УДК 532.51 : 538.4

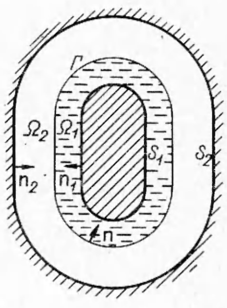
РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКОГО ДИЭЛЕКТРИКА И ЖИДКОГО ИДЕАЛЬНОГО ПРОВОДНИКА

А. И. Жакин

(Харьков)

Пусть неподвижный сосуд (фиг. 1) полностью заполнен двумя идеальными несмешивающимися жидкостями, одна из которых является идеальным проводником, другая — диэлектриком с диэлектрической постоянной ε. Предполагаем, что стенки сосуда — идеальные проводники, обе жидкости находятся при одинаковой температуре, разделяющая поверхность этих жидкостей не имеет общих точек со стенками сосуда.

Введем обозначения: $\Omega_1(\Omega_2)$ — область, занимаемая проводником (диэлектриком); $S_1(S_2)$ — стенка сосуда, граничащая с проводником (диэлектриком); Γ — разделяющая поверхность жидкостей; $\mathbf{n}$ — орт нормали к Γ, направленной внутрь области Ω_1; $\mathbf{n}_i$ — орт нормали к S_i, направленной внутрь области $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$; ρ_i — плотность проводника (диэлектрика); σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость — жидкость; φ — потенциал электрического поля; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки; V_i — объем области Ω_i.



Фиг. 1

Пусть электрическое поле возникает за счет разности потенциалов U между S_1 и S_2, внешние силы имеют потенциал, равный Π_i в $\Omega_i (i = 1, 2)$.

1. Условие равновесия жидкостей в сосуде. При выводе условий равновесия будем исходить из вариационного принципа стационарного значения потенциальной энергии. Выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$W = \sigma \int_{\Gamma} d\Gamma + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \Pi_i d\Omega - \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \mathrm{const}. \tag{1.1}$$

Пусть $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ — вектор смещения частицы жидкости. Будем считать, что $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ есть дважды непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию неразрывности в области Ω, условию непротекания на поверхности S и условию непрерывности нормальной составляющей на поверхности Γ

$$\operatorname{div} \mathbf{h}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (\mathbf{r} \in \Omega); \tag{1.2}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r})\mathbf{n}_i = 0 \qquad (i = 1, 2; \ \mathbf{r} \in S = S_1 + S_2); \tag{1.3}$$

$$\lim_{\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}} \mathbf{h}(\mathbf{r}_1)\mathbf{n} = \lim_{\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}} \mathbf{h}(\mathbf{r}_2)\mathbf{n} \tag{1.4}$$

$$(\mathbf{r} \in \Gamma, \ \mathbf{r}_1 \in \Omega_1, \quad \mathbf{r}_2 \in \Omega_2).$$

Предполагаем, что $U = \mathrm{const}$ при виртуальных смещениях частицы жидкости, что возможно лишь при наличии внешнего источника энергии [1].

Используя формулы для вариаций площади поверхности и орта нормали к поверхности [2], получим выражение для первой вариации потенциальной энергии в виде

$$\delta W = \int_\Gamma \left(-2\sigma H + \frac{\varepsilon}{8\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2\right) N d\Gamma + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \nabla \Pi_i \mathbf{h} d\Omega,$$

где H — средняя кривизна поверхности Γ; $N = \mathbf{h}(\mathbf{r})\mathbf{n}$. Если воспользоваться правилом неопределенных множителей Лагранжа (для условия (1.2)) и формулой Гаусса — Остроградского, то необходимое условие стационарности функционала (1.1) будет выглядеть в виде равенства нулю выражения

$$(1.5)\qquad \delta W_* = \int_\Gamma \left(-2\sigma H - [p] + \frac{\varepsilon}{8\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2\right) N d\Gamma + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \nabla (\Pi_i + p_i)\, \mathbf{h} d\Omega$$

для всех $\mathbf{h}(\mathbf{r})$, удовлетворяющих условиям (1.3), (1.4). В выражении (1.5) $[p] = p_1 - p_2$ — скачок некоторой величины p при переходе через поверхность Γ. В силу достаточной произвольности $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ должны выполняться равенства

$$(1.6)\qquad -2\sigma H - [p] + (\varepsilon/8\pi)(\partial\varphi/\partial n)^2 = 0 \text{ на } \Gamma;$$

$$(1.7)\qquad \Pi_i + p_i = c_i \text{ в } \Omega_i,$$

где c_i $(i = 1,\ 2)$ — некоторые постоянные. Используя уравнения электростатики и соотношения (1.6), (1.7), получаем следующие уравнения и краевые условия, описывающие равновесное состояние данной системы:

$$(1.8)\qquad -2\sigma H + [\Pi] + (\varepsilon/8\pi)(\partial\varphi/\partial n)^2 + c = 0 \text{ на } \Gamma;$$

$$(1.9)\qquad \int_{\Omega_i} d\Omega = V_i \quad (i = 1,\ 2);$$

$$(1.10)\qquad \Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega_2,\ \varphi|_{S_2} = 0,\ \varphi|_\Gamma = U,$$

где c — некоторая постоянная.

