имеют вид, аналогичный уравнениям (1.3) — (1.6), причем, как легко показать, получаются из последних предельным переходом при условиях $t_0 \to 0^-$, $u_0 \to 0^+$, которые равносильны условию $\varkappa \to -1$.

При $\varkappa \to -1$ модуль скорости v_0^+ на границе застойной зоны FC стремится к нулю, поэтому длина дуги FC также стремится к нулю, значит, $t_0 \to 0^-$. Как следует из (1.8), при этом $u_0 \to 0^+$, поэтому длина дуги CE стремится к нулю.

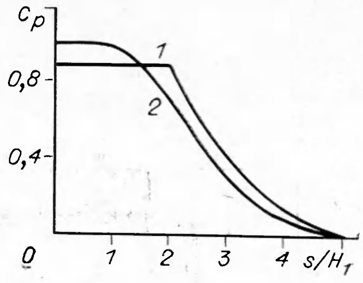

Рис. 4

Таким образом, в случае разных констант Бернулли при $\varkappa \to -1$ размеры застойной зоны неограниченно уменьшаются, она стягивается в точку, а схема течения с застойной зоной переходит в схему течения с точкой возврата граничной линии тока.

Автор выражает благодарность Л. И. Седову и В. П. Карликову за внимание и полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кинеловский С. А., Тришин Ю. А.** Симметричное соударение двухслойных струй идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ.— 1980.— № 2.
2. **Седов Л. И.** Новые методы и новые направления механики сплошной среды // Нерешенные задачи механики и прикладной математики.— М.: Изд-во МГУ, 1977.
3. **Шурыгин В. М.** Аэродинамика тел со струями.— М.: Машиностроение, 1977.
4. **Лукерченко Н. Н.** Соударение плоских струй, имеющих различные скоростные напоры, с образованием застойной зоны: Реферат // ПТО.— 1981.— № 6. Рукопись деп. в ЦНТИ «Поиск», № 035—2675.
5. **Лукерченко Н. Н.** Соударение двух струй с образованием застойной зоны // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1978.— № 5.

г. Москва *Поступила 21/II 1989 г., в окончательном варианте — 4/V 1989 г.*

УДК 539.376

А. В. Манжиров, В. А. Черныш

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛОИСТОГО НЕОДНОРОДНОГО СТАРЕЮЩЕГО ЦИЛИНДРА, ПОДКРЕПЛЕННОГО ЖЕСТКИМ КОЛЬЦОМ

1. Постановка задачи. Исследуем контактное взаимодействие жесткого подкрепляющего кольца с двухслойным вязкоупругим неоднородным стареющим цилиндром, находящимся под действием внешнего давления. Полагаем, что слои цилиндра изготовлены из разных материалов, в разные моменты времени. Наружный слой внутреннего радиуса a и наружного b изготовлен в момент времени τ_1, внутренний слой толщины h — в момент τ_2, причем h гораздо меньше характерного размера области контакта l и внутреннего радиуса двухслойного цилиндра $(a - h)$. Между слоями осуществляется гладкий контакт. В момент времени τ_0 в цилиндре устанавливается с натягом δ_0 жесткое кольцо с профилем поверхности $g(z)$ и подается внешнее давление $P(t)$. Считаем, что кольцо находится на достаточном расстоянии от торцов цилиндра и их влиянием на напряженное состояние под самим кольцом можно пренебречь. Торцы закрыты жесткими заглушками, устраняющими их осевое перемещение (рис. 1).

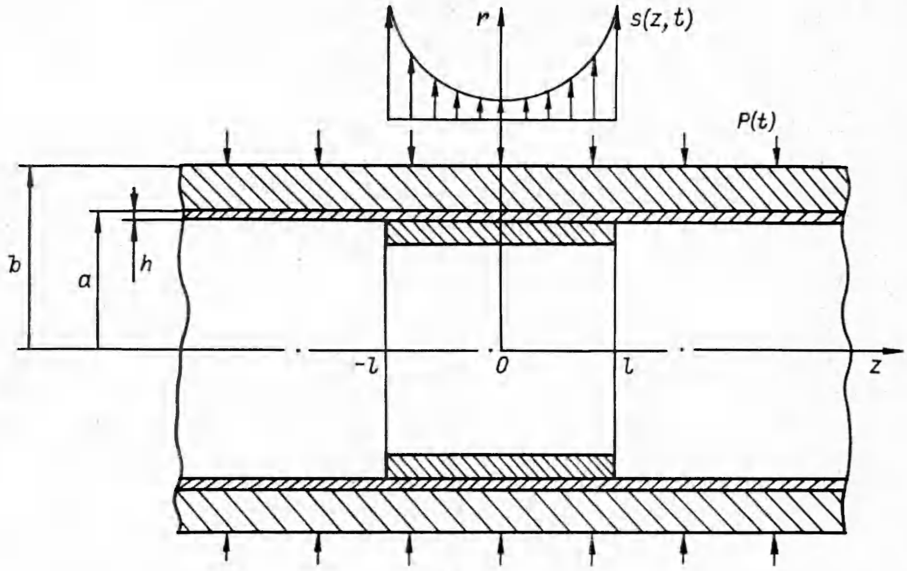

Рис. 1

В цилиндрической системе координат имеем следующие уравнения состояния [1—3]:

