

**О НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗА СО СКАЧКАМИ
УПЛОТНЕНИЯ В РЕШЕТКЕ СВЕРХЗВУКОВОГО
КОМПРЕССОРА**

Д. Н. Горелов, В. А. Мешман

(Новосибирск)

В межлопаточных каналах сверхзвукового компрессора на околосвуковых режимах работы образуются скачки уплотнения, положение которых периодически меняется с течением времени, порождая интенсивные вибрации лопаток. Явление это чрезвычайно сложно и зависит от большого числа параметров.

В предлагаемой работе сделана попытка построить упрощенную модель явления, которая может быть исследована теоретически. При этом нестационарные пульсации потока и амплитуды колебаний скачков уплотнения предполагаются малыми и ищутся на фоне стационарного течения газа, характеристики которого, включая среднее положение скачков уплотнения, считаются заданными.

1. Рассмотрим обтекание решетки тонких слабоизогнутых профилей плоским потенциальным потоком баротропного газа. На входе в решетку поток предполагается невозмущенным и сверхзвуковым, а на выходе — дозвуковым. Пусть внутри каждого межпрофильного канала существует прямой скачок уплотнения малой интенсивности. В этом случае течение газа за скачком в первом приближении остается потенциальным. Профили решетки колеблются по некоторому заданному гармоническому закону с круговой частотой ω с постоянным сдвигом фазы μ между колебаниями соседних профилей. Амплитуды колебаний считаем малыми по сравнению с хордой профилей b . В общем случае за профилями образуется система вихревых следов, обусловленных изменением циркуляции скорости вокруг каждого профиля с течением времени. Вихревые следы моделируем линиями контактного разрыва, предполагая их расположенными вдоль прямых, являющихся продолжением хорд профилей.

Присвоим каждому профилю последовательно номера $n = 0, \pm 1, \dots$. С исходным профилем ($n = 0$) свяжем декартову систему координат x, y с началом в передней кромке неколеблющегося профиля. Ось x направим вдоль хорды того же профиля, а ось y — вверх. Пусть β — угол выноса, h — шаг решетки, $L_n^{(1)}, L_n^{(2)}$ — контуры верхней и нижней сторон n -го профиля соответственно, Ω_n — область течения, ограниченная фронтом решетки, контурами $L_n^{(1)}, L_{n+1}^{(2)}$ и скачком уплотнения R_n , а D_n — область течения справа от R_n , ограниченная контурами $L_n^{(1)}, L_{n+1}^{(2)}$ и линиями контактного разрыва (фиг. 1)

$$\begin{aligned} C_n : x &\geq b + nh \sin \beta, \quad y = nh \cos \beta \\ (1.1) \quad C_{n+1} : x &\geq b + (n + 1) h \sin \beta, \quad y = (n + 1) h \cos \beta \end{aligned}$$

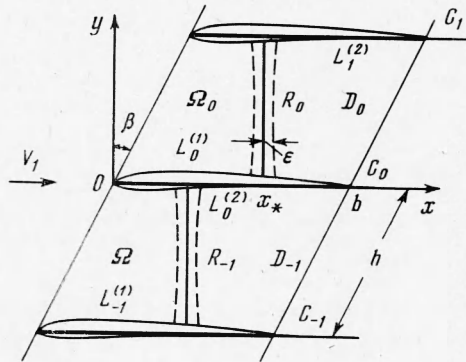
Потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ течения газа в областях Ω_n и D_n удовлетворяет в общем случае уравнению

$$\begin{aligned} (1.2) \quad [a_1^2 - (\kappa - 1) \{ \varphi_t + 1/2 [(\nabla\varphi)^2 - \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1] \}] \Delta\varphi = \\ = \varphi_{tt} + \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi \cdot \nabla) \right] (\nabla\varphi)^2 \end{aligned}$$

где V_1 , a_1 — соответственно вектор скорости и скорость звука невозмущенного сверхзвукового потока перед решеткой, κ — показатель адиабаты, t — время.

