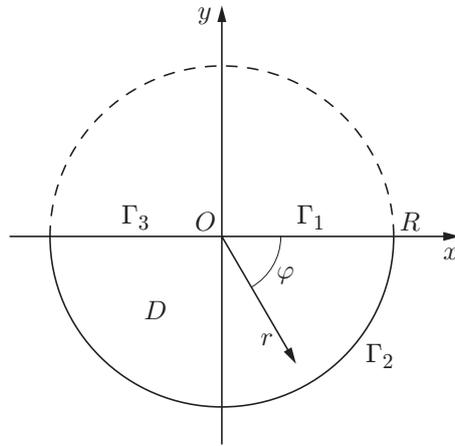


Рис. 1. Схема задачи

чена линиями $\Gamma_1 = \{(x, y): y = 0, x \in [0, R]\}$, $\Gamma_2 = \{(x, y): x \in [-R, R], y = -\sqrt{R^2 - x^2}\}$, $\Gamma_3 = \{(x, y): y = 0, x \in [-R, 0]\}$. (Здесь $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$ — свободная граница; Γ_2 — граница жидкости с твердой стенкой (рис. 1).) В работе [1] задача ставилась для расчета движения расплава германия со следующими размерными параметрами: $R = 0,01$ м — радиус цилиндра; $\rho = 5571$ кг/м³ — плотность расплава; $\nu = 1,35 \cdot 10^{-7}$ м²/с — кинематическая вязкость расплава; $\sigma = 0,6$ Н/м — его поверхностное натяжение; $g_0 = 9,81$ м/с² — ускорение свободного падения; $V_0 = 0,6$ м/с — скорость вращательного движения стенок цилиндра; $U_0 \approx 0,06$ м/с — приблизительное максимальное значение скорости движения частиц расплава в области D ; k_0 — коэффициент проскальзывания.

Безразмерными критериями подобия являются формальное (входящее в уравнения) число Рейнольдса $Re = V_0 R / \nu = 45\,000$, реальное число Рейнольдса $Re_R = Re u_{\max}$ ($u_{\max} \approx 0,1$ — заранее неизвестная максимальная безразмерная скорость частиц расплава), безразмерный коэффициент проскальзывания $\alpha^0 = k_0 R / (\rho \nu) = 0,2$ [1,2], формальное число Фруда $Fr = V_0^2 / (g_0 R) = 3,6$, реальное число Фруда $Fr_R = Fr u_{\max}^2 \approx 0,036$, число Бонда $Bo = \rho g_0 R^2 / \sigma = 9$.

Пусть u, v — компоненты вектора скорости по осям x, y . Введем функцию тока Ψ и завихренность ω по формулам

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1)$$

Обозначим через $y = f(x)$ ($x \in [-1, 1]$) функцию, описывающую форму свободной границы, определяемую движением расплава (в состоянии покоя $f(x) \equiv 0$).

Выполним замену переменных

$$x = R\tilde{x}, \quad y = R\tilde{y}, \quad f = R\tilde{f}, \quad u = V_0\tilde{u}, \quad v = V_0\tilde{v}, \quad \Psi = V_0 R\tilde{\Psi}, \quad \omega = (V_0/R)\tilde{\omega},$$

где знак “ \sim ” соответствует безразмерным переменным и далее опускается.

Задача для определения функций Ψ, ω в безразмерных переменных ставится следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = Re \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right), \quad (x, y) \in D; \quad (3)$$

$$\Psi|_{\Gamma \cup \Gamma_2} = 0; \quad (4)$$

$$\omega|_{\Gamma} = 0; \quad (5)$$

$$\omega|_{\Gamma_2} = -(2 - \alpha^0) \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} - \alpha^0. \quad (6)$$

Здесь выражение (2) является следствием (1), формула (3) представляет собой уравнение импульса [4], (4) — условие непротекания, (5) — условие отсутствия касательных напряжений на свободной границе, (6) — условие проскальзывания Навье, означающее, что касательные напряжения пропорциональны разности касательных к Γ_2 скоростей частиц жидкости и твердой стенки с коэффициентом $-k_0$. Изначально в размерных переменных это условие имеет вид

$$\mathbf{s} \cdot P \cdot \mathbf{n} = -k_0(\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} - V_0), \quad (x, y) \in \Gamma_2, \quad (7)$$

где \mathbf{s} , \mathbf{n} — единичные векторы касательной и нормали к твердой стенке, образующие положительно ориентированную систему векторов; P — тензор напряжений; $\mathbf{u} = (u, v)$ — вектор скорости частиц жидкости. Можно показать, что левая часть (7) равна

$$\mathbf{s} \cdot P \cdot \mathbf{n} = -\rho\nu \left(\omega + \frac{2}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и переходя к безразмерным переменным, получаем выражение (6).

Задача определения формы свободной границы, описываемой функцией $y = f(x)$, $x \in [-1, 1]$, имеет вид [5, 6]

$$f(x) - \frac{1}{\text{Bo}} f''(x) = \Phi(x) + f_0, \quad x \in [-1, 1]; \quad (9)$$

$$f'(x)|_{x=-1} = -f(-1), \quad f'(x)|_{x=1} = f(1); \quad (10)$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0; \quad (11)$$

$$\Phi(x) = \left[-\frac{\text{Fr}}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \left(\int_0^x \frac{\partial \omega}{\partial y} d\tilde{x} - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right) \right] \Big|_{y=0}. \quad (12)$$

Здесь (9) представляет собой условие капиллярного равновесия, (10) — условия контакта свободной границы и твердой стенки под углом $\pi/2$, (11) — закон сохранения массы, f_0 — константа, подлежащая определению.