(1.1)
$$\sigma_r^{(i)} = \frac{E_i(t-\tau_i)}{(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}(\mathbf{I}+\mathbf{N}_i)\left[(1-\nu_i)\varepsilon_r^{(i)} + \nu_i\left(\varepsilon_\theta^{(i)} + \varepsilon_z^{(i)}\right)\right],$$
$$\sigma_\theta^{(i)} = \frac{E_i(t-\tau_i)}{(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}(\mathbf{I}+\mathbf{N}_i)\left[(1-\nu_i)\varepsilon_\theta^{(i)} + \nu_i\left(\varepsilon_z^{(i)} + \varepsilon_r^{(i)}\right)\right],$$
$$\sigma_z^{(i)} = \frac{E_i(t-\tau_i)}{(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}(\mathbf{I}+\mathbf{N}_i)\left[(1-\nu_i)\varepsilon_z^{(i)} + \nu_i\left(\varepsilon_r^{(i)} + \varepsilon_\theta^{(i)}\right)\right],$$
$$\tau_{rz}^{(i)} = \frac{E_i(t-\tau_i)}{1+\nu_i}(\mathbf{I}+\mathbf{N}_i)\varepsilon_{rz}^{(i)}, \quad (\mathbf{I}+\mathbf{N}_i)^{-1} = (\mathbf{I}-\mathbf{L}_i),$$
$$\mathbf{N}_i\omega(t) = \int_{\tau_0}^{t} \omega(\tau) R_i(t-\tau_i, \tau-\tau_i)\,d\tau,$$
$$\mathbf{L}_i\omega(t) = \int_{\tau_0}^{t} \omega(\tau) K_i(t-\tau_i, \tau-\tau_i)\,d\tau,$$
$$K_i(t,\tau) = E_i(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E_i(\tau)} + C_i(t,\tau)\right],$$

где индексом $i = 1, 2$ обозначены характеристики внутреннего и внешнего слоев цилиндра соответственно; $\sigma_r^{(i)} = \sigma_r^{(i)}(t, r, z)$ и т. д.— компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_r^{(i)} = \varepsilon_r^{(i)}(r, z, t)$— компоненты тензора деформации; $E_i(t-\tau_i)$ — упругомгновенные модули деформации; ν_i — постоянные коэффициенты Пуассона; $C_i(t, \tau)$ — меры ползучести слоев цилиндра; $K_i(t-\tau_i, \tau-\tau_i)$ — ядра ползучести; $R_i(t-\tau_i, \tau-\tau_i)$ — их резольвенты; r и z — радиальная и осевая координаты; t — текущий момент времени; $\mathbf{I}$ — тождественный оператор.

Справедливы также уравнения равновесия и соотношения между деформациями и перемещениями ($u_i = u_i(r, z, t)$, $w = w_i(r, z, t)$ — радиальное и осевое перемещения)

(1.2)
$$\partial\sigma_r^{(i)}/\partial r + \partial\tau_{rz}^{(i)}/\partial z + \left(\sigma_r^{(i)} - \sigma_\theta^{(i)}\right)/r = 0,$$
$$\partial\tau_{rz}^{(i)}/\partial r + \partial\sigma_z^{(i)}/\partial z + \tau_{rz}^{(i)}/r = 0;$$

(1.3) $$\varepsilon_r^{(i)} = \partial u_i/\partial r,\ \varepsilon_\theta^{(i)} = u_i/r,\ \varepsilon_z^{(i)} = \partial w_i/\partial z,$$
$$\varepsilon_{rz}^{(i)} = (1/2)(\partial u_i/\partial z + \partial w_i/\partial r).$$

2. Вывод интегрального уравнения контактной задачи. Решим вспомогательную задачу, заменив жесткое кольцо некоторой распределенной нагрузкой $p(z, t)$, отличной от нуля на участке $|z| \leqslant l$. Найдем радиальное перемещение внутренней поверхности двухслойного цилиндра, представив решение вспомогательной задачи как результат суперпозиции решений двух независимых: A — о действии нагрузки на бесконечный двухслойный цилиндр при отсутствии внешнего давления; B — о плоской деформации двухслойного цилиндра, находящегося под действием равномерного внешнего давления.