Граничными условиями в областях Ω_n , в которых течение газа сверхзвуковое, являются: условие непротекания газа через контуры $L_n = L_n^{(1)} + L_n^{(2)}$ ($n = 0, \pm 1, \dots$)

$$(1.3) \quad \{\nabla\varphi - V_1 - w_t^{(n)}\} \cdot \nu_n = 0 \quad \text{для } (x, y) \in L_n$$



Фиг. 1

и отсутствие возмущений газа вдоль линий Маха, отходящих от передних кромок профилей

$$(1.4) \quad \varphi(x, y, t) = V_1 \cdot r$$

Здесь r — радиус-вектор рассматриваемой точки, ν_n — нормаль к L_n , $w^{(n)}$ — вектор перемещения точек контура L_n .

В областях D_n течение газа дозвуковое. Граничными условиями в этих областях являются: условие непротекания (1.3) в точках контуров L_n , условие равенства за фронтом скачка R_n нормальной составляющей скорости газа некоторой искомой скорости

φ_x^+ , которая будет определена ниже

$$(1.5) \quad \varphi_x = \varphi_x^+ \quad \text{для } (x, y) \in R_n \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

и условие непрерывности давления p на линиях контактного разрыва

$$(1.6) \quad [p] = 0 \quad \text{для } (x, y) \in C_n \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

Кроме того, будем считать, что в задних кромках всех профилей выполняется постулат Жуковского о непрерывности давления в этих точках.

Начальные условия не задаются в силу предположения о гармоническом законе движения газа с течением времени.

Отметим, что граничное условие (1.5) содержит неизвестную функцию φ_x^+ , которая должна быть определена из уравнений сильного разрыва для R_n ($n = 0, \pm 1, \dots$)

$$(1.7) \quad \rho_- \theta_- (\varphi_x^+ - \varphi_x^-) = p_+ - p_-, \quad \rho_- \theta_- = \rho_+ \theta_+$$

$$p_- [(\kappa + 1) \rho_- - (\kappa - 1) \rho_+] = p_+ [(\kappa + 1) \rho_+ - (\kappa - 1) \rho_-]$$

Здесь ρ — плотность газа, θ — скорость распространения скачка уплотнения, индексы минус и плюс определяют предельные значения гидродинамических величин при подходе к R_n слева и справа соответственно, а давление p связано с потенциалом скорости φ интегралом Коши — Лагранжа

$$(1.8) \quad \int_{p_1}^p \frac{dp}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} [(\nabla \varphi)^2 - V_1^2] = 0$$

где p_1 — давление в невозмущенном потоке.

Система трех уравнений (1.7) содержит семь неизвестных функций — скорость перемещения скачка уплотнения N , скорости φ_x^+ , φ_x^- , плотности ρ_+ , ρ_- и φ_t^+ , φ_t^- . Из них только три величины — φ_x^- , φ_t^- и ρ_- — определяются из решения задачи (1.2)—(1.4) в сверхзвуковой области течения. Таким образом, система (1.7) оказывается незамкнутой.

Для получения дополнительного уравнения воспользуемся условием непрерывности касательных составляющих скоростей $\varphi_y^+ = \varphi_y^-$ на прямом скачке уплотнения. Отсюда следует, что

$$(1.9) \quad [\varphi] = \text{const} \text{ для } (x, y) \in R_n \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

Дифференцируя (1.9) по t , получим еще одно условие на R_n

$$(1.10) \quad \varphi_t^+ = \varphi_t^-$$

которое замыкает систему (1.7).

2. Представим потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ в виде

$$(2.1) \quad \varphi(x, y, t) = \varphi_0(x, y) + ba_1 \Phi(x, y) e^{i\omega t}$$

где $\varphi_0(x, y)$ — потенциал скорости стационарного течения газа около неколеблущихся профилей, $\Phi(x, y)$ — безразмерная амплитудная функция потенциала скорости дополнительного нестационарного течения газа.

Предположим, что поле скоростей стационарного движения газа в областях Ω_n и D_n не зависит от номера $n = 0, \pm 1, \dots$ и мало отличается от поля скоростей соответствующего осредненного движения. Это предположение и условие малости амплитуд колебаний позволяют получить для функции $\Phi(x, y)$ в областях Ω_n и D_n линейные уравнения, не зависящие от параметров стационарного движения. Зависимость функции Φ от этих параметров проявится только через условия (1.7) на скачках уплотнения. При этом, как будет показано, для расчета нестационарного течения достаточно знать среднее положение скачка в межпрофильном канале и величину разрыва давления стационарного потока на скачке. В дальнейшем эти параметры будем считать заданными.