2. Определение функции тока в области D и скорости на границе. Согласно [7] при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности значения завихренности внутри области течения с замкнутыми линиями тока стремятся к константе, которая в случае вращения стенок цилиндра по часовой стрелке меньше нуля:

$$\omega \rightarrow \omega_0 = -\gamma^2.$$

Введем полярные координаты φ, r по формулам (см. рис. 1)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = -r \sin \varphi. \quad (13)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arccos(x/r). \quad (14)$$

Система координат (φ, r) является положительно ориентированной. Задача для функции тока принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = \gamma^2, \quad (\varphi, r) \in D, \quad \Psi|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0. \quad (15)$$

Решение задачи (15) записывается в виде

$$\Psi(r, \varphi) = \gamma^2 \int_0^1 dr_1 \int_0^\pi G(r, \varphi, r_1, \varphi_1) d\varphi_1,$$

где G — функция Грина для уравнения Пуассона в области D :

$$G(r, \varphi, r_1, \varphi_1) = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{(r^2 r_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1) + 1)(r^2 - 2rr_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + r_1^2)}{(r^2 r_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi + \varphi_1) + 1)(r^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1) + r_1^2)} =$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \left((rr_1)^i - \left(\frac{r_1}{r}\right)^i \right) \frac{\sin(i\varphi) \sin(i\varphi_1)}{\pi i}, & r \geq r_1, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left((rr_1)^i - \left(\frac{r}{r_1}\right)^i \right) \frac{\sin(i\varphi) \sin(i\varphi_1)}{\pi i}, & r < r_1. \end{cases}$$

Результаты вычислений показывают, что

$$\Psi = -\frac{4\gamma^2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(r^2 - r^{2i-1}) \sin((2i-1)\varphi)}{(2i-3)(2i-1)(2i+1)} \leq 0.$$

Введем длину пути s , пройденного при обходе границы области D по часовой стрелке от начала координат до заданного значения:

$$\Gamma_1: \quad s = r \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad s \in [0, 1],$$

$$\Gamma_2: \quad s = 1 + \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi] \quad \Rightarrow \quad s \in [1, 1 + \pi],$$

$$\Gamma_3: \quad s = 2 + \pi - r, \quad -r \in [-1, 0] \quad \Rightarrow \quad s \in [1 + \pi, 2 + \pi].$$

Выражения для компонент вектора скорости имеют вид

$$u_\varphi = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}.$$

На границе области D эти компоненты вычисляются по формулам

$$\Gamma_1: \quad u_r = \frac{4\gamma^2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r - r^{2i-2}}{(2i-3)(2i+1)}, \quad \Gamma_2: \quad u_\varphi = \frac{4\gamma^2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin((2i-1)\varphi)}{(2i-1)(2i+1)},$$

$$\Gamma_3: \quad u_r = -\frac{4\gamma^2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r - r^{2i-2}}{(2i-3)(2i+1)}.$$

Для компонент касательной к границе области D скорости u_s можно записать

$$u_s(s) = \begin{cases} u_r, & s \in [0, 1], \\ u_\varphi, & s \in [1, 1 + \pi], \\ -u_r, & s \in [1 + \pi, 2 + \pi]. \end{cases}$$

Введем величину u_0 по формуле

$$u_s = \gamma^2 u_0. \quad (16)$$

Тогда

$$u_0(s) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s - s^{2i-2}}{(2i-3)(2i+1)}, & s \in [0, 1], \\ \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin((2i-1)(s-1))}{(2i-1)(2i+1)}, & s \in [1, 1+\pi], \\ \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2+\pi-s-(2+\pi-s)^{2i-2}}{(2i-3)(2i+1)}, & s \in [1+\pi, 2+\pi]. \end{cases} \quad (17)$$

Таким образом, искомая зависимость касательной скорости от параметра s задается формулами (16), (17).

3. Определение вихревого пограничного слоя. Малым параметром при решении задачи является толщина ПС $\varepsilon = 1/\sqrt{\text{Re}}$.

Рассмотрим ПС, сходящийся со свободной границы. Пусть внутренняя переменная данного ПС имеет вид

$$\delta = \delta_1 = -y/\varepsilon > 0. \quad (18)$$

Тогда

$$y = -\varepsilon\delta, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \delta}. \quad (19)$$

Запишем задачу (1), (3), (5), (6) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (20)$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y}; \quad (21)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (x, y) \in D; \quad (22)$$

$$\omega|_{\Gamma \cup \Gamma_2} = -(2K_0(s) - \alpha(s))\gamma^2 u_0(s) - \alpha(s); \quad (23)$$

$$v|_{\Gamma} = 0. \quad (24)$$

Здесь (20) представляет собой уравнение неразрывности, (21) — уравнение импульса, (22) — выражение для завихренности, содержащее компоненты скорости, (23) — обобщенное условие проскальзывания, которое выполняется не только на границе Γ_2 , но и на границе Γ ; (24) — условие непротекания; $K_0(s)$, $\alpha(s)$ — кусочно-постоянные функции:

$$K_0(s) = \begin{cases} 0, & s \in [0, 1] \cup [1+\pi, 2+\pi], \\ 1, & s \in [1, 1+\pi], \end{cases} \quad \alpha(s) = \begin{cases} 0, & s \in [0, 1] \cup [1+\pi, 2+\pi], \\ \alpha^0, & s \in [1, 1+\pi]. \end{cases} \quad (25)$$

Представим u , v в виде асимптотических рядов:

$$u = \gamma^2(u_0^1(s, \delta) + \varepsilon u_1(s, \delta) + \dots); \quad (26)$$

$$v = \gamma^2(\varepsilon v_0(s, \delta) + \varepsilon^2 v_1(s, \delta) + \dots). \quad (27)$$

Подставляя (26), (27) в (20), с учетом (19) получаем

$$\frac{\partial u_0^1}{\partial s} - \frac{\partial v_0}{\partial \delta} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{\partial v_1}{\partial \delta} \right) + \dots = 0. \quad (28)$$

Используя формулу (22) и учитывая (26), (27), находим

$$\omega = \gamma^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_0^1}{\partial \delta} + \frac{\partial u_1}{\partial \delta} + \dots \right). \quad (29)$$

Из ограниченности ω при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует

$$\frac{\partial u_0^1}{\partial \delta} = 0.$$

Отсюда имеем

$$u_0^1(s, \delta) = u_0(s). \quad (30)$$

Функция (30) задается внешним асимптотическим разложением и вычисляется по формуле (17).