Рассмотрим задачу A. К соотношениям (1.1)—(1.3) добавим граничные условия

(2.1) $$r = a - h{:}\ \sigma_r^{(1)} = p(z, t),\ \tau_{rz}^{(1)} = 0;$$
$$r = a.\ \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)},\quad u_1 = u_2,\quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = 0;$$
$$r = b{:}\ \sigma_r^{(2)} = 0,\ \tau_{rz}^{(2)} = 0;\ |z| \to \infty{:}\ \sigma_r^{(i)},\ \sigma_\theta^{(i)},\ \sigma_z^{(i)},\ \tau_{rz}^{(i)} \to 0.$$

Воспользовавшись относительной малостью толщины внутреннего слоя ($h \ll l$), считая, что податливости элементов разных слоев характеризуются величинами одного порядка или податливость элементов внутреннего слоя больше, разложим $\tau_{rz}^{(1)}$ в ряд по степеням $(a - r)l^{-1}$ и ограничимся только линейными членами [3, 4]. Тогда с учетом граничных условий (2.1) для $\tau_{rz}^{(1)}$ при $r = a - h$ и $r = a$ получим, что $\tau_{rz}^{(1)} \equiv 0$. Из второго уравнения равновесия (1.2) имеем $\sigma_z^{(1)} = f(r, t)$. Но $\sigma_z^{(1)} \to 0$ при $|z| \to \infty$ (см. (2.1)), поэтому $\sigma_z^{(1)} \equiv 0$. Отсюда на основании выражения (1.1) для $\sigma_z^{(1)}$ найдем

(2.2) $$\varepsilon_z^{(1)} = -\nu_1(1 - \nu_1)^{-1}\left(\varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_\theta^{(1)}\right).$$

Первое уравнение равновесия (1.2) с учетом (1.1), (2.2) и $\tau_{rz}^{(1)} \equiv 0$ принимает вид (штрих означает производную по r)

(2.3) $$\left(\varepsilon_r^{(1)\prime} + \nu_1\varepsilon_\theta^{(1)\prime}\right)(1 - \nu_1)^{-1} + \left(\varepsilon_r^{(1)} - \varepsilon_\theta^{(1)}\right) r^{-1} = 0.$$

Интегрируя (2.3), при помощи тождества $\left(\varepsilon_r^{(1)} - \varepsilon_\theta^{(1)}\right) r^{-1} = \varepsilon_\theta^{(1)\prime}$ установим, что $\varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_\theta^{(1)} = 2\Psi(z, t)$, и в силу (1.3)

(2.4) $$\partial u_1/\partial r + u_1/r = 2\Psi(z, t).$$

Решение уравнения (2.4) можно записать в форме

(2.5) $$u_1 = r\Psi(z, t) + \Phi(z, t)r^{-1}.$$

Сращивая теперь радиальные перемещения по поверхности сопряжения слоев (см. (2.1)), придем к выражению

(2.6) $$\Phi(z, t) = u_2(a, z, t)a - \Psi(z, t)\, a^2.$$

Подставляя (2.6) в (2.5), имеем

(2.7) $$u_1 = \Psi(z, t)(r - a^2r^{-1}) + u_2(a, z, t)ar^{-1}.$$

На основании (2.7), (1.3) и (2.2) определим $\varepsilon_r^{(1)}$, $\varepsilon_\theta^{(1)}$ и $\varepsilon_z^{(1)}$. После чего при помощи (1.1) получим

(2.8) $$\sigma_r^{(1)} = E_1\left(1 - \nu_1^2\right)^{-1}(\mathrm{I} + \mathrm{N}_1)\{\Psi(z, t)\left[1 + \nu_1 + (1 - \nu_1)a^2r^{-2}\right] - (1 - \nu_1)ar^{-2}u_2(a, z, t)\}.$$

Удовлетворяя граничному условию (2.1) для $\sigma_r^{(1)}$ при $r = a - h$ с учетом (2.8) и пренебрегая далее величинами порядка ha^{-1} по сравнению с единицей, найдем

$$\Psi(z,t) = (1/2)\left[\left(1-\nu_1^2\right)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)\,p(z,t)\,E_1^{-1} + (1-\nu_1)\,u_2(a,z,t)\,a^{-1}\right]. \tag{2.9}$$

Радиальное перемещение внутренней поверхности цилиндра и напряжение $\sigma_r^{(1)}$ при $r = a$ в силу (2.7)—(2.9) можно ниже записать в форме

$$u_1(a-h,z,t) = -(1-\nu_1)^2(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)\,p(z,t)\,E_1^{-1}h + u_2(a,z,t), \tag{2.10}$$
$$\sigma_r^{(1)}(a,z,t) = p(z,t),$$

причем $u_2(a, z, t)$ определяется из решения задачи для внешнего слоя при следующих граничных условиях (см. (2.1) и (2.10) для $\sigma_r^{(1)}$):

$$r = a\colon\ \sigma_r^{(2)} = p(z,t),\ \tau_{rz}^{(2)} = 0;\quad r = b\colon\ \sigma_r^{(2)} = 0,\ \tau_{rz}^{(2)} = 0. \tag{2.11}$$

