УДК 539.374

О ПЛАСТИЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

А. И. ЧАНЫШЕВ

(*Новосибирск*)

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z напряженно-деформированное состояние элемента среды характеризуется симметричными тензорами ранга 2 T_σ, T_ε и соотношения между упругими деформациями и напряжениями представляют собой обобщенный закон Гука

(1) $$T_\varepsilon = D \cdot\cdot\, T_\sigma,$$

где D — тензор упругих податливостей ранга 4.

Пусть тензоры T_i (здесь всюду индексы i, j принимают значения 1, . . ., 6) образуют ортонормированную систему собственных тензоров тензора D, а $1/\lambda_i$ являются собственными числами [1, 2]:

(2) $$D \cdot\cdot\, T_i = T_i/\lambda_i,\ (T_i,\ T_j) = \delta_{ij}.$$

Разложим T_σ, T_ε по базисным тензорам T_i:

(3) $$T_\varepsilon = Э_i T_i,\ T_\sigma = S_i T_i.$$

Из (1)—(3) следует

(4) $$Э_i = S_i/\lambda_i.$$

Введем следующее определение. Оси в тензорном пространстве, определяемые базисными тензорами T_i, будем называть осями анизотропии исходного материала.

Оси анизотропии на стадии упругого деформирования элемента среды определяются значениями упругих податливостей материала и не зависят от значений тензоров T_σ, T_ε.

Примем следующее основное допущение: будем предполагать, что ориентация осей анизотропии в тензорном пространстве остается прежней и с появлением пластических деформаций.

Для рассмотрения вариантов теории пластического течения необходимо ввести в рассмотрение тензоры приращений напряжений, деформаций, пластических деформаций соответственно $T_{\Delta\sigma}$, $T_{\Delta\varepsilon}$, $T_{\Delta\varepsilon_p}$. В базисе T_i имеем

$$T_{\Delta\sigma} = \Delta S_i T_i,\quad T_{\Delta\varepsilon} = \Delta Э_i T_i,\quad T_{\Delta\varepsilon_p} = \Delta Э_i^p T_i.$$

Исследуем возможные случаи.

1. *Случай полной анизотропии.* Пусть все собственные числа различны

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \lambda_5 \neq \lambda_6.$$

Рассмотрим равенства (4). Если анизотропный материал деформируется упруго, то значения λ_i постоянны и зависимости $S_i = S_i(Э_i)$ линейны (см. фигуру). При достижении и превышении какими-то из величин S_i некоторых значений S_i^0

$$|S_i| \geqslant S_i^0$$

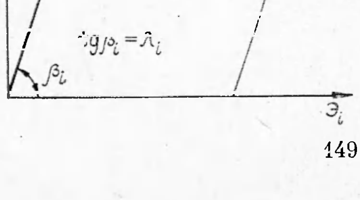
(S_i^0 — конечный или бесконечный предел упругости анизотропного материала в направлении оси с ортом T_i, устанавливается экспериментально) произойдут пластические изменения деформаций $Э_i$ и зависимости $S_i = S_i(Э_i)$ уже не будут линейными. Общий вид диаграммы деформирования $S_i = S_i(Э_i)$ представлен на фигуре. При снятии нагрузок будем, как обычно, предполагать, что разгрузка происходит по упругому закону.

Уравнения классических теорий для одномерных ситуаций общеизвестны. Они учитывают как изотропный, так и анизотропный характер упрочнения вдоль соответствующих осей деформирования. Ограничимся здесь рассмотрением случая изотропного упрочнения, основные уравнения этих теорий имеют следующий вид:

деформационная теория пластичности

(5) $$Э_i = S_i/\lambda_i^c,$$

где $\lambda_i^c = \lambda_i^c(S_i)$ — секущий модуль па диаграмме $S_i = S_i(Э_i)$;



теория пластического течения

(6) $$\Delta Э_i^p = \Delta S_i/\lambda_i^p,$$

где $\lambda_i^p = \lambda_i^p(S_i)$ — касательный модуль на диаграмме $S_i = S_i(Э_i^p)$;

теория идеальной пластичности

(7) $$|S_i| = S_i^0.$$

Уравнения (5)—(7) справедливы при условии $S_i \Delta S_i \geqslant 0$ (не суммировать!), если $S_i \Delta S_i \leqslant 0$, то вдоль соответствующих осей будет происходить упругая разгрузка по закону $\Delta Э_i = \Delta S_i / \lambda_i$.