2. Устойчивость равновесного состояния жидкостей. Под устойчивостью равновесного состояния жидкостей будем понимать устойчивость равновесных форм поверхности раздела Γ [3]. Будем считать, что имеет место принцип минимума потенциальной энергии [3], поэтому об устойчивости равновесного состояния данной системы можно судить, за исключением некоторых особых случаев, по знаку второй вариации потенциальной энергии.

Проварьировав выражение для первой вариации (1.5) с учетом того, что в равновесном состоянии выполняются соотношения (1.8 — (1.10) и что $\Pi_i(\mathbf{r})(i = 1,\ 2;\ \mathbf{r} \in \Omega)$ — заданная функция точки, получим

$$(2.1)\qquad \sigma^{-1}\delta^2 W_* = \int_\Gamma \left(-\Delta_\Gamma N + aN + \frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) N d\Gamma,$$

где

$$a = \sigma^{-1}\frac{\partial[\Pi]}{\partial n} - 4H^2 + 2K + \frac{1}{2\pi\sigma} H \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2;$$

ψ — локальное возмущение потенциала электрического поля φ; Δ_Γ — оператор Лапласа — Бельтрами [2]; K — Гауссова кривизна. Функция $N(\mathbf{r})(\mathbf{r} \in \Gamma)$ должна удовлетворять вытекающему из (1.2) условию сохранения объема

$$(2.2)\qquad \int_\Gamma N d\Gamma = 0.$$

Функция $\psi(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in \Omega_2$) должна удовлетворять следующей краевой задаче:

$$\Delta\psi = 0 \text{ в } \Omega_2; \tag{2.3}$$

$$\psi|_{S_2} = 0, \ \psi|_\Gamma = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} N. \tag{2.4}$$

Введем условие нормировки для $N(\mathbf{r})$

$$\int_\Gamma N^2 d\Gamma = 1, \tag{2.5}$$

тогда равновесное состояние, описываемое соотношениями (1.8) — (1.10), устойчиво, если минимум квадратичного функционала (2.1) при условиях (2.2) — (2.5) положителен, и неустойчиво в противном случае.

Заметим, что если квадратичный функционал (2.1) ограничен снизу на множестве дважды непрерывно-дифференцируемых функций $N(\mathbf{r})$, удовлетворяющих условиям (2.2), (2.5), то его минимум на этом множестве функций равен наименьшему собственному числу λ_* следующей краевой задачи [4]:

$$-\Delta_\Gamma N + aN + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n} + m = \lambda N \text{ на } \Gamma; \tag{2.6}$$

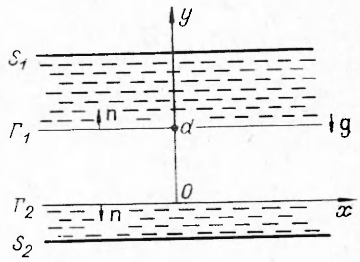
$$\int_\Gamma N d\Gamma = 0, \ \int_\Gamma N^2 d\Gamma = 1; \tag{2.7}$$

$$\Delta\psi = 0, \ \psi|_{S_2} = 0, \ \psi|_\Gamma = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} N, \tag{2.8}$$

где m — некоторая постоянная.

3. Решение некоторых задач. При исследовании устойчивости равновесного состояния рассматриваемых ниже задач будем пользоваться соотношениями (2.6) — (2.8), так как для данных случаев можно показать, что квадратичный функционал (2.1) ограничен снизу.

1. Рассмотрим плоскую задачу об устойчивости системы, состоящей из двух проводников, разделенных диэлектриком (фиг. 2). Жидкости находятся между двумя параллельными электродами, между которыми поддерживается постоянная разность потенциалов U. Введем систему координат так, как указано на фиг. 2, а индексы 1, 3, 2 будем относить соответственно к верхнему и нижнему проводникам и диэлектрику. Интенсивность поля сил тяжести равна $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$, где $\mathbf{e}_y$ — орт оси Oy.



Фиг. 2

Введем обозначения: Ω—область, занимаемая диэлектриком; $\Gamma_1(\Gamma_2)$—разделяющая поверхность между верхним (нижним) проводником и диэлектриком; d—толщина слоя диэлектрика; $\mathbf{n}$ — орт нормали на $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, направленной внутрь области, занимаемой проводниками; σ_i — коэффициент поверхностного натяжения на Γ_i; $y = f_i(x)$ —разделяющая поверхность Γ_i ($i = 1, 2$).