Напряженно-деформированное состояние внешнего слоя отыскивается при помощи принципа соответствия [5] и упругомгновенного решения задачи, построенного на основе представления Галеркина [6]:

$$\varphi(r,z) = \int_{-\infty}^{\infty}[A(\alpha)\,I_0(\alpha r) + B(\alpha)\,\alpha r I_1(\alpha r) +$$
$$+ C(\alpha)\,K_0(\alpha r) + D(\alpha)\,\alpha r K_1(\alpha r)]\,e^{i\alpha z}\,d\alpha,$$
$$\Delta\Delta\varphi = 0,\quad \Delta = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2,$$
$$\sigma_r^{(2)} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu_2\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right],\quad \sigma_z^{(2)} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu_2)\,\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right],$$
$$\sigma_\theta^{(2)} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu_2\Delta\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right],\quad \tau_{rz}^{(2)} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu_2)\,\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right],$$
$$u_2 = -\frac{1+\nu_2}{E_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z},\quad w_2 = \frac{1+\nu_2}{E_2}\left[2(1-\nu_2)\,\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right],$$

где $I_0(\alpha r)$, $I_1(\alpha r)$, $K_0(\alpha r)$, $K_1(\alpha r)$ — функции Бесселя мнимого аргумента. Выражение для радиального перемещения его внутренней поверхности имеет вид

$$u_2(a,z,t) = -\frac{2\left(1-\nu_2^2\right)}{\pi}(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\int_{-l}^{l}\frac{p(\xi,t)}{E_2}\,k(z,\xi)\,d\xi, \tag{2.12}$$

$$k(z,\xi) = \int_0^{\infty}\frac{L(\alpha)}{\alpha}\cos\alpha(z-\xi)\,d\alpha,\quad L(\alpha) = \alpha\left[b^{-1} + b^0D_1^2(\alpha) - \alpha^2bC_1^2(\alpha)\right]S^{-1}(\alpha),$$
$$S(\alpha) = a^0b^{-1} + b^0a^{-1} + a^0b^0D_1^2(\alpha) - b^0\alpha^2aB_1^2(\alpha) + \alpha^4abA_1^2(\alpha) - a^0b\alpha^2C_1^2(\alpha),$$
$$A_1(\alpha) = I_0(\alpha a)K_0(\alpha b) - I_0(\alpha b)K_0(\alpha a),$$
$$B_1(\alpha) = I_0(\alpha a)K_1(\alpha b) + I_1(\alpha b)K_0(\alpha a),$$
$$C_1(\alpha) = I_0(\alpha b)K_1(\alpha a) + I_1(\alpha a)K_0(\alpha b),$$
$$D_1(\alpha) = I_1(\alpha a)K_1(\alpha b) - I_1(\alpha b)K_1(\alpha a),$$
$$a^0 = 2(1-\nu_2)a^{-1} + a\alpha^2,\quad b^0 = 2(1-\nu_2)b^{-1} + b\alpha^2,$$

причем ядро $k(z, \xi)$ сохраняет все основные особенности, присущие ядрам плоских контактных задач [4].

Таким образом, радиальное перемещение внутренней поверхности двухслойного цилиндра в задаче A дается следующей формулой (см.

(2.10)—(2.12)):

$$(2.13)\quad u_1(a-h,z,t)=-\left(1-\nu_1^2\right)h(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)\,p(z,t)\,E_1^{-1}(t-\tau_1)-\frac{2\left(1-\nu_2^2\right)}{\pi}(\mathbf{I}-$$
$$-\mathbf{L}_2)\int\limits_{-l}^{l}\frac{p(\xi,t)}{E_2(t-\tau_2)}k(z,\xi)\,d\xi.$$

Плоская деформация цилиндра в задаче B исследуется при граничных условиях

$$r=a-h\colon\ \sigma_r^{(1)}=0;\ r=a\colon\ \sigma_r^{(1)}=\sigma_r^{(2)},\ u_1=u_2;\ r=b\colon\ \sigma_r^{(2)}=-P(t).$$

Замкнутое решение этой задачи позволяет записать перемещение u_1 при $r=a-h$ в виде

$$(2.14)\quad u_1(a-h,z,t)=-(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)(\mathbf{I}+\mathbf{N}_3)\,\theta_1(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\,P(t)\,E_2^{-1}(t-\tau_2),$$
$$\theta_1(t)=b_1\theta(t),\ \theta(t)=\left[b_2E_1(t-\tau_1)\,E_2^{-1}(t-\tau_2)+b_3\right]^{-1},$$
$$b_1=2(1-\nu_1)(a-h)^{-1}(1+\nu_2)\{(1-2\nu_2)a+$$
$$+a^2b^2(b^2-a^2)^{-1}[(1-2\nu_2)ab^{-2}+a^{-1}]\},$$
$$b_2=(1+\nu_1)^{-1}[a^{-2}-(a-h)^{-2}](1+\nu_2)a^2b^2\times$$
$$\times(b^2-a^2)^{-1}[(1-2\nu_2)ab^{-2}+a^{-1}],$$
$$b_3=(1-2\nu_1)(a-h)^{-2}a+a^{-1},\ \mathbf{N}_3\omega(t)=\int\limits_{\tau_0}^{t}\omega(\tau)\,R_3(t,\tau)\,d\tau,$$

где $R_3(t,\tau)$ — резольвента ядра $K_3(t,\tau)=[b_2K_2(t-\tau_2,\tau-\tau_2)\,E_1(\tau-\tau_1)\times$ $\times E_2^{-1}(\tau-\tau_2)+b_3K_1(t-\tau_1,\ \tau-\tau_1)]\,\theta(t)$.