Таким образом, в рамках сделанных предположений достаточно рассмотреть решение задачи для функции $\Phi(x, y)$ в линейной постановке. Обозначим через Φ_1, Φ_2 значения функции Φ в сверхзвуковой и в дозвуковой областях течения соответственно. Тогда в области течения функция Φ должна удовлетворять уравнению

$$(2.2) \quad (M_k^2 - 1) \Phi_{kxx} - \Phi_{kyy} + \frac{2i\omega}{a_k} M_k \Phi_{kx} - \\ - \frac{\omega^2}{a_k^2} \Phi_k = 0 \quad \left(M_k = \frac{V_k}{a_k}; \quad k = 1, 2 \right)$$

где V_2, a_2 — некоторые осредненные значения скорости потока и скорости звука в дозвуковой области течения.

Граничные условия в областях Ω_n ($n = 0, \pm 1, \dots$) имеют вид

$$(2.3) \quad \Phi_{1y} = M_1 W_x^{(n)} + i\omega a_1^{-1} W^{(n)} \text{ при } x_n < x < x_* + x_n, y = y_n \\ (x_n = nh \sin \beta, y_n = nh \cos \beta)$$

$$(2.4) \quad \Phi_1 = 0$$

на линиях Маха, отходящих от передних кромок профилей.

В областях D_n ($n = 0, \pm 1, \dots$) граничными условиями для функции Φ_2 являются

$$(2.5) \quad \Phi_{2y} = \left[M_2 W_x^{(n)} + \frac{i\omega}{a_2} W^{(n)} \right] \frac{a_2}{a_1} \equiv F^{(n)}(x)$$

при $x_* + x_n < x < b + x_n, y = y_n$

$$(2.6) \quad \Phi_{2x} = \Phi_{2x}^+ \text{ при } x = x_* + x_n, y_n < y < y_{n+1}$$

$$(2.7) \quad [i\omega \Phi_2 + V_2 \Phi_{2x}] = 0 \text{ при } x \geq b + x_n, y = y_n$$

Здесь граничные условия снесены на прямые, параллельные осям x и y , x_* — абсцисса среднего положения скачка уплотнения на верхней стороне исходного профиля, а безразмерная функция $W^{(n)}(x)$ определяется равенством

$$(2.8) \quad w^{(n)}(x, t) = b W^{(n)}(x) e^{i\omega t}$$

где $w^{(n)}$ — проекция на ось y вектора перемещения профиля L_n . Кроме того, условие на вихревых следах и постулат Жуковского записаны в виде одного выражения (2.7).

Задача (2.2), (2.5)–(2.7) связана с задачей (2.2)–(2.4) уравнениями сильного разрыва на скачках уплотнения (1.7) и дополнительным условием

$$(2.9) \quad \Phi_1^+ = \Phi_1^-$$

которое является следствием (1.10).

3. В соответствии с выбранным законом колебаний профилей

$$(3.1) \quad W^{(n)}(x) = W^{(0)}(x) e^{in\pi x}, \quad F^{(n)}(x) = F^{(0)}(x) e^{in\pi x}$$

Отсюда в силу линейности краевой задачи (2.2)–(2.7) следует, что функция Φ удовлетворяет условию обобщенной периодичности

$$(3.2) \quad \Phi(x + nh \sin \beta, y + nh \cos \beta) = \Phi(x, y) e^{in\pi x}$$

Условие (3.2) позволяет ограничиться решением задачи в областях Ω_0 и D_0 . При этом решение задачи (2.2)–(2.4) в области Ω_0 не зависит от условий (1.7) на скачке уплотнения R_0 и может быть получено методами, изложенными в работах [1, 2].

