

**ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
В ПРИСУТСТВИИ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ**

О. В. Воинов

(Москва)

На основе точного решения линеаризованных уравнений Навье — Стокса рассматриваются волны в слоях вязкой жидкости, покрытых слоем поверхностно-активного вещества (ПАВ) произвольной упругости и граничащих с твердой поверхностью или только с газом. В частном случае тонких пленок кроме капиллярных и гравитационных сил принимаются во внимание силы Ван-дер-Ваальса. Определено влияние толщины слоя на амплитуду максимума декремента затухания волны. Для тонких пленок в газе существует критическое значение поверхностной упругости, с превышением которого резко замедляется скорость роста возмущений. Вдали от окрестности критического значения скорость роста возмущений слабо зависит от упругости поверхностного слоя. Рассматриваемые вопросы важны для исследования устойчивости жидких пен.

Гидродинамический подход к явлению гашения капиллярно-гравитационных волн в жидкости поверхностно-активными веществами разработан В. Г. Левичем [1]. Были даны решения задач о затухании волн на поверхности жидкости бесконечной глубины в присутствии ПАВ произвольной концентрации. Задача о затухании волн в жидкости конечной глубины решена в частном случае несжимаемого слоя ПАВ для больших чисел Рейнольдса в работе [2]. В последние годы появилось большое число экспериментальных работ по гашению капиллярных волн (см. [3], а также краткий обзор в [4]). Было обнаружено, что при определенных значениях упругости слоя ПАВ затухание волн превышает затухание, соответствующее бесконечной упругости.

1. Жидкость конечной глубины. Основные уравнения. Плоскопараллельный слой вязкой несжимаемой жидкости с поверхностным натяжением σ граничит хотя бы с одной стороны с газом и его свободная поверхность покрыта слоем ПАВ. Для волн малой амплитуды уравнения Навье — Стокса записываются в линеаризованном виде

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } p + \mathbf{F} + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

Если слой жидкости граничит с твердой поверхностью, то учитывается сила тяжести $F_z = \rho g$ (ось z направлена к твердой границе, g — ускорение силы тяжести). В частном случае длинных волн в тонких пленках представляет интерес учесть кроме капиллярных и гравитационных сил ван-дер-ваальсовы силы притяжения, действующие в жидкости. Эти силы удобно учесть путем включения в компоненту объемной силы F_x (ось x — вдоль пленки), тогда давление p будет на соответствующую величину отличаться от полного давления, однако вид уравнений (1.1) не изменится. На основании известных результатов (см., например, [5-7]) можно записать при малых возмущениях толщины слоя h

$$F_x = Q \partial h / \partial x, \quad Q = A / 2\pi h^4 \quad (1.2)$$

Постоянная A в (1.2) для пленки в газе равна константе Гамакера ($A > 0$). Для слоя на твердой поверхности в определенных случаях может быть $A < 0$.

Влияние ПАВ учитывается согласно [1]. В случае плоских волн на свободной поверхности касательное напряжение равно

$$p_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad \text{при } z = 0 \quad (1.3)$$

К (1.3) следует присоединить уравнение сохранения ПАВ и выражение для упругости поверхностного слоя ε . Для поверхностной концентрации Γ нерастворимых ПАВ, пренебрегая поверхностной диффузией, можно записать [1]

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \Gamma \frac{d\zeta}{d\Gamma} = \varepsilon \quad (\varepsilon < 0) \quad (1.4)$$

При малых смещениях ζ жидких частиц вдоль оси z давление в газе p_0 и давление p вблизи свободной поверхности различаются на величину

$$p - p_0 = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad \text{при } z = 0 \quad (1.5)$$

Кинематические условия на свободной поверхности и на твердой границе есть $v_z = \partial \zeta / \partial t$ при $z = 0$, $v_x = v_z = 0$ при $z = h$ (1.6)

Для случая жидкости конечной глубины общее волновое решение уравнений (1.1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_x &= i(k(A_1 \operatorname{ch} kz + A_2 \operatorname{sh} kz) + l'(B_1 \operatorname{ch} l'z + B_2 \operatorname{sh} l'z)) e^{ikx + \alpha't} \\ v_z &= k(A_1 \operatorname{sh} kz + A_2 \operatorname{ch} kz + B_1 \operatorname{sh} l'z + B_2 \operatorname{ch} l'z) e^{ikx + \alpha't} \\ p &= p_0 + \rho g z - Q \zeta(0) - \rho \alpha' (A_1 \operatorname{ch} kz + A_2 \operatorname{sh} kz) e^{ikx + \alpha't} \\ &\quad (l'^2 = \alpha' / \nu + k^2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь давление p найдено с учетом (1.2), причем $\zeta(0) = h_0 - h$ (h_0 — толщина невозмущенного слоя). Коэффициенты, входящие в (1.7), можно найти из (1.3)–(1.6). Смещение в поверхности $\zeta(0)$ и поверхностную концентрацию Γ естественно искать в виде

$$\zeta(0) = \zeta_1 e^{ikx + \alpha't}, \quad \Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 e^{ikx + \alpha't} \quad (1.8)$$