Радиальное перемещение внутренней поверхности двухслойного цилиндра во вспомогательной задаче о действии на него нормальной распределенной нагрузки $p(z,\ t)$ и внешнего давления $P(t)$ получим, просуммировав (2.13) и (2.14).

Полагая $p(z,\ t)=-s(z,\ t)$ и приравнивая найденное перемещение натягу кольца с учетом профиля его поверхности $\delta_0-g(z)$, имеем интегральное уравнение контактной задачи в виде

$$(2.15)\quad \left(1-\nu_1^2\right)h(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)\frac{s(z,t)}{E_1(t-\tau_1)}+\frac{2\left(1-\nu_2^2\right)}{\pi}(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\int\limits_{-l}^{l}\frac{P(\xi,t)}{E_2(t-\tau_2)}\times$$
$$\times k(z,\xi)\,d\xi=(\mathbf{I}-\mathbf{L}_1)(\mathbf{I}+\mathbf{N}_3)\,\theta_1(t)(\mathbf{I}-\mathbf{L}_2)\,P(t)\,E_2^{-1}(t-\tau_2)+$$
$$+\delta_0-g(z)\quad(|z|\leqslant l).$$

3. Решение интегрального уравнения контактной задачи. Сделаем в уравнении (2.15) замену переменных по формулам

$$z^*=zl^{-1},\ \xi^*=\xi l^{-1},\ t^*=t\tau_0^{-1},\ \tau^*=\tau\tau_0^{-1},$$
$$\tau_1^*=\tau_1\tau_0^{-1},\ \tau_2^*=\tau_2\tau_0^{-1},\ \delta_0^*=\delta_0l^{-1},\ k^*(z^*,\xi^*)=\pi^{-1}k(z,\xi),$$
$$q^*(z^*,t^*)=2\left(1-\nu_2^2\right)q(z,t)\,E_2^{-1}(t-\tau_2),\ g^*(z^*)=g(z)\,l^{-1},$$
$$P^*(t^*)=2\left(1-\nu_2^2\right)P(t)\,E_2^{-1}(t-\tau_2),\ \theta_1^*(t^*)=(1/2)\,\theta_1(t)\,l^{-1}\left(1-\nu_2^2\right)^{-1},$$
$$c(t^*)=\frac{\left(1-\nu_1^2\right)E_2(t-\tau_2)\,h}{2\left(1-\nu_2^2\right)E_1(t-\tau_1)\,l},$$
$$K^{(1)}(t^*,\tau^*)=\frac{E_1(t-\tau_1)\,E_2(\tau-\tau_2)}{E_1(\tau-\tau_1)\,E_2(t-\tau_2)}K_1(t-\tau_1,\ \tau-\tau_1)\,\tau_0,$$
$$K^{(2)}(t^*,\ \tau^*)=K_2(t-\tau_2,\ \tau-\tau_2)\tau_0,$$

$$K^{(0)}(t^*,\ \tau^*) = K_1(t-\tau_1,\ \tau-\tau_1)\tau_0,$$

$$f^*(z^*, t^*) = \delta^*(t^*) - g^*(z^*),\ R_3^*(t^*, \tau^*) = R_3(t, \tau)\tau_0,$$

$$\delta^*(t^*) = \delta_0^* + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_0^*)(\mathbf{I} + \mathbf{N}^*)\theta_1^*(t^*)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_2^*)P^*(t^*),$$

$$\mathbf{L}_i^*\omega(t) = \int_1^t \omega(\tau)K^{(i)}(t, \tau)\,d\tau \quad (i = 0, 1, 2),\ \ \mathbf{N}^*\omega(t) = \int_1^t \omega(\tau)R_3^*(t, \tau)\,d\tau,$$

$$\mathbf{A}^*p(z^*, t^*) = \int_{-1}^{1} p(\xi^*, t^*)k^*(z^*, \xi^*)\,d\xi^*.$$

Опуская теперь звездочки в обозначениях для всех величин, кроме операторов, получим разрешающее уравнение задачи в виде

(3.1) $$c(t)(\mathbf{I} - \mathbf{L}_1^*)s(z, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2^*)\mathbf{A}^*s(z, t) = f(z, t),$$