2. *Случай частичной изотропии.* Пусть какие-либо собственные числа совпадают между собой

$$\lambda_k = \lambda_m = \ldots = \lambda_{km} \; \ldots \; (k \neq m \neq \ldots).$$

В этом случае из равенств (3), (4) находим

(8) $$Э_k \mathrm{T}_k + Э_m \mathrm{T}_m + \ldots = (S_k \mathrm{T}_k + S_m \mathrm{T}_m + \ldots)/\lambda_{km} \ldots$$

Подпространство, определяемое базисными тензорами T_k, T_m, . . ., будем называть изотропным подпространством.

В случае обычного закона Гука ($\lambda_1 = \ldots = \lambda_5 \neq \lambda_6$) изотропное подпространство совпадает с девиаторным подпространством.

Построение уравнений классических теорий в изотропных подпространствах не связано с преодолением каких-либо трудностей. Для наглядности рассмотрим, например, случай, когда $\lambda_k = \lambda_m = \lambda_{km}$. В этом случае изотропное подпространство есть плоскость изотропии.

Введем в рассмотрение следующие тензоры:

$$t_\varepsilon = Э_k \mathrm{T}_k + Э_m \mathrm{T}_m, \quad t_\sigma = S_k \mathrm{T}_k + S_m \mathrm{T}_m.$$

Из формулы (8) следует

(9) $$t_\varepsilon = t_\sigma / \lambda_{km}.$$

Введем теперь полярные координаты тензоров t_ε и t_σ:

$$Э_{km} = \sqrt{Э_k^2 + Э_m^2}, \quad \mathrm{tg}\, 2\Omega_{km} = Э_m / Э_k.$$

$$S_{km} = \sqrt{S_k^2 + S_m^2}, \quad \mathrm{tg}\, 2\theta_{km} = S_m / S_k.$$

Из равенства (9) следует

$$Э_{km} = S_{km} / \lambda_{km}, \quad \Omega_{km} = \theta_{km}.$$

Если анизотропный материал деформируется упруго в рассматриваемой плоскости изотропии (плоскостей изотропии может быть несколько), то λ_{km} — константа и зависимость $S_{km} - S_{km}(Э_{km})$ линейная. При достижении и превышении величиной S_{km} предела упругости

$$S_{km} \geqslant S_{km}^0$$

зависимость $S_{km}(Э_{km})$ уже не будет линейной. Общий вид диаграммы деформирования $S_{km} - S_{km}(Э_{km})$ такой, как на фигуре. При снятии нагрузки предполагаем, что разгрузка происходит по упругому закону.

Запишем уравнения классических теорий в рассматриваемом случае, предполагая, что упрочнение носит изотропный характер:

деформационная теория пластичности

(10) $$t_\varepsilon = t_\sigma / \lambda_{km}^c,$$

где $\lambda_{km}^c = \lambda_{km}^c (S_{km})$ — секущий модуль на диаграмме $S_{km} = S_{km} (Э_{km})^0$, полученной при пропорциональном в плоскости изотропии нагружении; тензорное равенство (10) эквивалентно двум скалярным:

$$Э_{km} = S_{km} / \lambda_{km}^c, \quad \Omega_{km} = \theta_{km};$$

теория пластического течения

(11) $$t_{\Delta\varepsilon_p} = t_\sigma \frac{(t_{\Delta\sigma}, t_\sigma)}{(t_\sigma, t_\sigma)} \Big/ \lambda_{km}^p,$$

где $\lambda_{km}^p = \lambda_{km}^p (S_{km})$ — касательный модуль на кривой $S_{km} = S_{km}(Э_{km})^0$, полученной при пропорциональном в плоскости изотропии нагружении;

$$t_{\Delta\varepsilon_p} = \Delta Э_k^p \mathrm{T}_k + \Delta Э_m^p \mathrm{T}_m; \quad t_{\Delta\sigma} = \Delta S_k \mathrm{T}_k + \Delta S_m \mathrm{T}_m;$$