Для упрощения выкладок удобно ввести обозначения

$$\alpha = \alpha' / \nu k^2, \quad \Omega = (k^{-2}(\rho g - Q) + \sigma) / \rho \nu^2 k, \quad \delta = -\varepsilon / \rho \nu^2 k, \quad l = \sqrt{\alpha + 1} \\ a = kh \quad (1.9)$$

Здесь ветвь функции \sqrt{z} на комплексной плоскости выбрана с помощью разреза от 0 до $-\infty$ вдоль действительной оси. Из формул (1.3)–(1.9) после исключения Γ_1 можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (2 + \alpha) A_1 + 2lB_1 &= (A_2 + B_2) \Omega / \alpha \\ 2A_2 + (2 + \alpha) B_2 &= (A_1 + lB_1) \delta / \alpha \\ A_1 \operatorname{ch} a + A_2 \operatorname{sh} a + lB_1 \operatorname{ch} la + lB_2 \operatorname{sh} la &= 0 \\ A_1 \operatorname{sh} a + A_2 \operatorname{ch} a + B_1 \operatorname{sh} la + B_2 \operatorname{ch} la &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Всякому решению системы (1.10) соответствует комплексно сопряженное, что является выражением инвариантности задачи относительно изменения направления оси x . Из условия совместности уравнений (1.10) следует уравнение для α . Мнимая часть α определяет частоту колебаний,

действительная часть — декремент затухания. Значения α можно найти аналитически в предельных случаях $|\alpha| a^2 \ll 1$ и $|\alpha| a^2 \gg 1$, а также в пределе большой вязкости ν ($|\alpha| \ll 1$) или малой вязкости ($|\alpha| \gg 1$).

2. Волны при $|\alpha| a^2 \gg 1$. Малая вязкость. В случае $|l| a \gg 1$ неизвестные B_1 и B_2 в системе (1.10) можно заменить следующим образом:

$$B_1 = B, \quad B_2 = f e^{-la} - B \quad (2.1)$$

Пренебрежение экспоненциально малыми членами $\exp(-\operatorname{Re} la)$ в (1.10) после исключения f дает следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (2 + \alpha) A_1 + 2lB &= (A_2 - B) \Omega/\alpha, & 2A_2 - (2 + \alpha) B &= (A_1 + lB) \delta/\alpha \\ A_1 (1 - l \operatorname{th} a) + A_2 (\operatorname{th} a - l) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Условие совместности системы (2.2) позволяет получить

$$\begin{aligned} \alpha^2 ((2 + \alpha)^2 - \varphi \Omega + 4l\varphi) + \delta (l\alpha^2 - l\varphi \Omega - \Omega) &= 0 \\ \varphi &= (1 - l \operatorname{th} a) (l - \operatorname{th} a)^{-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решения уравнения (2.3) при $\Omega \gg 1$, $\Omega a^5 \gg 1$ можно найти методом итераций. Для качественного исследования достаточно двух приближений. Принимая аналогично [1] за начальную точку $\alpha = \alpha_1$, соответствующее значение в идеальной жидкости, можно получить из (2.3) следующие асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2, & \alpha_1 &= i \sqrt{\Omega \operatorname{th} a} \\ \alpha_2 &= -2 + (1 + (1 + \operatorname{ch}^2 a) \delta \alpha_1^{-3/2}) \Omega / 2 \operatorname{ch}^2 a (\alpha_1^{3/2} + \delta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь и далее выписывается только один корень из пары сопряженных. Решение (2.4), как видно из (1.7) и (2.2), соответствует волне, в которой вязкость проявляется только в тонком слое вблизи поверхности [8], в объеме движение близко к движению идеальной жидкости. Кроме (2.4) существует решение уравнения (2.3), которое при $\delta \gg 1$, $\delta a^3 \gg 1$ имеет вид

$$\alpha_1 = 1/2 (i \sqrt{3} - 1) \delta^{2/3}, \quad \alpha_2 = 2/3 (\Omega / \delta - 7/2) (1 - \Omega \operatorname{th} a / \delta \sqrt{\alpha_1})^{-1}$$