где функция контактных давлений $s(z, t)$ и правая часть уравнения $f(z, t)$ непрерывны по времени в $L_2[-1,1]$; $c(t) > 0$ — непрерывная функция t; ядра операторов Вольтерра $\mathbf{L}_i^*$ $(i = 1,\ 2)$ непрерывны либо слабосингулярны; оператор A^* вполне непрерывный, самосопряженный и положительно определенный из $L_2[-1,1]$ в $L_2[-1,1]$, причем

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k^2(z, \xi)\,d\xi\,dz < \infty.$$

Представим решение уравнения (3.1) в форме рядов по собственным функциям $\varphi_i(z)$ оператора $\mathbf{A}^*$, соответствующим его собственным числам α_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ [7, 8]:

(3.2) $$s(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i(t)\varphi_i(z),\ \ f(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t)\varphi_i(z);$$

(3.3) $$\mathbf{A}^*\varphi_i(z) = \alpha_i\varphi_i(z).$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим

$$\omega_i(t) = \frac{f_i(t)}{c(t) + \alpha_i} + \int_1^t \frac{f_i(\tau)}{c(\tau) + \alpha_i} R^i(t, \tau)\,d\tau$$

($R^i(t,\ \tau)$ — резольвента ядра $K^i(t,\ \tau) = [c(t)K^{(1)}(t,\ \tau) + \alpha_i K^{(2)}(t,\ \tau)]\cdot$ $\cdot[c(t) + \alpha_i]^{-1}$).

Таким образом, решение построено. Имеет смысл остановиться вкратце на одном из способов нахождения собственных функций и собственных чисел оператора $\mathbf{A}^*$. Возьмем собственные функции и ядро оператора $\mathbf{A}^*$ в виде ($P_\kappa^*(z)$ $(\kappa = 0,\ 1,\ \ldots)$ — базис $L_2[-1,1]$)

(3.4) $$\varphi_i(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa^i P_\kappa^*(z), \qquad k(z,\ \xi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}P_m^*(z)P_n^*(\xi).$$

Тогда на основании (3.3) с учетом (3.4) запишем систему алгебраических уравнений для отыскания собственных чисел α_i и коэффициентов разложения собственных функций a_κ^i

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_{mn}a_n^i = \alpha_i a_m^i \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ограничиваясь N членами базиса $P_\kappa^*(z)$, получим N-е приближение метода Бубнова—Галеркина [9].

Отметим, что в случае, когда слои цилиндра изготовлены из одного и того же стареющего вязкоупругого материала в один и тот же момент времени, предварительный натяг кольца $\delta_0 = 0$ и профиль основания описывается функцией $g(z) = 0$, ползучесть не оказывает влияния на напряженное состояние цилиндра, а решение задачи совпадает с упругим.

В заключение остановимся на некоторых особенностях численного определения коэффициентов разложения r_{mn} ядра контактной задачи $k(z, \xi)$. Если в качестве базиса взять ортонормированные полиномы Лежандра, то, согласно [4], придем к выражениям вида

(3.5)

$$r_{mn}(\lambda) = (-1)^{m+n}[(4m+1)(4n+1)]^{1/2}\lambda \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u^2} J_{1/2+2m}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{1/2+2n}\left(\frac{u}{\lambda}\right) du$$

$$(m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Вычисление интегралов (3.5) при больших m и n требует специального рассмотрения, так как подынтегральные выражения быстро осциллируют. Эффективный численный алгоритм можно построить на основе [10]. Действительно, подставим подынтегральную функцию в виде произведения медленно и быстро меняющихся функций. Пусть для быстро меняющейся функции $K(x)$ интеграл берется в явном виде. Тогда, разбивая пределы интегрирования на n частей и аппроксимируя медленно меняющуюся функцию $f(x)$ на каждом интервале ее значением в центре, получим

$$\int_a^b f(x)\, K(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, K(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f_i (K_i - K_{i-1}),$$

где $x_0 = a$, $x_n = b$, K_i — первообразная функции $K(x)$ в точке x_i, $f_i = f[(x_i + x_{i-1})/2]$. Отметим, что все необходимые выражения для первообразных быстро осциллирующих подынтегральных функций из (3.5) можно найти в [11]. Кроме того, на основании изложенного алгоритма нетрудно определить то конечное значение верхнего предела в (3.5), которое удовлетворяет заданной точности вычисления коэффициентов r_{mn}, поскольку поведение функции $L(u)$ при $u \to \infty$ легко поддается анализу.