В данном случае условие (1.8) на Γ_i не изменится, а (1.9) заменится на

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_i(x)\,dx = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Условия (1.10) примут вид

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \ \varphi|_{\Gamma_1} = 0, \ \varphi|_{\Gamma_2} = U.$$

Видно, что равновесное состояние системы описывается соотношениями

$$\Gamma_1 : f_1 \equiv 0,\ \Gamma_2 : f_2 \equiv d,\ \varphi = Ey,\ E = U/d.$$

Устойчивость системы выражается в виде условия положительности минимального собственного числа λ_* следующей краевой задачи:

$$-\sigma_1\Delta_{\Gamma_1}N_1 + a_1N_1 + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n} + m_1 = \lambda N_1 \text{ на } \Gamma_1; \tag{3.1}$$

$$-\sigma_2\Delta_{\Gamma_2}N_2 + a_2N_2 + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n} + m_2 = \lambda N_2 \text{ на } \Gamma_2; \tag{3.2}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} N_i(x)\,dx = 0,\quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(N_1^2(x) + N_2^2(x)\right)dx = 1; \tag{3.3}$$

$$\Delta\psi = 0,\ \psi\big|_{\Gamma_1} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}N_1,\ \psi\big|_{\Gamma_2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}N_2 \quad (i = 1,2), \tag{3.4}$$

где $a_1 = g(\rho_2 - \rho_1)$; $a_2 = g(\rho_3 - \rho_2)$; m_1, m_2 — некоторые постоянные. Собственные функции краевой задачи (3.1) — (3.4) суть $\sin kx$, $\cos kx$, где k — волновое число, поэтому решение ищем в виде

$$N_1 = A_1 \sin kx,\ N_2 = A_2 \sin kx. \tag{3.5}$$

Тогда возмущение потенциала электрического поля имеет вид

$$\psi = -(E/\operatorname{sh} kd)\sin kx(\operatorname{sh} k(y - d) + \operatorname{sh} ky). \tag{3.6}$$

Подставляя (3.5), (3.6) в (3.1), (3.2), приходим к однородной линейной системе относительно коэффициентов A_1, A_2. Приравнивая детерминант системы нулю, получаем выражение для собственного числа задачи в виде функции от k

$$\lambda = \lambda(k) = (1/2)(F \pm \sqrt{F^2 - 4B}), \tag{3.7}$$

где $F = \sigma_1k^2 + a_1 + \sigma_2k^2 + a_2 - (\varepsilon/2\pi)E^2k \operatorname{cth} kd$;

$$B = (\sigma_1k^2 + a_1)(\sigma_2k^2 + a_2) - (\varepsilon/4\pi)E^2k \operatorname{cth} kd\,(\sigma_1k^2 + a_1 + \sigma_2k^2 + a_2).$$

Очевидно, при некотором $k = k_*$ достигается минимум выражения (3.7). Критическая величина напряженности электрического поля найдется из условия

$$\lambda_* = \lambda(k_*) = 0.$$

Проанализируем предельные случаи, когда $d\to 0$ и $d\to\infty$ при условии $E = \mathrm{const}$. Из (3.7) можно видеть, что если в выражении в скобках взять знак минус, то $\lambda(k) \downarrow -\infty$ при $d\to 0$ для любого фиксированного k, т. е. чем ближе расположены проводящие плоскости, тем они менее устойчивы. Устремив $d\to\infty$, получим

$$\lambda = (1/2)[\sigma_1k^2 + a_1 + \sigma_2k^2 + a_2 - (\varepsilon/2\pi)E^2k \pm (\sigma_1k^2 + a_1 - \sigma_2k^2 - a_2)],$$

откуда

$$\lambda^* = \min_k \lambda = \min\{\min_k \lambda_1, \min_k \lambda_2\}, \tag{3.8}$$

где

$$\lambda_i = \sigma_ik^2 + a_i - (\varepsilon/4\pi)\,E^2k(i = 1, 2). \tag{3.9}$$

Из (3.8) следует, что с увеличением расстояния между проводящими плоскостями их влияние друг на друга ослабевает и в пределе задача сводится к устойчивости плоской границы раздела между двумя полубесконечными областями, одна из которых — идеальный проводник, другая — диэлектрик, а электрическое поле на бесконечности постоянно и направлено перпендикулярно к поверхности раздела. Эта задача рассматривалась в работе [5]. Выражения для критической величины электрического поля, полученные в [5] и из (3.9), совпадают:

$$E_*^2 = \frac{8\pi}{\varepsilon} \sqrt{g[\rho]\sigma},$$

где $[\rho]$ — скачок плотности при переходе через поверхность раздела; σ — коэффициент поверхностного натяжения на разделяющей поверхности.