Последнему решению согласно (1.7) и (2.2) соответствует волновое движение в тонком слое толщиной $\sim |l'|^{-1}$ вблизи свободной поверхности, причем $|v_x| \gg |v_z|$. Эта «приповерхностная» волна появляется только за счет присутствия ПАВ, ее затухание велико и в первом приближении не зависит от толщины слоя. Из формул (2.4) следуют формулы для сдвига частоты ξ и затухания ζ «объемной» волны

$$\begin{aligned} \xi &= \operatorname{Im} \alpha_2 = -\Omega [\operatorname{ch}^{-2} a - 2y (1 + y^2)^{-1}] / 2\delta_m \\ \zeta &= \operatorname{Re} \alpha_2 = -2 - \Omega [\operatorname{ch}^{-2} a + 2 (1 + y^2)^{-1}] / 2\delta_m \\ y &= \delta_m / \delta - 1, & \delta_m &= \sqrt{2} (\Omega \operatorname{th} a)^{3/4} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Переход к пределу $a \rightarrow \infty$ в последних формулах дает (с точностью до обозначений) соответствующие формулы теории гашения капиллярно-гравитационных волн в жидкости бесконечной глубины [1]. Если перейти к пределу $\delta \rightarrow \infty$ (несжимаемый слой ПАВ) и пренебречь первым слагаемым в формуле для ζ (2.5), то формулы дают результат работы [2], который был получен другим методом. В [2] отмечен отрицательный сдвиг частоты. Согласно (2.5) сдвиг частоты — немонотонная функция

упругости δ , отрицательная при $\delta = 0$ и $\delta \rightarrow \infty$, положительная при

$$\delta_m (1 + \operatorname{ch}^2 a + \sqrt{\operatorname{ch}^4 a - 1})^{-1} < \delta < \delta_m (1 + \operatorname{ch}^2 a - \sqrt{\operatorname{ch}^4 a - 1})^{-1}$$

С уменьшением толщины слоя ($a \rightarrow 0$) область положительного сдвига частоты вырождается в точку $\delta_k = (\Omega \operatorname{th} a)^{3/4} / \sqrt{2}$. Затухание ζ при любых a достигает значения затухания для несжимаемого слоя ζ_∞ при $\delta = \delta_k$. При $\delta > \delta_k$ затухание волны больше, чем в случае несжимаемого слоя. Максимальное значение затухания равно

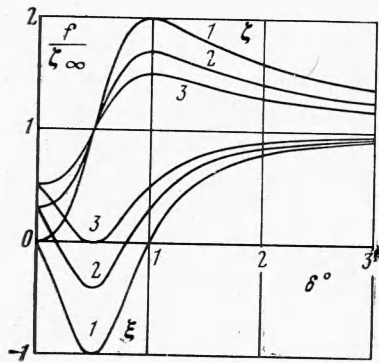
$$\zeta_m = \zeta_\infty (1 + 2 \operatorname{ch}^2 a) (1 + \operatorname{ch}^2 a)^{-1} \quad \text{при } \delta = \delta_m \quad (2.6)$$

Из выражения для δ_k и формулы (2.6) видно, что для длинных волн ($a \ll 1$) требуется в $\sim a^{-3/4}$ раз меньшая упругость слоя ПАВ, чем в случае жидкости бесконечной глубины, чтобы достигнуть эффекта гашения несжимаемого слоя ПАВ, т. е. в слое стабилизация свободной поверхности достигается легче, чем в глубокой жидкости.

Зависимость сдвига частоты $f = \xi$ и затухания $f = \zeta$ от безразмерного коэффициента упругости

$$\delta^2 = \frac{\delta}{\sqrt{2} (\Omega \operatorname{th} a)^{3/4}}$$

приведена на фигуре. Кривые 1 и 3 описывают предельные случаи $a \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, кривая 2 — $a = 1$. С уменьшением толщины слоя амплитуда максимума затухания, отнесенная к затуханию для несжи-



маемого слоя ζ_∞ , понижается от 2 до 1.5, а область значений упругости, в которой сдвиг частоты положителен, в пределе $a \rightarrow 0$ ($a \gg |l|^{-1}$) исчезает. Представляет интерес выяснить характер волнового движения в точке максимума. Из формул (1.7), (2.1), (2.2) и (2.4) в пределе $|l| a \gg \gg 1$, $|l| \gg 1$ для отношения скоростей в поверхности можно получить

$$v_z / v_x = \operatorname{th} a (i + (1 - i) \delta / \sqrt{2} (\Omega \operatorname{th} a)^{3/4}) \quad (2.7)$$