теория идеальной пластичности

(12) $$S_{km} = S_{km}^0; \quad \Delta Э_k^p / S_k = \Delta Э_m^p / S_m.$$

Уравнения (10)—(12) справедливы при условии $(t_{\Delta\sigma}, t_\sigma) \geqslant 0$, если $(t_{\Delta\sigma}, t_\sigma) \leqslant 0$, то происходит упругая разгрузка по закону $t_{\Delta\varepsilon} = t_{\Delta\sigma} / \lambda_{km}$.

В плоскостях изотропии аналогично [3—6] могут быть рассмотрены различные другие модели сложного нагружения, условие $S_{km} = \bar{S}^{0}_{km}$ аппроксимировано кусочно-линейными поверхностями.

Отметим, что если множество собственных чисел состоит из простых и кратных корней, то система уравнений, описывающая упругопластическую деформацию анизотропной среды, представляет собой комбинацию систем уравнений двух видов: системы уравнений, описывающей процесс деформирования вдоль соответствующих осей анизотропии (построение ведется, как в случае 1), и системы уравнений, описывающей процесс деформирования в соответствующих изотропных подпространствах.

3. *Случай полной изотропии.* Пусть все корни равны между собой:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \ldots = \lambda_6.$$

Случай 3, очевидно, является частным моментом случая 2, построение уравнений классических теорий пластичности здесь совершенно аналогично предыдущему. В случае 3 изотропным будет все рассматриваемое пространство.

В заключение отметим, что большинство упругопластических моделей записывается в виде

$$\mathrm{T}_{\Delta\varepsilon} = \underset{\cdot}{D} \cdot\cdot \mathrm{T}_{\Delta\sigma},$$

поэтому изложенный выше анализ можно использовать для «отбраковки» некоторых из существующих моделей и построения новых.

Поступила 2 III 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В. В.** О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса).— ПММ, 1963, т. 27, № 5.
2. **Лурье К. А.** Некоторые задачи оптимального изгиба и растяжения упругих пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6.
3. **Ишлинский А. Ю.** Общая теория пластичности с линейным упрочнением.— Укр. мат. журнал АН УССР, 1954, т. 6, № 3.
4. **Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.** Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения.— ПММ, 1958, т. 22, № 1.
5. **Христианович С. А., Шемякин Е. И.** О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 5.
6. **Ннамутдинов А. И.** О пластической деформации материалов при сложном нагружении.— ПМТФ, 1979, № 4.

УДК 532.593 : 539.3

ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

А. Е. БУКАТОВ, Л. В. ЧЕРКЕСОВ, А. А. ЯРОШЕНКО

(Севастополь)

Изучаются пространственные изгибно-гравитационные волны, возникающие под действием нагрузки, движущейся по поверхности плавающей упругой пластинки, находящейся в состоянии равномерного растяжения или сжатия. Без учета растягивающих и сжимающих усилий изгибно-гравитационные пространственные волны рассматривались в [1, 2]. Плоские волны в условиях продольного сжатия изучались в [3, 4].

1. Пусть на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H плавает тонкая изотропная упругая пластинка. В горизонтальных направлениях пластинка и жидкость не ограничены. По поверхности пластинки перемещается со скоростью v нагрузка $p = p_0 f(x_1, y)$, $x_1 = x + vt$. Рассмотрим влияние равномерного растяжения на возникающие изгибно-гравитационные корабельные волны, считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб пластинки ζ малыми.

С учетом равномерного растяжения [5—7] в системе координат x_1, y, связанной с движущейся областью давлений, задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости φ

$$\Delta\varphi = 0,\ -H < z < 0,\ -\infty < x,\ y < \infty \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$D_1\nabla^4\zeta - Q_1\Delta_1\zeta + \varkappa_1 v^2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \zeta + \frac{v}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -p_1 f(x, y) \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{1.2}$$

$$\partial\varphi/\partial z = 0 \ \text{при}\ z = -H,$$