4. Примеры. Рассмотрим цилиндр, внутренний и внешний слои его изготовлены из вязкоупругого стареющего материала. Упругие характеристики E_i, ν_i $(i = 1,\ 2)$ постоянны. Меру ползучести материала слоев представим в виде [5]

(4.1) $$C_1(t, \tau) = C_2(t, \tau) = C(t, \tau) = [C_0 + A_0 \exp(-\beta\tau)] \times \{1 - \exp[-\gamma(t-\tau)]\}.$$

Зададимся следующими значениями параметров двухслойного цилиндра [5, 12]: $E_1 = E_2 = 5 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}1$, $C_0E_1 = 0{,}5522$,

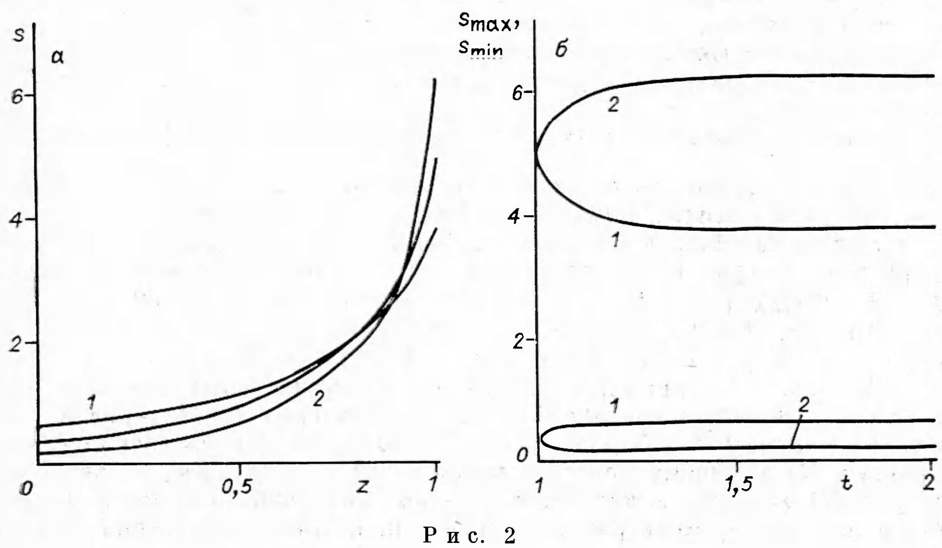

Рис. 2

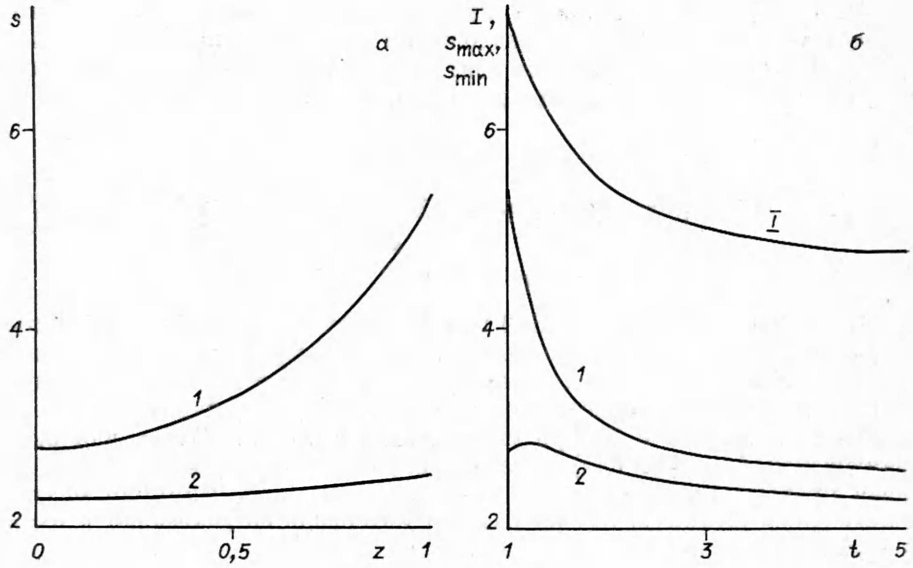

Рис. 3

$A_0E_1 = 4$, $ab^{-1} = 0{,}81$, $\beta = 0{,}031$ сут$^{-1}$, $\gamma = 0{,}06$ сут$^{-1}$, $hl^{-1} = 0{,}31$, $bl^{-1} = 10$, $c(t) = 0{,}155$, $P(t) = 1$, $g(z) = 0$, $\delta_0 = 0$, $\theta_1(t) = 20{,}72$.

Пусть внешний слой изготовлен в нулевой момент времени, а внутренний — через 50 сут, внешнее давление прикладывается через 65 сут (для безразмерных величин $\tau_2 = 0$, $\tau_1 = 0{,}77$). Кривые на графиках для этого случая отметим индексом *1*. Исследуем также вариант, когда внутренний слой изготовлен в нулевой момент времени, а внешний — через 50 сут при том же значении момента приложения нагрузки $\tau_0 = 65$ сут, т. е. $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0{,}77$. Кривые на рисунках для этого варианта отметим индексом *2*.