Видно, что траектория жидкой частицы в поверхности есть эллипс. Повышение упругости δ приводит к повороту главных осей эллипса и изменению эксцентриситета. В точке максимума (2.6) эллипс, как видно из (2.7), вырождается в отрезок. При распространении волны жидкие частицы вблизи свободной поверхности совершают колебания вдоль прямых, расположенных под углом $\operatorname{arctg}(\operatorname{th} a)$ к поверхности слоя. Траектории частиц с удалением от свободной поверхности будут эллипсами, причем при $z \gg |\operatorname{Re} l'|^{-1}$ вид траекторий такой же, как в идеальной жидкости.

3. Малые числа Рейнольдса. Рассматриваются длинные волны ($a \ll 1$) в слое жидкости на твердой поверхности при $|l| a \ll 1$, что возможно в области $|\Omega| a^5 \ll 1$. Два последних уравнения (1.10) в этом предельном случае дают

$$\begin{aligned} \alpha \alpha B_2 &= - (1 + \frac{1}{12} a^4) A_1 - (1 + \frac{1}{2} \alpha a^2 + \frac{1}{12} l^2 a^4) l B_1 \\ A_2 + B_2 &= - \frac{1}{2} (A_1 + l B_1) a + \frac{1}{12} (A_1 + l^3 B_1) a^3 \end{aligned}$$

Исключив A_2 и B_2 с помощью этих формул из двух первых уравнений (1.10), после несколько громоздких выкладок в пределе $a \ll 1$, $|l| a \ll 1$

можно получить следующее уравнение:

$$\alpha (\alpha + \frac{1}{3}\Omega a^3) + (\alpha + \frac{1}{12}\Omega a^3) a\delta = 0 \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что осциллирующих движений нет. Пусть $\Omega > 0$, тогда корни (3.1) неположительны.

Корень α_1 , равный $-\frac{1}{3}\Omega a^3$ при $\delta = 0$ (чистая поверхность), монотонно убывает и $\alpha_1 \rightarrow -\infty$ при $\delta \rightarrow \infty$, т. е. время релаксации стремится к нулю. При достаточно большом δ волновое движение выходит из рассматриваемой области малых чисел Рейнольдса.

Решение α_2 , равное нулю при $\delta = 0$, монотонно убывает, $\alpha_2 \rightarrow -\frac{1}{12}\Omega a^3$ при $\delta \rightarrow \infty$. Большие значения времени релаксации волнового движения, соответствующего α_2 , при малых δ объясняются малой величиной характерной силы, возбуждающей это течение.

Пусть в пленке определяющую роль играют силы Ван-дер-Ваальса, тогда по (1.2) и (1.9) $\Omega < 0$. При этом один корень (3.1) положителен. Решение α_1 , соответствующее волне нарастающей амплитуды, монотонно изменяется от $-\frac{1}{3}\Omega a^3$ до $-\frac{1}{12}\Omega a^3$. Переход к предельному случаю несжимаемого слоя ПАВ происходит постепенно, причем слой несжимаем, если $\delta \gg \frac{1}{3}|\Omega|a^2$. Для длинных волн последнее условие может быть значительно более слабым, чем условие $\delta > \sqrt{2}(\Omega a)^{1/4}$, справедливое в области малой вязкости. Таким образом, ПАВ особенно эффективно воздействуют на длинные волны в тонких слоях.

4. Жидкая пленка в газе. Рассматривается слой жидкости в газе, причем свободные поверхности покрыты одинаковыми слоями ПАВ. Пусть начало координат находится в плоскости симметрии пленки, а ось z перпендикулярна ей. В формулах (1.7) можно выделить симметричное (давление — четная функция z) решение уравнений Навье — Стокса (1.1)

$$\begin{aligned} v_x^+ &= i(kA_1 \operatorname{ch} kz + l'B_1 \operatorname{ch} l'z) e^{ikx+\alpha t} \\ v_z^+ &= k(A_1 \operatorname{sh} kz + B_1 \operatorname{sh} l'z) e^{ikx+\alpha t} \\ p &= p_0 - 2Q\zeta(-h/2) - \rho\alpha' A_1 \operatorname{ch} kz e^{ikx+\alpha t} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь при вычислении p применена формула (1.2) и учтено, что $h - h_0 = \zeta(\frac{1}{2}h) - \zeta(-\frac{1}{2}h)$. В силу симметрии достаточно удовлетворить граничным условиям при $z = -\frac{1}{2}h$. Из формул (1.3) — (1.5) и первого уравнения (1.6), записанных для $z = -h/2$, можно получить уравнения для коэффициентов, входящих в (4.1). Для упрощения вводятся обозначения

$$a = \frac{1}{2}kh, \quad A_+ = A_1 \operatorname{ch} a, \quad B_+ = B_1 \operatorname{ch} (\frac{1}{2}l'h) \quad (4.2)$$