Перейдем к построению решения в области дозвукового течения D_0 . Введем в рассмотрение амплитудную функцию $\Psi(x, y)$ потенциала уско-рения, связанную с $\Phi_2(x, y)$ соотношением

$$(3.3) \quad \Psi = i\omega \Phi_2 + V_2 \Phi_{2x}$$

Обратная зависимость Φ_2 от Ψ определяется тогда формулой

$$(3.4) \quad \Phi_2(x, y) = \Phi_2(x_*, y) + \frac{1}{V_2} e^{-i\omega x/V_2} \int_{x_*}^x \Psi(u, y) e^{i\omega u/V_2} du$$

В соответствии с определением (3.3) и условием (2.7) функция Ψ непрерывна всюду в области $D = \sum_{-\infty}^{\infty} (D_n + C_n)$ и удовлетворяет в этой области уравнению (2.2) при $k = 2$. Таким образом, осталось выполнить условия

(2.5), (2.6), которые с учетом выражений (3.1) и (3.4) принимают вид

$$(3.5) \quad V_2 [F^{(0)}(x) - F^{(0)}(x_*)] = \\ = e^{-i\omega x/V_2} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{x_*}^x \Psi_y(u, y) e^{i\omega u/V_2} du \quad (x_* - x_1 < x < b)$$

$$(3.6) \quad V_2 \Phi_{2x}^+(y) = \Psi(x_*, y) \quad (0 \leq y \leq y_1)$$

Функцию Ψ будем искать методом наложения особенностей, располагая вдоль прямых $x = x_* + x_n$, $y_n < y < y_{n+1}$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) систему источников $q_n(y)$, а вдоль прямых $x_* + x_n - x_1 < x < b + x_n$, $y = y_n$ — систему диполей $\gamma_n(x)$. Из (3.2) следует, что

$$(3.7) \quad q_n(y) = q(y) e^{in\mu}, \quad \gamma_n(y) = \gamma(y) e^{in\mu}$$

Тогда функция Ψ , удовлетворяющая уравнению (2.2), в точках $(x, y) \in D_0$ может быть представлена в виде

$$(3.8) \quad \Psi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\mu} \left\{ \int_{y_n}^{y_{n+1}} q(\eta) H_0^{(2)}(r_{1n}) \times \right. \\ \times \exp \left[\frac{i\omega M_2}{a_2(1-M_2^2)} (y - \eta) \right] d\eta + \int_{x_*+x_n-x_1}^{b+x_n} \gamma(\xi) \times \\ \left. \times \frac{y - nh \cos \beta}{r_{2n}} H_1^{(2)}(r_{2n}) \exp \left[\frac{i\omega M_2}{a_2(1-M_2^2)} (x - \xi) \right] d\xi \right\}$$

где $H_0^{(2)}$, $H_1^{(2)}$ — функции Ганкеля второго рода, а

$$(3.9) \quad r_{1n} = \frac{\omega}{a_2(1-M_2^2)} \sqrt{(x - x_* - x_n)^2 + (1 - M_2^2)(y - \eta)^2} \\ r_{2n} = \frac{\omega}{a_2(1-M_2^2)} \sqrt{(x - \xi)^2 + (1 - M_2^2)(y - y_n)^2}$$

Подставляя (3.8) в (3.5), (3.6), получим систему двух интегральных уравнений для определения функций $q(\eta)$ и $\gamma(\xi)$. При этом следует учитывать, что вторая группа слагаемых в формуле (3.8) имеет особенность в точке $\xi = x$.

4. Уравнение (3.6) содержит неизвестную функцию Φ_{2x}^+ , которую следует определять из системы (1.7), (1.10). Рассмотрим этот вопрос более подробно. Первое из уравнений сильного разрыва (1.7) содержит скорость распространения прямого скачка уплотнения R_0 , определяемую равенством

$$(4.1) \quad \theta = N - \varphi_x \quad (N = \partial x_W / \partial t, \quad x_W(y, t) = x_* + \text{Re} \{ \varepsilon(y) e^{i\omega t} \})$$

Здесь N — скорость перемещения поверхности R_0 в направлении оси x , x_W — абсцисса скачка уплотнения на контуре $L_0^{(1)}$ в момент времени t , $\varepsilon(y)$ — комплексная амплитуда скачка уплотнения.

Давление и плотность газа представим в виде

$$(4.2) \quad p = p_0 + \text{Re} \{ p' e^{i\omega t} \}, \quad \rho = \rho_0 + \text{Re} \{ \rho' e^{i\omega t} \}$$

где p_0, ρ_0 — давление и плотность в стационарном потоке, p', ρ' — комплексные амплитудные функции нестационарных составляющих давления и плотности соответственно.