Установим связь между функциями u_0 и v_0 . Из соотношений (24), (28), (30) следует

$$\frac{\partial v_0(s, \delta)}{\partial \delta} = u_0'(s), \quad v_0(s, 0) = 0$$

(штрих означает дифференцирование по s), поэтому

$$v_0(s, \delta) = \delta u_0'(s). \quad (31)$$

Из (29), (30) следует, что главный член асимптотического разложения для ω имеет вид

$$\omega = \gamma^2 F(s, \delta), \quad (32)$$

где

$$F(s, \delta) = \frac{\partial u_1(s, \delta)}{\partial \delta}. \quad (33)$$

Из соотношений (19), (21), (31), (32), (33) получаем уравнение для F

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \delta^2} = \gamma^2 \left(u_0(s) \frac{\partial F}{\partial s} - \delta u_0'(s) \frac{\partial F}{\partial \delta} \right). \quad (34)$$

Выполнив замену [8]

$$z = \delta u_0(s), \quad F(s, z/u_0(s)) = F_1(s, z), \quad F_1(s, \delta u_0(s)) = F(s, \delta), \quad (35)$$

уравнение (34) представим в виде

$$u_0(s) \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = \gamma^2 \frac{\partial F_1}{\partial s}.$$

Выполнив еще одну замену [8]

$$\zeta = \int_0^s u_0(s_1) ds_1, \quad F_1(s, z) = F_2 \left(\int_0^s u_0(s_1) ds_1, z \right) = F_2(\zeta, z), \quad (36)$$

получаем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} = \gamma^2 \frac{\partial F_2}{\partial \zeta}. \quad (37)$$

Из (23), (32) следует граничное условие для функции F_2

$$\gamma^2 F_2(\zeta(s), 0) = -\gamma^2 A(s) - \alpha(s), \quad (38)$$

где

$$A(s) = (2K_0(s) - \alpha(s))u_0(s). \quad (39)$$

С использованием (36) определим функцию $\zeta(s)$:

$$\zeta(s) = \int_0^s u_0(s_1) ds_1. \quad (40)$$

Подставляя (17) в (40) и проводя интегрирование, получаем

$$\zeta(s) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s^{2i-1}}{(2i-3)(2i-1)(2i+1)}, & s \in [0, 1], \\ \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos((2i-1)(s-1))}{(2i-1)^2(2i+1)}, & s \in [1, 1+\pi], \\ \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2+\pi-s)^{2i-1}}{(2i-3)(2i-1)(2i+1)}, & s \in [1+\pi, 2+\pi], \end{cases} \quad (41)$$

где

$$\zeta(0) = 0, \quad \zeta(1) = \frac{1}{\pi}, \quad \zeta(1+\pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}, \quad \zeta(2+\pi) = \frac{\pi}{2}. \quad (42)$$

Соотношения (41), (42) получены с использованием формул

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-3)(2i+1)} = 0, \quad -\frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-3)(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{\pi},$$

$$\frac{8}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2(2i+1)} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}.$$

Пусть

$$\zeta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2+\pi} u_0(s_1) ds_1 = \frac{1}{4}, \quad \zeta(s) = \int_0^s u_0(s_1) ds_1. \quad (43)$$

Тогда

$$\zeta(s)/\zeta_0 \in [0, 2\pi].$$

Обозначая

$$A^1(\zeta(s)) = A(s), \quad \alpha^1(\zeta(s)) = \alpha(s),$$

разложим функции $A^1(\zeta)$, $\alpha^1(\zeta)$ в ряды Фурье:

$$A^1(\zeta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\zeta}{\zeta_0}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\zeta}{\zeta_0}\right) \right), \quad (44)$$

$$\alpha^1(\zeta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos \left(\frac{k\zeta}{\zeta_0} \right) + \beta_k \sin \left(\frac{k\zeta}{\zeta_0} \right) \right). \quad (45)$$

Коэффициенты α_k, β_k, b_k определяются аналитически:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha^0}{\pi\zeta_0} \int_{\zeta(1)}^{\zeta(1+\pi)} d\zeta = \frac{4\alpha^0}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \right); \quad (46)$$

$$\alpha_k = \frac{\alpha^0}{\pi\zeta_0} \int_{\zeta(1)}^{\zeta(1+\pi)} \cos \left(\frac{k\zeta}{\zeta_0} \right) d\zeta = -\frac{2\alpha^0}{\pi k} \sin \left(\frac{4k}{\pi} \right), \quad k = \overline{1, \infty}; \quad (47)$$

$$\beta_k = 0, \quad b_k = 0, \quad (48)$$

коэффициенты a_k — численно:

$$a_k = \frac{1}{\pi\zeta_0} \int_1^{1+\pi} A(s) \cos \left(\frac{k\zeta(s)}{\zeta_0} \right) u_0(s) ds, \quad k = \overline{0, \infty}. \quad (49)$$

Условие согласования решения с внешним асимптотическим разложением имеет вид

$$\gamma^2 F_2(\zeta(s), \infty) = -\gamma^2 = \omega_0. \quad (50)$$

Решение задачи (37), (38), (50) находим в виде ряда

$$\gamma^2 F_2(\zeta, z) = -\frac{\gamma^2 a_0 + \alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} [(\gamma^2 a_k + \alpha_k) F_{kc}(\zeta, z) + (\gamma^2 b_k + \beta_k) F_{ks}(\zeta, z)], \quad (51)$$

где

$$F_{kc} = \exp \left(-\sqrt{\gamma^2 k / (2\zeta_0)} z \right) \cos \left(-\sqrt{\gamma^2 k / (2\zeta_0)} z + k\zeta / \zeta_0 \right); \quad (52)$$

$$F_{ks} = \exp \left(-\sqrt{\gamma^2 k / (2\zeta_0)} z \right) \sin \left(-\sqrt{\gamma^2 k / (2\zeta_0)} z + k\zeta / \zeta_0 \right). \quad (53)$$

Из условия (50) получаем $-\gamma^2 = -(\gamma^2 a_0 + \alpha_0)/2$, или

$$\gamma^2 = \frac{\alpha_0}{2 - a_0}. \quad (54)$$

Завихренность в ПС, сходящем со свободной границы, определяется следующим образом:

$$\omega_1(x, y) = \gamma^2 F_2(\zeta(s), \delta_1 u_0(s)).$$

Величина γ^2 определяется формулой (54), F_2 — формулой (51), F_{kc}, F_{ks} — формулами (52), (53), z — первой формулой (35), δ_1 — формулой (18), $u_0(s)$ — формулой (17), s — формулой

$$s = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 2 + \pi + x, & x < 0, \end{cases}$$

ζ — формулами (41), (42), $\alpha_k, \beta_k, a_k, b_k$ — формулами (46)–(49), ζ_0 — первой формулой (43).