Используя также все обозначения (1.9), кроме последнего, можно в итоге найти

$$\begin{aligned} (2 + \alpha) A_+ + 2lB_+ &= -(A_+ \operatorname{th} a + B_+ \operatorname{th} la) \Omega / \alpha \\ 2A_+ \operatorname{th} a + (2 + \alpha) B_+ \operatorname{th} la &= -(A_+ + lB_+) \delta / \alpha \\ (\Omega = (\sigma - 2Qk^{-2})/\rho v^2 k, \quad l = \sqrt{\alpha + 1}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отсюда следует уравнение для α

$$(\Omega \operatorname{th} a + (2 + \alpha)^2) \operatorname{th} la - 4l \operatorname{th} a + \delta (l - \Omega (\operatorname{th} la - l \operatorname{th} a) \alpha^{-2}) = 0 \quad (4.4)$$

В полную систему волн кроме симметричных входят антисимметричные волны, определяемые из уравнений (1.1) по аналогии с (1.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_x^- &= i(kA_2 \operatorname{sh} kz + l'B_2 \operatorname{sh} l'z) e^{ikx+\alpha t} \\ v_z^- &= k(A_2 \operatorname{ch} kz + B_2 \operatorname{ch} l'z) e^{ikx+\alpha t} \\ p &= p_0 - \rho\alpha' A_2 \operatorname{sh} kz e^{ikx+\alpha t} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Важно, что силы, учитываемые (1.2), сюда не вошли, так как из-за четности $v_z^- \xi(1/2 h) = \xi(-1/2 h)$. На антисимметричные волны силы Ван-дер-Ваальса не влияют. Обозначая

$$a = 1/2 kh, \quad A_2 \operatorname{sh}(1/2 kh) = A_-, \quad B_2 \operatorname{sh}(1/2 l'h) = B_- \quad (4.6)$$

можно получить из (1.3)–(1.5) и первого уравнения (1.6) при $z = -1/2 h$ следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (2 + \alpha) A_- + 2lB_- &= -(A_- \operatorname{cth} a + B_- \operatorname{cth} la) \Omega' / \alpha \\ 2A_- \operatorname{cth} a + (2 + \alpha) B_- \operatorname{cth} la &= -(A_- + lB_-) \delta / \alpha \\ (\Omega' &= \sigma / \rho v^2 k, \quad l = \sqrt{\alpha + 1}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Следует отметить, что форма записи граничных условий при $z = -1/2 h$ отличается знаком от (1.3) и (1.5). Можно показать, что из-за симметрии задачи эти условия будут выполнены автоматически для симметричных и антисимметричных волн, если выполнены соответствующие условия при $z = 1/2 h$. Из (4.7) следует уравнение для α в случае антисимметричных волн

$$\begin{aligned} [\Omega' \operatorname{cth} a + (2 + \alpha)^2] \operatorname{cth} la - 4l \operatorname{cth} a + \\ + \delta [l - \Omega' (\operatorname{cth} la - l \operatorname{cth} a) \alpha^{-2}] = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Уравнения для различных типов волн (4.4) и (4.8) отличаются заменой $\operatorname{th} a \rightarrow \operatorname{cth} a$, $\operatorname{th} la \rightarrow \operatorname{cth} la$, $\Omega \rightarrow \Omega'$.

Каждому корню этих уравнений отвечает комплексно сопряженный. При переходе к слою большой толщины ($a \rightarrow \infty$) различие между (4.4) и (4.8) исчезает, причем оба эти уравнения в пределе совпадут также с уравнением (2.3). В предельных случаях $|\alpha| a^2 \gg 1$ и $|\alpha| a^2 \ll 1$ уравнения (4.4) и (4.8) допускают аналитическое исследование.