Подставляя выражения (2.1), (4.1), (4.2) в (1.7) и учитывая условие (1.10), получим

$$(4.3) \quad \begin{aligned} p_0^+ - p_0^- &= \rho_0^- (V_1 + \varphi_{0x}^-) (\varphi_{0x}^- - \varphi_{0x}^+) \\ \rho_0^+ (V_1 + \varphi_{0x}^+) &= \rho_0^- (V_1 + \varphi_{0x}^-) \\ p_0^+ [(\kappa + 1) \rho_0^- - (\kappa - 1) \rho_0^+] &= p_0^- [(\kappa + 1) \rho_0^+ - (\kappa - 1) \rho_0^-] \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} (p_+' - p_-') / \rho_0^- &= (\varphi_{0x}^- - \varphi_{0x}^+) [ba_1 \Phi_x^- - i\omega \varepsilon + \\ &+ (V_1 + \varphi_{0x}^-) \rho_-' / \rho_0^-] + ba_1 (V_1 + \varphi_{0x}^-) (\Phi_x^- - \Phi_x^+) \end{aligned}$$

$$(4.5) \quad \begin{aligned} ba_1 [(V_1 + \varphi_{0x}^-) \Phi_x^+ - (V_1 + \varphi_{0x}^+) \Phi_x^-] &= i\omega \varepsilon (\varphi_{0x}^- - \\ - \varphi_{0x}^+) + (V_1 + \varphi_{0x}^+) (V_0 + \varphi_{0x}^-) [\rho_-' / \rho_0^- - \rho_+' / \rho_0^+] \end{aligned}$$

$$(4.6) \quad p_+' / p_0^+ - \kappa \rho_+' / \rho_0^+ = 0, \quad p_-' / p_0^- - \kappa \rho_-' / \rho_0^- = 0$$

Соотношения (4.3) связывают гидродинамические величины на разных сторонах скачка уплотнения в стационарном потоке, а (4.4)–(4.6) устанавливают дополнительную связь в нестационарном потоке. Последние соотношения получены с точностью до величин первого порядка малости и позволяют определить искомые функции Φ_x^+ и ε через известные гидродинамические параметры сверхзвукового течения. Для этой цели удобно воспользоваться вспомогательным соотношением

$$(4.7) \quad \frac{p'}{p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} = - \frac{\kappa - 1}{\kappa \rho_0} ba_1 \rho_0 [(V_1 + \varphi_{0x}) \Phi_x + i\omega \Phi]$$

которое следует из равенства коэффициента при $\Delta \varphi$ в уравнении (1.2) квадрату скорости звука $a^2 = \kappa p / \rho$. С учетом (4.7) из условий (4.4)–(4.6) можно получить следующие выражения для Φ_x^+ , ε :

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \Phi_x^+ &= \frac{1}{(\kappa - 1)(V_1 + \varphi_{0x}^-) - (\kappa + 1)(V_1 + \varphi_{0x}^+)} \times \\ &\times \left\{ [(\kappa + 1)(V_1 + \varphi_{0x}^-) - (\kappa - 1)(V_1 + \varphi_{0x}^+)] \Phi_x^- - \frac{i\omega(\kappa - 1)}{\kappa + 1} \times \right. \\ &\left. \times \frac{(\varphi_{0x}^- - \varphi_{0x}^+)^2}{(V_1 + \varphi_{0x}^-)^2} \Phi^- \right\} \end{aligned}$$

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= - \frac{iba_1 (\varphi_{0x}^- - \varphi_{0x}^+)}{\omega [(\kappa - 1)(V_1 + \varphi_{0x}^-) - (\kappa + 1)(V_1 + \varphi_{0x}^+)]} \times \\ &\times \left\{ (\kappa + 1) \Phi_x^- + \frac{i\omega(\kappa - 1)}{V_1 + \varphi_{0x}^-} \Phi^- \right\} \end{aligned}$$

Формулы (4.8), (4.9) полностью замыкают задачу (2.2)–(2.7) об определении дополнительного потенциала скорости нестационарного движения газа.