ПС, сходящий с твердой стенки, вычисляется по формуле

$$\omega_2(r, \varphi) = \gamma^2 F_2(\zeta(s), \delta_2 u_0(s)), \quad (55)$$

где $\delta_2 = (1 - r)/\varepsilon$ — внутренняя переменная второго ПС. (Переменные r, φ связаны с переменными x, y преобразованиями (13), (14).)

При построении ПС переменная δ заменяется на δ_2 , а переменная s определяется по формуле

$$s = 1 + \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Остальные переменные и функции те же, что при определении первого ПС.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При объединении двух ПС постоянное слагаемое $-\gamma^2$ учитывается один раз, чтобы при $\delta_j \rightarrow \infty, j = 1, 2$ оба ПС выходили на данную константу (см. формулу (50)).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При построении второго ПС из уравнения импульса исключается член $r^{-1} \partial\omega/\partial r$, так как данный член мал по сравнению с членом $\partial^2\omega/\partial r^2$.

4. Определение формы свободной границы. При определении формы свободной границы удобно отсчитывать длину s пройденного пути при обходе границы области D по часовой стрелке не от начала координат, а от левой угловой точки области:

$$\Gamma: \quad s = x \in [-1, 1] \quad \Rightarrow \quad s \in [-1, 1],$$

$$\Gamma_2: \quad s = 1 + \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi] \quad \Rightarrow \quad s \in [1, 1 + \pi].$$

Тогда

$$u_0(s) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s| - s^{2i-2}}{(2i-3)(2i+1)}, & s \in [-1, 1], \\ \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin((2i-1)(s-1))}{(2i-1)(2i+1)}, & s \in [1, 1 + \pi]. \end{cases} \quad (56)$$

Из (16), (56) следует, что максимальная скорость на свободной границе равна

$$u_{\max} = \gamma^2 u_0(0) = 4\gamma^2/(3\pi). \quad (57)$$

Используя формулу (40) для $\zeta(s)$, из (56) получаем

$$\zeta(s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s^{2i-1}}{(2i-3)(2i-1)(2i+1)}, & s \in [-1, 1], \\ \frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos((2i-1)(s-1))}{(2i-1)^2(2i+1)}, & s \in [1, 1 + \pi], \end{cases}$$

$$\zeta(-1) = 0, \quad \zeta(0) = \frac{1}{\pi}, \quad \zeta(1) = \frac{2}{\pi}, \quad \zeta(1 + \pi) = \frac{\pi}{2}.$$

Коэффициент α_0 , как и выше, вычисляется по формуле (46), остальные коэффициенты — по формулам

$$\alpha_k = \frac{\alpha^0}{\pi \zeta_0} \int_{2/\pi}^{\pi/2} \cos\left(\frac{k\zeta}{\zeta_0}\right) d\zeta = -\frac{\alpha^0}{\pi k} \sin\left(\frac{8k}{\pi}\right),$$

$$\beta_k = \frac{\alpha^0}{\pi\zeta_0} \int_{2/\pi}^{\pi/2} \sin\left(\frac{k\zeta}{\zeta_0}\right) d\zeta = -\frac{\alpha^0}{\pi k} \left(1 - \cos\left(\frac{8k}{\pi}\right)\right), \quad k = \overline{1, \infty};$$

$$a_k = \frac{2 - \alpha^0}{\pi\zeta_0} \int_1^{1+\pi} \cos\left(\frac{k\zeta(s)}{\zeta_0}\right) u_0^2(s) ds, \quad k = \overline{0, \infty}; \quad (58)$$

$$b_k = \frac{2 - \alpha^0}{\pi\zeta_0} \int_1^{1+\pi} \sin\left(\frac{k\zeta(s)}{\zeta_0}\right) u_0^2(s) ds, \quad k = \overline{1, \infty}. \quad (59)$$

Завихренность вблизи границы $y = 0$ определяется следующим образом:

$$\omega(x, y) = -\gamma^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\gamma^2 a_k + \alpha_k) \cos\left(-\frac{\sqrt{2\gamma^2 k} |y| u_0(x)}{\varepsilon} + 4k\zeta(x)\right) + \right. \\ \left. + (\gamma^2 b_k + \beta_k) \sin\left(-\frac{\sqrt{2\gamma^2 k} |y| u_0(x)}{\varepsilon} + 4k\zeta(x)\right) \right] \exp\left(-\frac{\sqrt{2\gamma^2 k} |y| u_0(x)}{\varepsilon}\right).$$

При определении формы свободной границы второй ПС не рассматривается.

Для вычисления функции тока перейдем от переменных x, y к переменным r, φ . Для исключения особенности в окрестности точки $(x, y) = (0, 0)$ вторая формула (14) заменяется на формулу

$$\varphi = \arccos(x/(r + 2 \cdot 10^{-11})).$$

Для вычисления функции $\Phi(x)$ по формуле (12) достаточно использовать два слоя в окрестности свободной границы: $y = 0$ и $y = -h_y$. Значение h_y задавалось равным 0,0002. После определения функции $\Phi(x)$, $x \in [-1, 1]$ функция $f(x)$ как решение задачи (9)–(11) строилась по алгоритму, основанному на методе функции Грина и описанному в [5, 6]. Входящие в решение интегралы рассчитывались численно.