5. Малая вязкость. При $|l| a \gg 1$, $|l| \gg 1$ уравнения (4.4) и (4.8) можно решать итерациями. Так же как и для пленки на твердой поверхности, здесь возможны волны, локализованные вблизи свободной поверхности в тонком слое $\Delta z \sim |l|^{-1}$, и волны, связанные с движением в объеме. Ниже рассматриваются «объемные» волны. Аналогично (2.5) из (4.4) в случае симметричных волн получаются следующие асимптотические выражения для частоты $\operatorname{Im} \alpha_1$, сдвига частоты и затухания

$$\begin{aligned} \alpha_1 = i \sqrt{\Omega q} \quad (\alpha = \alpha_1 + \alpha_2), \quad \xi = \operatorname{Im} \alpha_2 = y \Omega^{1/4} / (1 + y^2) q^{1/4} \sqrt{2} \\ \zeta = \operatorname{Re} \alpha_2 = -2 - \Omega^{1/4} / (1 + y^2) q^{1/4} \sqrt{2}, \quad y = \sqrt{2} (\Omega q)^{3/4} \delta^{-1} - 1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь $q = \operatorname{th} a$, $a = kh / 2$. Из (5.1) следует, что имеется максимум затухания при $\delta = \sqrt{2} (\Omega q)^{3/4}$. Затухание волны в случае несжимаемого слоя соответствует минимуму. С уменьшением параметра a затухание симметричных волн возрастает, а максимумы затухания наблюдаются при все меньших значениях коэффициента упругости ($\delta \sim a^{3/4}$). В отличие от пленки на твердой подложке, где уменьшение толщины приводит к снижению относительной амплитуды (ζ / ζ_∞) максимума затухания, здесь относительная амплитуда максимума не понижается. С уменьшением толщины пленки

приближение $|\alpha| a^2 \gg 1$ довольно быстро теряет силу. Формулы (5.1) остаются справедливыми при $\Omega \gg 1$, $\Omega a^5 \gg 1$. Несколько иные результаты получаются в случае антисимметричных волн. Из уравнения (4.8) можно вывести для этих волн выражения частоты, сдвига частоты и затухания, совпадающие с (5.1), если положить в последних

$$q = \operatorname{cth} a, \quad \Omega = \sigma / \rho v^2 k \quad (a = kh / 2)$$

Из (5.1) видно, что затухание антисимметричной волны уменьшается с уменьшением толщины пленки h , а частота колебаний растет. Максимум затухания наблюдается при все больших значениях упругости слоя ПАВ, причем его амплитуда убывает как $h^{3/4}$. Антисимметричные волны при малом a представляют собой изгибные колебания тонкого слоя вязкой жидкости, заключенного между двумя натянутыми упругими мембранами. Приближение $|\alpha| a^2 \gg 1$ в случае антисимметричных волн применимо в большей области значений a , чем в случае симметричных волн. Формулы (5.1) справедливы в случае антисимметричных волн ($q = \operatorname{cth} a$) при $\Omega' a^3 \gg 1$, $\Omega' \gg 1$.

6. Антисимметричные волны при $|\alpha| a^2 \ll 1$. Если $\Omega' a^3 \ll 1$, то в уравнении (4.8) можно считать $|l| a \ll 1$ и, используя разложение $\operatorname{cth} x$ в нуле, получить следующее уравнение, справедливое в области $|\alpha| \gg 1$, $|\alpha| a^2 \ll 1$:

$$\alpha (\Omega' / a + \alpha^2) + \delta (a\alpha (1 + \alpha) + \Omega') = 0 \quad (6.1)$$

Если упругость δ велика, то возможны чисто затухающие движения. При $\delta \gg (\Omega' / a^3)^{1/2}$ одним из корней (6.1) будет $\alpha \approx -a\delta$. В случае чистой поверхности из (6.1) следует

$$\alpha_1 = i \sqrt{\Omega' / a}, \quad (\alpha' = i \sqrt{25k^2 / \rho h})$$

Затухание колебаний, соответствующих этому корню, равно нулю в первом приближении. Для несжимаемого слоя ($\delta \rightarrow \infty$) частота мало отличается от $\operatorname{Im} \alpha_1$, а безразмерный декремент затухания равен $1/2$. Переход к несжимаемому слою, как видно из (6.1), происходит при $\delta \sim (\Omega' / a^3)^{1/2}$.

Следовательно, с уменьшением толщины пленки влияние ПАВ на антисимметричные волны уменьшается. При малых a для полной стабилизации поверхности по отношению к волне данной длины требуется упругость δ , значительно превосходящая, например, упругость $\delta \sim \Omega a^2$, необходимую для стабилизации свободной поверхности пленки на твердой подложке.

Тем не менее нельзя считать слабым влияние ПАВ на затухание волн рассматриваемого типа. Дело в том, что учет второго приближения в уравнении (4.8) дает в случае чистой поверхности $\operatorname{Re} \alpha = -2/3 a^2$. Поэтому для длинных волн ($a \ll 1$) затухание за счет ПАВ может возрасти в $\sim a^{-2}$ раз. В реальных условиях величина a может быть порядка 10^{-3} и менее, что привело бы в случае чистой поверхности к практически незатухающим волнам.