2. Аналогичным образом можно рассмотреть плоскую задачу об устойчивости системы, состоящей из двух диэлектриков, разделенных идеальным проводником и находящихся между двумя параллельными электродами. Минимальное собственное число этой задачи выражается по формуле (3.8), где надо положить

$$\lambda_i = \sigma_i k^2 + a_i - \frac{\varepsilon_i}{4\pi} E_i^2 k,$$

здесь ε_i — диэлектрическая постоянная i-го диэлектрика; E_i — величина напряженности электрического поля в i-м диэлектрике ($i = 1, 2$).

В заключение заметим, что, применяя данный метод, можно исследовать устойчивость равновесного состояния системы, состоящей из нескольких чередующихся слоев жидких диэлектриков и проводников.

3. Рассмотрим устойчивость заряженной сферической капли. Пусть сферическая капля радиуса R, заряженная зарядом величины Q, находится в состоянии невесомости (либо выполняется условие $|g[\rho]R^2| \ll \sigma$). Введем сферическую систему координат (r, α_1, α_2), где r — расстояние от начала координат, помещенного в центре капли, до текущей точки; α_1, α_2 — азимутальный и полярный углы. Очевидно, состояние равновесия описывается равенствами

$$\Gamma : r \equiv R, \qquad \varphi = -UR/r,$$

где $U = Q/(\varepsilon R)$.

Краевая задача о собственных значениях будет иметь вид, аналогичный (2.6) — (2.8), с той разницей, что в данном случае необходимо потребовать ограниченность на бесконечности возмущения потенциала электрического поля ψ. Собственные функции рассматриваемой краевой задачи имеют вид

$$N_{ij} = A_{ij} \cos i\alpha_1 P_i^j(\cos\alpha_2) \tag{3.10}$$
$$(i = 0,1,2,\ldots;\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm i),$$

где $P_i^j(\cos\alpha_2)$ — присоединенные функции Лежандра. Возмущение потенциала электрического поля выражается

$$\psi_{ij} = A_{ij} E \left(\frac{R}{r}\right)^i \cos j\alpha_1 P_i^j(\cos\alpha_2), \tag{3.11}$$

где $E = U/R$. Подставляя (3.10), (3.11) в (2.6), для данного случая будем иметь

$$\lambda_i = \frac{i(i+1)}{R^2} - \frac{2}{R^2} - (i-1)\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\sigma R^5}$$
$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Рассмотрим такие возмущения, при которых неподвижен центр массы капли. Тогда значения λ_i при $i = 0$, 1 исключаются из рассмотрения, а условие устойчивости неподвижной заряженной капли примет вид

$$Q^2 < 16\pi\varepsilon\sigma R^3.$$

Заряд $Q = \sqrt{16\varepsilon\sigma\pi R^3}$ носит название предельного заряда Рэлея [7]. Рассматривая аналогичную задачу для плоского случая, можно получить критерий устойчивости в виде

$$Q^2 < 3\pi\varepsilon\sigma R,$$

где Q — заряд на единицу длины заряженного шнура.

Поступила 30 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. М., «Наука», 1976.
2. **Бляшке В.** Дифференциальная геометрия. М., ОНТИ, 1935.
3. **Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.** Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
4. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
5. **Френкель Я. И.** К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме.— ЖЭТФ, 1936, т. 6, вып. 4.
6. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1953.
7. **Мелчер Дж. Р.** Электрогидродинамика.— «Магнит. гидродинамика», 1974, № 2.

УДК 532.526.4

ВЛИЯНИЕ ШЕРОХОВАТОСТИ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ГРАДИЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ СЖИМАЕМОГО ГАЗА С ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕЙ

Г. Ф. Сивых

(*Новосибирск*)

В отличие от большого числа методов расчета турбулентного пограничного слоя на гладкой поверхности, количество известных методов расчета обтекания шероховатых поверхностей крайне незначительно. При этом практически все они ограничиваются случаем песочной зернистой шероховатости и дают возможность рассчитать коэффициент поверхностного трения только для режима развитой шероховатости при отсутствии градиента давления. Такое положение связано с большим разнообразием геометрических форм шероховатости и способов ее распределения по поверхности, что затрудняет моделирование течения в окрестности элементов шероховатости.

В таком случае определенным преимуществом перед другими подходами к решению задачи обладает метод относительного соответствия [1]. Применение такого подхода к рассматриваемой проблеме позволяет распространить возможности расчета турбулентного пограничного слоя с помощью предельных относительных законов [2] на случай шероховатой поверхности.

1. Введем величину $\Psi_r = (c_{fr}/c_{fs})_{\mathrm{Re}_\theta}$, представляющую собой относительное изменение коэффициента трения поверхности вследствие шероховатости. Здесь сопоставление коэффициентов трения на шероховатой поверхности c_{fr} и гладкой c_{fs} производится для одинаковых внеш-