5. Результаты расчетов. При вычислении функций $\Psi(r, \varphi)$, $u_0(s)$, $\zeta(s)$ число членов рядов по i задавалось равным $I = 200$. Число гармоник при разложении функций $A^1(\zeta)$, $\alpha^1(\zeta)$ и функции $F_2(\zeta(s), \delta_1 u_0(s))$ в ряды по k выбиралось равным $K = 1200$. При вычислении интегралов (49), (58), (59) число разбиений отрезка $[1, 1 + \pi]$ равно $M_1 = 24\,000$. При определении завихренности и функции тока использовались дискретные полярные координаты (r_n, φ_m) , $n = \overline{0, N}$, $m = \overline{0, M}$ при $N = 80$, $M = 160$ и равномерная сетка. Параметр γ^2 равен 0,18048 (в [1] при $\text{Re} = 45\,000$ $\gamma^2 \approx -\omega_{N/2, M/2} = 0,17780$, где $N = 2048$, $M = 512$ — числа разбиений по осям ξ, η), поэтому максимальное значение безразмерной скорости равно $u_{\max} = 0,076600$ (см. формулу (57)). Согласно [1] задача решается при значениях формального числа Рейнольдса $\text{Re} = 1000, 6000, 20\,000, 45\,000$.

При построении изолиний завихренности и функции тока сначала рассчитывались коэффициенты $a_k, \alpha_k, k = \overline{0, K}$ (время расчета 15 мин), затем — значения функции тока (время расчета 0 мин) и завихренности (время расчета одного варианта — 15 мин). Таким образом, время расчета четырех вариантов (для значений $\text{Re} = 1000, 6000, 20\,000, 45\,000$) составило 1 ч 15 мин.

При определении формы свободной границы сначала рассчитывались коэффициенты $a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k, k = \overline{0, K}$ (время расчета 30 мин), затем рассчитывалась форма свободной границы для всех четырех значений формального числа Рейнольдса (время расчета 4 мин).

Таким образом, общее время расчета для четырех значений формального числа Рейнольдса при построении функции тока, завихренности и формы свободной границы с помощью метода ПС составляет 1 ч 50 мин, с помощью метода конечных разностей — 55 ч

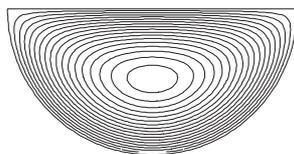


Рис. 2. Линии тока при постоянном значении завихренности

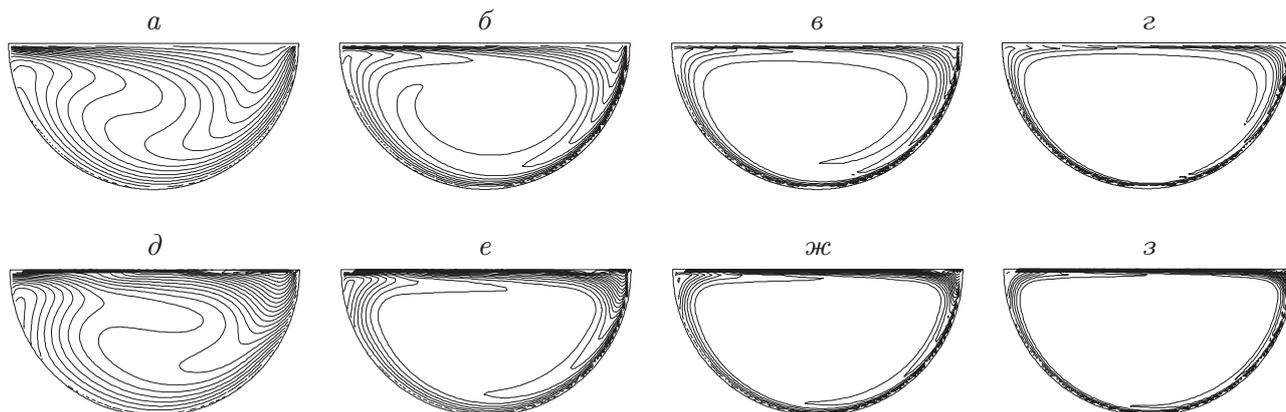


Рис. 3. Изолинии завихренности, полученные с помощью метода конечных разностей (*a–г*) и метода пограничного слоя (*д–з*) при $K = 1200$ и различных значениях формального числа Рейнольдса:

a, д — $Re = 1000$, *б, е* — $Re = 6000$, *в, ж* — $Re = 20\,000$, *г, з* — $Re = 45\,000$

(1 ч — расчет при $Re = 1000$, $Re = 6000$, 6 ч — при $Re = 20\,000$, 48 ч — при $Re = 45\,000$). При этом использовалась последовательность сеток, начиная с сетки с размерностью 32×8 и заканчивая сеткой с размерностью 2048×512 в биполярной системе координат. Таким образом, время расчета с использованием метода ПС в 30 раз меньше, чем при использовании метода конечных разностей.

На рис. 2 показаны изолинии функции тока, используемой при построении завихренности и свободной границы с помощью метода ПС, при постоянном значении завихренности. Видно, что изолинии симметричны относительно оси y . В случае решения задачи с помощью метода конечных разностей изолинии функции тока при больших значениях реального числа Рейнольдса очень близки к изолиниям, приведенным на рис. 2, однако несимметричны относительно указанной оси.

На рис. 3 показаны изолинии завихренности при различных значениях формального числа Рейнольдса, полученные с использованием метода конечных разностей и метода ПС. Видно, что в первом случае между ПС и областью постоянной завихренности имеется некоторая переходная зона, во втором случае эта зона отсутствует. На рис. 4 показаны изолинии завихренности, построенные при $Re = 6000$ с помощью метода ПС при малом числе гармоник $K = 32$ (на рис. 3, *д–з* число гармоник составляет $K = 1200$). Поскольку изолинии на рис. 3, *б, д* очень близки, можно сделать вывод, что при больших значениях числа Рейнольдса переходная зона на картине изолиний завихренности появляется в результате исключения высокочастотной области его спектра вследствие недостаточно большого числа узлов разбиений области течения при решении задачи методом конечных разностей.