Кроме ПАВ фактором, значительно увеличивающим затухание рассматриваемых волн, может быть наличие газовой среды, окружающей пленку. Учет движения газа при колебаниях пленки приводит к следующим результатам. Величина затухания в случае чистой поверхности не зависит от движения в газе при $a^3 (a / \Omega')^{1/4} \gg \mu' / \mu$ (μ' — динамическая вязкость газа). При вычислении частоты колебаний можно пренебречь движением газа только при $a \gg \rho' / \rho$ (ρ' — плотность газа). Если $\mu \sim 10^{-2}$ г/см·сек и пленка находится в воздухе, то при $a \lesssim 10^{-3}$ частота волны данного типа будет зависеть в основном от инерционных свойств газа и с дальнейшим уменьшением толщины пленки рост частоты колебаний прекратится.

7. Симметричные волны при $|\alpha| a^2 \ll 1$. В пределе $|l| a \ll 1$ уравнение (4.4), пренебрегая малыми величинами, можно переписать в следующем виде:

$$\alpha \alpha (\Omega a + 4\alpha + \alpha^2) + (\alpha + 1/3 \Omega a^3) \delta = 0 \quad (7.1)$$

$$(\Omega = (\sigma - 2Qk^{-2}) / \rho v^2 k)$$

Если основную роль в пленке играют капиллярные силы, то $\Omega > 0$. Из (7.1) видно, что если $\Omega a \gg 1$, то при $\delta = 0$ волновое движение имеет осциллирующий характер, а при $\delta \rightarrow \infty$ имеется также аperiodическое движение с декрементом затухания $1/3 \Omega a^3$. При $\Omega a^3 \ll 1$ можно найти следующие приближенные формулы для корней уравнения (7.1):

$$\alpha_{1,3} = -2 \pm \sqrt{4 - a^{-1}\delta - \Omega a}, \quad \alpha_2 = -\frac{a\delta}{3(1 + \delta/\Omega a^2)} \quad (7.2)$$

Если $\Omega a \gg 1$, то при $\delta \ll \Omega a^2$ есть волны, вызываемые капиллярными силами. Корням α_1 и α_3 соответствуют две бегущие волны, отличающиеся одна от другой направлением распространения. При $\delta \gg \Omega a^2$ на волны, соответствующие α_1 и α_3 , поверхностное натяжение жидкости не влияет. Причиной появления этих волн служит исключительно упругость поверхностного слоя ПАВ. При этом скорость v_x изменяется по сечению пленки незначительно, как это видно из (4.4). Физической причиной возникновения таких волн служит то, что в каждом сечении пленки некоторая масса жидкости как бы «приклеена» за счет вязкости к двум упругим «мембранам». Безразмерная частота равна $\sim \sqrt{\delta/a}$, декремент затухания ~ 2 относительно невелик. Волны данного типа правильно описываются уравнением (7.1), пока $\delta a^3 \ll 1$.

Волны, вызываемые упругостью поверхностного слоя, были рассмотрены в [9, 10], где, в частности, получены в несколько иной форме уравнение (7.1) и первая формула (7.2)¹.

Вторая формула (7.2) справедлива при любых δ . По отношению к аperiodическому движению, соответствующему α_2 , слой ПАВ ведет себя как несжимаемый при $\delta \gg \Omega a^2$, при этом характерное время релаксации увеличивается под влиянием ПАВ примерно в $\sim a^{-2}$ раз.

За счет сил Ван-дер-Ваальса величина Ω в (7.1) может быть отрицательной. Это возможно для длинных волн в тонких пленках, так как постоянная Гамакера A , входящая в (1.2), имеет порядок 10^{-12} эрг (см., например, [7]). В случае $\Omega < 0$ удобно переписать уравнение (7.1) в новых обозначениях

$$\delta_* = -\Omega a^2, \quad \delta = \delta_* (1 + as), \quad \alpha = z\delta_* \quad (7.3)$$

$$\delta_* z^3 + 4z^2 + sz - 1/3(1 + as) = 0$$

Пусть $\delta_* \ll 1$. Тогда, применяя к решению уравнения (7.3) метод асимптотического сращивания, можно найти следующие асимптотические формулы для корней:

$$z_1 = (\sqrt{1 - 1/4\delta_* s} - 1) 2 / \delta_*, \quad z_2 = 1/3(a + s^{-1}) \quad \text{при } s \gg 1$$

$$z_1 = -1/8(s + \sqrt{s^2 + 16/3}), \quad z_2 = 1/8(-s + \sqrt{s^2 + 16/3}) \quad \text{при } |s| \ll M \quad (7.4)$$

$$z_1 = 1/3(a + s^{-1}), \quad z_2 = (\sqrt{1 - 1/4\delta_* s} - 1) 2 / \delta_* \quad \text{при } s \ll -1$$

$$z_3 = -(\sqrt{1 - 1/4\delta_* s} + 1) 2 / \delta_* \quad (M = \min(a^{-1}, \delta_*^{-1}))$$