5. Перейдем к определению нестационарных составляющих подъемной силы ΔP_n и момента ΔM_n , действующих на n -й профиль решетки. В соответствии с (3.2)

$$(5.1) \quad \Delta P_n = \operatorname{Re} \{ \Delta P e^{i(\omega t + n\psi)} \}, \quad \Delta M_n = \operatorname{Re} \{ \Delta M e^{i(\omega t + n\psi)} \}$$

где ΔP , ΔM — комплексные амплитуды подъемной силы и момента на исходном профиле. Величины ΔP , ΔM зависят как от распределения давления вдоль колеблющегося профиля, так и от амплитуды перемещения скачков уплотнения на верхней и нижней сторонах профиля и величины

разрыва стационарного давления на скачках. С учетом областей сверхзвукового и дозвукового течений газа

$$(5.2) \quad \Delta P = \int_0^{x_*-x_1} p_1'(x, -0) dx + \int_{x_*-x_1}^b p_2'(x, -0) dx - \int_0^{x_*} p_1'(x, +0) dx - \\ - \int_{x_*}^b p_2'(x, +0) dx + (p_0^+ - p_0^-) [\varepsilon(0) - \varepsilon(y_1) e^{-i\mu}]$$

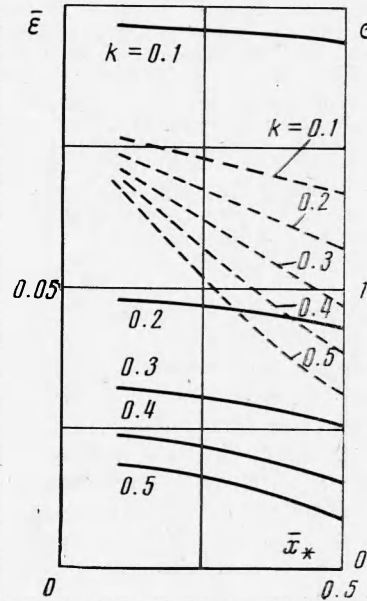
$$(5.3) \quad \Delta M = \int_0^{x_*-x_1} x p_1'(x, -0) dx + \int_{x_*-x_1}^b x p_2'(x, -0) dx - \\ - \int_0^{x_*} x p_1'(x, +0) dx - \int_{x_*}^b x p_2'(x, +0) dx + \\ + (p_0^+ - p_0^-) [x_* \varepsilon(0) - (x_* - x_1) \varepsilon(y_1) e^{-i\mu}]$$

Здесь p_1', p_2' — значения функции p' в сверхзвуковой и дозвуковой областях течения соответственно, а аэродинамический момент вычисляется относительно передней кромки профиля. Формулы (5.1)–(5.3) показывают, что для расчета нестационарных гидродинамических реакций на профили решетки в рамках предложенной модели необходимо знать функции Φ_1, Φ_2 , амплитуды колебаний скачка уплотнения, его среднее положение и разрыв стационарного давления на скачке в точках исходного профиля.

В качестве примера на фиг. 2 приведены результаты расчета безразмерной амплитуды колебаний $\bar{\varepsilon} = |\varepsilon|/b$ (сплошные кривые) и фазы σ (пунктирные кривые) скачка уплотнения ($\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\sigma}$) для решетки без выноса в зависимости от среднего положения скачка уплотнения $\bar{x}_* = x_*/b$ при разных значениях числа Струхала $k = \omega b/a_1$.

Профили совершают противофазные крутильные колебания относительно передней кромки с амплитудой $|\alpha| = 0.01$. Расчет проведен для $M_1 = 1.1$, $\varphi_{0x^-} = 0.05$, $\varphi_{0x^+} = -0.225 a_1$.

Результаты расчета показывают тенденцию к уменьшению амплитуды колебаний скачка уплотнения при удалении его от передней кромки и сильную зависимость $\bar{\varepsilon}$ от числа Струхала. Кроме того, в рассмотренном примере фаза σ меняется в промежутке $[0, \pi]$, что приводит к демпфированию крутильных колебаний профилей скачками уплотнения.



Фиг. 2

Поступила 12 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Lane S. Supersonic flow past an oscillating cascade with supersonic leadingedge locus. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, No. 1.
2. Горелов Д. Н. Решетка пластин в сверхзвуковом нестационарном потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.