Сделаем несколько замечаний относительно выполнения граничных условий задачи. Согласно (48), (51), (52) и первой формуле (35) ПС (55), сходящий с угловой точки твердой

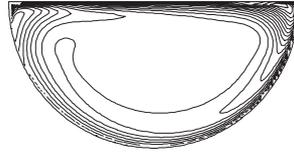


Рис. 4. Изолинии завихренности, полученные с помощью метода ПС при $Re = 6000$, $K = 32$

стенки ($\varphi = 0$, $r \in [0; 1]$), имеет вид

$$\omega_2 = -\frac{\gamma^2 a_0 + \alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma^2 a_k + \alpha_k) \cos\left(\frac{4k}{\pi}\right). \quad (60)$$

(ПС ω_1 , сходящийся со свободной границы, равен на ней нулю.) Подставляя в (60) формулы (44), (45), находим

$$\omega_2 = -(\alpha(s) + \gamma^2 A(s))\big|_{s=1} = -\alpha(1),$$

так как $A(1) = 0$ (39). Согласно (25) $\alpha(1) \in [0; \alpha^0]$ — многозначная функция. В соответствии с теорией рядов Фурье в точках разрыва аппроксимируемой функции ряд сходится к полусумме ее крайних значений. Поэтому формальная сумма ряда (60) равна $-\alpha^0/2$. В то же время член, стоящий вне знака суммы в (60), равен $-\gamma^2$. В соответствии с замечанием 1 его необходимо отбросить, поскольку он уже учтен в первом ПС. Представляет интерес завихренность

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_2 + \gamma^2 \in [\gamma^2 - \alpha^0; \gamma^2] = [-0,02; 0,18].$$

Полагая сумму ряда (60) равной ее формальному значению $\omega_2 = -\alpha^0/2 = -0,1$ и, следовательно, $\tilde{\omega}_2 = \gamma^2 - \alpha^0/2 = 0,08$, получаем скачок завихренности в окрестности свободной границы. Чтобы этого избежать, необходимо аппроксимировать значения завихренности на границе по трем прилежащим к этой границе точкам. Тогда вне некоторой окрестности угловых точек завихренность на границе будет близка к нулю. Однако в настоящей работе данный случай не рассматривается. Расчеты показывают, что завихренность вблизи свободной границы в окрестности угловых точек является положительной и достигает значения 0,15. При $Re = 1000$, 6000 этой окрестностью является вся свободная граница, при $Re = 20\,000$ — окрестность, описываемая неравенством $r > 0,47$, при $Re = 45\,000$ — окрестность, описываемая неравенством $r > 0,61$. Такое поведение завихренности противоречит результатам расчета в работе [1], в которой она всегда неположительна. Избежать этого можно только с помощью построения угловых ПС.

Граничное условие (6) начинает выполняться в тот момент, когда функция ω_1 при увеличении величины $|y| = \sin \varphi$ выходит на постоянное значение $-\gamma^2$. Для $Re = 1000$ это происходит при $\varphi \in [0,23\pi; 0,77\pi]$, для $Re = 6000$ — при $\varphi \in [0,12\pi; 0,88\pi]$, для $Re = 20\,000$ — при $\varphi \in [0,1\pi; 0,9\pi]$, для $Re = 45\,000$ — при $\varphi \in [0,08\pi; 0,92\pi]$. Таким образом, окрестности угловых точек, в которых перестает выполняться граничное условие (6), достаточно малы. Для их полной ликвидации необходимо строить угловые ПС.

В табл. 1 приведены максимальные значения модуля безразмерной скорости u_{\max} , значения реального числа Рейнольдса $Re_R = Re u_{\max}$, формального Fr и реального $Fr_R = Fr u_{\max}^2$ чисел Фруда и минимальные значения функции тока Ψ_{\min} и завихренности ω_{\min} , полученные с помощью метода ПС (вариант 1) и метода конечных разностей (вариант 2) при четырех значениях формального числа Рейнольдса Re .

В табл. 2 приведены средние $\nu_{\text{ср}}^S$ и максимальные ν_{max}^S значения схемной вязкости, а также соответствующие им значения чисел Рейнольдса $Re_{\text{ср}}^S$ и Re_{min}^S в случае решения

Таблица 1

Значения параметров задачи, полученные с помощью метода пограничного слоя (вариант 1) и метода конечных разностей (вариант 2) при различных значениях формального числа Рейнольдса

| Вариант | Re | u_{\max} | Re_R | Fr | Fr_R | Ψ_{\min} | ω_{\min} |
|---------|--------|------------|--------|----------------------|----------------------|---------------|-----------------|
| 1 | 1000 | 0,0766 | 77 | $1,86 \cdot 10^{-3}$ | $1,09 \cdot 10^{-5}$ | -0,0176 | -0,3593 |
| 2 | 1000 | 0,0836 | 84 | $1,86 \cdot 10^{-3}$ | $1,30 \cdot 10^{-5}$ | -0,0186 | -0,3505 |
| 1 | 6000 | 0,0766 | 459 | $6,69 \cdot 10^{-2}$ | $3,93 \cdot 10^{-4}$ | -0,0176 | -0,3479 |
| 2 | 6000 | 0,0728 | 437 | $6,69 \cdot 10^{-2}$ | $3,54 \cdot 10^{-4}$ | -0,0178 | -0,3282 |
| 1 | 20 000 | 0,0766 | 1532 | 0,744 | $4,36 \cdot 10^{-3}$ | -0,0176 | -0,3444 |
| 2 | 20 000 | 0,0735 | 1470 | 0,744 | $4,02 \cdot 10^{-3}$ | -0,0175 | -0,3218 |
| 1 | 45 000 | 0,0766 | 3447 | 3,770 | $2,21 \cdot 10^{-2}$ | -0,0176 | -0,3433 |
| 2 | 45 000 | 0,0738 | 3321 | 3,770 | $2,05 \cdot 10^{-2}$ | -0,0174 | -0,3193 |