¹ О существовании работ [9, 10] автору стало известно [после того, как статья была сдана в редакцию.

При $\delta_* \geq 1$ формулы (7.4) будут пригодны в области $|s| \geq \delta_*^{1/2}$. Значения α , соответствующие z_j , можно обозначить α_j ($j = 1, 2, 3$). Корень α_2 , как видно из (7.4), соответствует волне возрастающей амплитуды. Корни α_1 и α_3 соответствуют либо аperiодическим движениям (при $\delta - \delta_* < 4a$), либо бегущим волнам с частотой, равной $\sqrt{(\delta - \delta_*)/4a} - 1$ и декрементом затухания, равным двум (безразмерные обозначения).

Из формул (7.3) и (7.4) следует, что при переходе δ через окрестность δ_* происходит резкое изменение α_1 и α_2 .

Неравенство $|\Omega| a \gg 1$ есть условие слабого изменения α вне некоторой малой окрестности δ_* . При $|\Omega| a \lesssim 1$ величина α существенно изменяется во всей области $0 < \delta < \delta_*$. Если $|\Omega| a \gg 1$, то $\delta_* \gg a$. При этом с увеличением δ в окрестности δ_* величина α_2 убывает примерно в $(a\delta_*)^{-1}$ раз, $|\alpha_1|$ возрастает в это же число раз.

В пленках, существующих в пене, $(a\delta_*)^{-1}$ может быть величиной порядка десятков тысяч и более. Поэтому, хотя согласно (7.4) поведение α_2 описывается гладкими функциями, практически можно считать, что при $\delta < \delta_*$ пленка не стабилизирована, а при $\delta > \delta_*$ стабилизирована. Этот вывод согласуется с результатом авторов [9, 10], полученным путем численных расчетов на ЭВМ.

Если капиллярные силы в волне нарастающей амплитуды малы по сравнению с силами Ван-дер-Ваальса $k^2\sigma \ll A/\pi h^2$, то условием малого отличия слоя ПАВ от несжимаемого на основании формул (1.2), (4.3), (7.3) и (7.4) будет $|\varepsilon| > 1/4 A/\pi h^2$. При меньших упругостях $|\varepsilon|$ пленка практически мгновенно должна разрушиться. Из формул (7.3) и (7.4) можно также заключить, что одно из отличий стабилизированной пленки от нестабилизированной проявляется в возникновении за счет упругости слоя ПАВ бегущих волн, частота которых растет с ростом упругости, тогда как декремент затухания остается постоянным.

Автор благодарит В. Г. Левича за постановку темы работы, А. А. Трапезникова за внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступила 6 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Шмидт А. Г. О гашении капиллярно-гравитационных волн вязкой жидкости конечной глубины поверхностно-активными веществами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. Аветисян Р. А., Трапезников А. А. Новые данные о гашении волн монослоями нерастворимых веществ. Ж. физ. химии, 1964, т. 38, вып. 12.
4. Bierwagen G. P. Comments on the shape of the damping coefficient curve for capillary waves with an analogy to the amplitude response of a forced damped oscillator. J. Colloid and Interface Sci., 1969, vol. 31, No. 4.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 4. Статистическая физика. М., Гостехиздат, 1954.
6. Архипов Р. Г. Неустойчивость течения сверхтекучей пленки. ЖЭТФ, 1957, т. 33, вып. 1.
7. Duvis E. M. The equilibrium thickness of free liquid films. Dissertation. Hague., 1962.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
9. Lucassen J., Tempel M. van den, Vrij A., Hesselink F. Th. Waves in thin liquid films. 1. The different modes of vibration. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1970, Ser. B, vol. 73, № 2, pp. 109—123.
10. Vrij A., Hesselink F. Th., Lucassen J., Tempel M. van den. Waves in thin liquid films. 2. Symmetrical modes in very thin films and film rupture. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1970, Ser. B, vol. 73, № 2, pp. 124—135.