На рис. 2, *а* показаны распределения контактных давлений под кольцом для двух рассматриваемых случаев в различные моменты времени. Кривая без индекса показывает распределение напряжений в момент приложения внешнего давления. Кривые с индексами *1* и *2* задают распределение контактных давлений при $t = 2$. На рис. 2, *б* даны изменения максимальных и минимальных контактных давлений по времени для двух выбрапных случаев.

Графики показывают, что если возраст внешнего слоя меньше возраста внутреннего, то напряженное состояние под кольцом с течением времени сглаживается, в противном случае его неравномерность усиливается. Интегральная характеристика контактных давлений $I(t) = \int\limits_{-1}^{1} s(z, t)\,dz$ убывает по времени слабо, и для инженерных расчетов с достаточной степенью точности можно положить $I(t) = I(1)$. Основным здесь является эффект перераспределения контактных давлений.

Теперь рассмотрим цилиндр, внешний слой которого изготовлен из упругого материала, а внутренний — из вязкоупругого стареющего: $E_1E_2^{-1} = 0{,}025$, $\nu_1 = 0{,}1$, $\nu_2 = 0{,}3$, $ab^{-1} = 0{,}81$, $C_0E_1 = 0.5522$, $A_0E_1 = 4$, $\tau_0 = 15$ сут, $\beta = 0{,}031$ сут$^{-1}$, $\gamma = 0{,}06$ сут$^{-1}$, $hl^{-1} = 0{,}06$, $bl^{-1} = 10$, $c(t) = 1{,}36$, $\theta(t) = 24{,}06$, $\tau_1 = 0$, $P(t) = 1$, $g(z) = 0$, $\delta_0 = 0$.

На рис. 3, *а* приведено распределение контактных давлений под кольцом в момент приложения внешнего давления $t = 1$ (кривая *1*) и в момент времени $t = 5$ (*2*). На рис. 3, *б* представлены изменения максимальных (*1*) и минимальных (*2*) напряжений под кольцом, а также интегральной характеристики $I(t)$ контактных давлений по времени. Видно, что с течением времени распределение напряжений существенно сглаживается, а сами напряжения сильно релаксируют. Расчеты показывают, что в формировании напряженного состояния под кольцом проявляются две тенденции: к изменению контактных напряжений за счет неоднородности цилиндра и к уменьшению напряжений за счет релаксации. Первая может проявиться двояко в зависимости от характера неоднородности. Это можно четко проследить по результатам первого примера, когда влияние релаксации мало. Второй пример демонстрирует взаимодействие двух тенденций. Здесь за счет неоднородности материалов происходит, с одной стороны, сглаживание распределения контактных напряжений, когда максимальные напряжения уменьшаются, а минимальные растут. С другой стороны, контактные напряжения уменьшаются за счет процесса релаксации. Для максимальных напряжений обе тенденции ведут к их уменьшению. Для минимальных в начальный период превалирующей является первая тенденция, поэтому напряжения несколько возрастают. Однако с течением времени более сильной становится вторая тенденция и минимальные напряжения начинают уменьшаться.

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна за помощь и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арутюнян Н. Х.** Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел // Изв. АН СССР. МТТ.— 1976.— № 3.
2. **Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.** Теория ползучести неоднородных тел.— М.: Наука, 1983.
3. **Манжиров А. В.** Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой // ПМТФ.— 1983.— № 5.
4. **Александров В. М., Мхитарян С. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.— М.: Наука, 1983.
5. **Арутюнян Н. Х.** Некоторые вопросы теории ползучести.— М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
6. **Шапиро Г. С.** О сжатии бесконечного полого и кругового цилиндра давлением, приложенным на участке боковой поверхности // ПММ.— 1943.— Т. 7, вып. 5.
7. **Александров В. М., Манжиров А. В.** О двумерных интегральных уравнениях в прикладной механике деформируемых твердых тел // ПМТФ.— 1987.— № 5.
8. **Манжиров А. В.** Контактные задачи о взаимодействии вязкоупругих оснований, подверженных старению, с системами неодновременно прикладываемых штампов // ПММ.— 1987.— Т. 51, вып. 4.
9. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.
10. **Крылов В. И.** Приближенное вычисление интегралов.— М.: Наука, 1967.
11. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды: Специальные функции.— М.: Наука, 1983.
12. **Struik L. C. I.** Physical aging in amorphous polymers and other materials.— Amsterdam: Elsevier, 1978.

г. Москва

Поступила 14/XII 1987 г.,
в окончательном варианте — 14/VI 1989 г.

УДК 539.3

В. Н. Аптуков, А. В. Фонарев

РАСЧЕТ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ С ПЕРЕСТРОЙКОЙ

1. Введение. Методы решения задач динамического деформирования твердых тел очень разнообразны, что определяется широким диапазоном процессов высокоскоростной деформации и различными технологическими приложениями. Не существует каких-либо универсальных методов, каждый метод ограничен сравнительно узкими рамками согласно области его эффективного применения. Анализ современного состояния вопроса по численному моделированию нестационарных задач динамики упругопластических тел приведен в [1].