Таблица 2

Значения параметров разностной схемы при решении задачи с помощью метода конечных разностей при различных значениях реального числа Рейнольдса

| Re_R | ν_{cp}^S | ν_{max}^S | Re_{cp}^S | Re_{min}^S |
|--------|---------------------|----------------------|--------------------|---------------------|
| 84 | 0,046 | 0,159 | 80 | 72 |
| 437 | 0,266 | 0,792 | 345 | 244 |
| 1470 | 0,874 | 2,466 | 784 | 424 |
| 3321 | 1,954 | 5,387 | 1124 | 520 |

задачи с помощью метода конечных разностей с использованием разностей против потока при аппроксимации конвективных членов при различных значениях реального числа Рейнольдса Re_R . Указанные параметры определялись по формулам

$$\nu_{\text{cp}}^S = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} \nu_{n,m}^S H_{n,m}^2 h_{\xi n} h_{\eta m}}{\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} H_{n,m}^2 h_{\xi n} h_{\eta m}}, \quad \nu_{\text{max}}^S = \max_{n,m} \nu_{n,m}^S,$$

$$Re_{\text{cp}}^S = \frac{Re_R}{1 + \nu_{\text{cp}}^S}, \quad Re_{\text{min}}^S = \frac{Re_R}{1 + \nu_{\text{max}}^S},$$

где

$$\nu_{n,m}^S = \max \left\{ \frac{Re_R |u_{n,m}| h_{\xi n}}{2u_{\max}}, \frac{Re_R |v_{n,m}| h_{\eta m}}{2u_{\max}} \right\} —$$

схемная вязкость (обычная вязкость равна единице),

$$u_{n,m} = \frac{\Psi_{n,m+1} - \Psi_{n,m-1}}{2h_{\eta m}}, \quad v_{n,m} = -\frac{\Psi_{n+1,m} - \Psi_{n-1,m}}{2h_{\xi n}} —$$

компоненты модифицированной скорости,

$$h_{\xi n} = (\xi_{n+1} - \xi_{n-1})/2, \quad h_{\eta m} = (\eta_{m+1} - \eta_{m-1})/2 —$$

шаги сетки в направлениях ξ, η ; $H_{n,m}$ — коэффициент Ламе; $\Psi_{n,m}$ — сеточная функция тока; ξ_n ($n = 0, N$), η_m ($m = 0, M$) — сеточные переменные биполярной системы координат; $N = 2048$, $M = 512$ — числа разбиений по осям ξ, η [1].

На рис. 5 показаны формы свободной границы, полученные при различных значениях формального числа Рейнольдса с помощью метода ПС и метода конечных разностей. При построении свободной границы с помощью метода ПС учитывался только ПС, сходящийся со свободной границы, поэтому граничное условие (5) на ней выполняется.

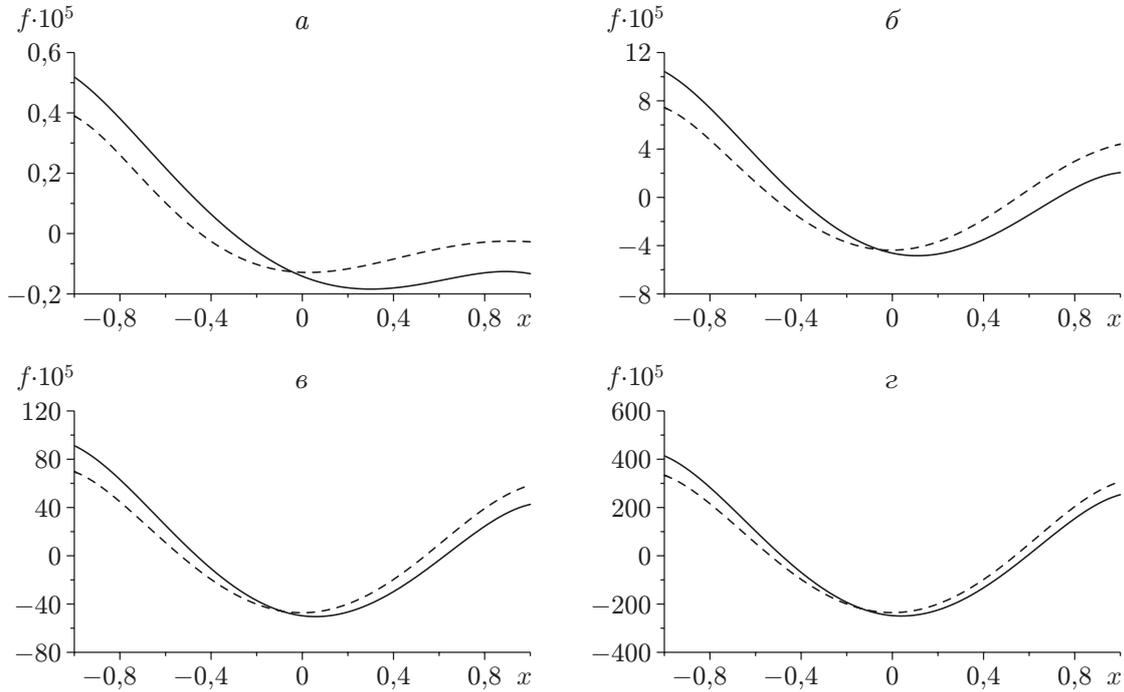


Рис. 5. Формы свободной границы, полученные при различных значениях формального числа Рейнольдса:

a — $Re = 1000$, $б$ — $Re = 6000$, $в$ — $Re = 20000$, $г$ — $Re = 45000$; сплошная линия — расчет с помощью метода ПС, штриховая — расчет с помощью метода конечных разностей

Таблица 3

Значения параметров, описывающих свободную границу, при различных значениях формального числа Рейнольдса

| Re | $f_{1 \max}$ | $f_{1 \min}$ | Δf_1 | f_{1L} | f_{2L} | $df_L, \%$ |
|-------|----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|
| 1000 | $5,18 \cdot 10^{-6}$ | $-1,84 \cdot 10^{-6}$ | $7,02 \cdot 10^{-6}$ | $5,18 \cdot 10^{-6}$ | $3,89 \cdot 10^{-6}$ | 18,3 |
| 6000 | $1,04 \cdot 10^{-4}$ | $-4,84 \cdot 10^{-5}$ | $1,52 \cdot 10^{-4}$ | $1,04 \cdot 10^{-4}$ | $7,43 \cdot 10^{-5}$ | 19,5 |
| 20000 | $9,11 \cdot 10^{-4}$ | $-5,04 \cdot 10^{-4}$ | $1,41 \cdot 10^{-3}$ | $9,11 \cdot 10^{-4}$ | $6,96 \cdot 10^{-4}$ | 15,1 |
| 45000 | $4,13 \cdot 10^{-3}$ | $-2,50 \cdot 10^{-3}$ | $6,63 \cdot 10^{-3}$ | $4,13 \cdot 10^{-3}$ | $3,33 \cdot 10^{-3}$ | 12,0 |

Заметим, что в работе [1] свободная граница рассчитана неверно: у функции $\Phi(x)$ перед членом, содержащим завихренность (см. формулу (12)), ошибочно стоял множитель 0,5.

В табл. 3 приведены значения следующих параметров: $f_{1 \max}$ — максимальное значение функции f_1 , описывающей форму свободной границы, построенной с помощью метода ПС (вариант 1); $f_{1 \min}$ — минимальное значение функции f_1 ; $\Delta f_1 = f_{1 \max} - f_{1 \min}$ — разность значений функции f_1 ; f_{1L} — значение f_1 в левой точке контакта; f_{2L} — значение f_2 в левой точке контакта (f_2 — функция, описывающая форму свободной границы, построенной с помощью метода конечных разностей (вариант 2)); $df_L = ((f_{1L} - f_{2L})/\Delta f_1) \cdot 100 \%$ — относительная разность значений функций f_1, f_2 в левой точке контакта.

Из рис. 5 и табл. 3 следует, что относительная разность значений функций f_1 и f_2 в левой точке контакта, являющаяся максимальной для всех $x \in [-1, 1]$, при увеличении формального числа Рейнольдса от 1000 до 45 000 уменьшается от значений порядка 20 % до

значения, равного 12 %. Недостаточная малость этой величины обусловлена тем, что при $Re = 1000$ функция $f_2(x)$ вычисляется достаточно точно, а функция $f_1(x)$ имеет минимальную точность. При увеличении числа Рейнольдса точность вычисления значений функции $f_1(x)$ увеличивается, однако уменьшается точность вычисления значений функции $f_2(x)$ вследствие увеличивающегося влияния схемной вязкости, поэтому значения данных функций не могут быть близкими.

Заключение. В работе рассмотрена задача о стационарном плоскопараллельном движении вязкой жидкости, наполовину заполняющей горизонтальный вращающийся цилиндр, при больших значениях числа Рейнольдса. Искомыми являются функция тока и завихренность в области течения, а также форма возмущенной движением жидкости свободной границы. Функция тока течения удовлетворяет краевой задаче для уравнения Пуассона с постоянной правой частью и нулевыми граничными условиями, решение которой строится с помощью функции Грина, записанной в полярных координатах в виде ряда. Граничным условием для завихренности является условие проскальзывания Навье с кусочно-постоянной функцией проскальзывания и кривизной границы, которая рассматривается как единое целое. Завихренность строится с помощью метода пограничного слоя в виде ряда, каждая из гармоник которого является произведением линейной комбинации косинусов и синусов одного и того же аргумента и экспоненциальной функции другого аргумента. Решение асимптотической задачи состоит из двух ПС: слоя, сходящего со свободной границы, и слоя, сходящего с твердой стенки. Однако при наличии этих слоев изменяются граничные значения для завихренности на части границы, с которой сходит другой слой, поэтому граничные условия для завихренности не выполняются: на свободной границе нулевое граничное значение завихренности заменяется ненулевой константой, а на границе с твердой стенкой нарушение граничного условия для завихренности происходит в некоторой окрестности угловых точек, причем эта окрестность уменьшается при увеличении числа Рейнольдса. Для того чтобы выполнялись граничные условия для завихренности, нужно построить угловые ПС, однако это выходит за рамки настоящей работы. Функция, описывающая свободную границу, находится из краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и граничными условиями третьего рода, дополненной законом сохранения массы. Эта задача решается с использованием функции Грина, а входящие в решение интегралы рассчитываются численно. При решении последней из рассмотренных задач учитывается только пограничный слой, сходящий со свободной границы, поэтому граничное условие для завихренности выполняется. Проведено сравнение данного решения с решением, полученным с помощью конечно-разностного метода. Показано, что в этом случае на картине изолиний завихренности помимо пограничного слоя и зоны постоянной завихренности имеется некоторая переходная зона, отсутствующая при использовании метода ПС. Это можно объяснить тем, что в данном случае ввиду недостаточно большого числа узлов сетки исключается высокочастотная часть спектра завихренности. В остальных решениях, полученные с использованием двух указанных методов, достаточно близки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пивоваров Ю. В. Расчет движения вязкой жидкости, частично заполняющей вращающуюся полость, при больших числах Рейнольдса // Вычисл. технологии. 2019. Т. 24, № 3. С. 88–105.
2. Пивоваров Ю. В. Расчет движения вязкой жидкости, частично заполняющей цилиндрическую полость // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 3. С. 106–119.
3. Пивоваров Ю. В. Описание асимптотического поведения маловязкой жидкости в эллиптической полости с движущейся границей // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 1. С. 30–42.

4. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 2 / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963.
5. **Воеводин А. Ф.** Проблемы вычислительной математики / А. Ф. Воеводин, В. В. Остапенко, Ю. В. Пивоваров, С. М. Шугрин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1995.
6. **Пивоваров Ю. В.** Моделирование конвекции расплава полупроводникового материала при зонной плавке: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2006.
7. **Betchelor G. K.** On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech. 1956. V. 1, N 2. P. 177–190.
8. **Батищев В. А.** Асимптотика осесимметричных течений жидкости со свободной границей при исчезающей вязкости // ПМТФ. 1975. № 3. С. 101–109.

*Поступила в редакцию 15/VII 2020 г.,
после доработки — 15/VII 2020 г.
Принята к публикации 26/X 2020 г.*
