

УДК 537.84

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ БИНГАМОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

В. И. Вишняков, С. М. Вишнякова, П. В. Дружинин,
Л. Д. Покровский

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
105005 Москва, Россия

E-mails: sofvis@mail.ru, shivasof@mail.ru, druzhinine@mail.ru, valenki140@gmail.com

Рассмотрена задача о влиянии скачкообразного изменения внешнего магнитного поля на течение электропроводящей бингамовской жидкости в двумерном канале. Показана возможность использования при исследовании магнитогидродинамических течений бингамовских сред метода раздельного описания течений в пластической и вязкой областях. Получено точное уравнение, описывающее зависимость положения границы области пластического течения от времени и от индукции магнитного поля. Показано, что соответствующая задача Коши имеет единственное асимптотически устойчивое решение. Для некоторых значений параметров представлены результаты численного интегрирования, подтверждающие качественные выводы.

Ключевые слова: магнитореология, плоский канал, электропроводящая бингамовская жидкость, магнитное поле.

DOI: 10.15372/PMTF20190304

Введение. В настоящее время в ряде магнитогидродинамических устройств в качестве рабочих сред используются магнитореологические жидкости, в том числе бингамовские жидкости [1–4]. Эти жидкости существенно отличаются от обычных ньютоновских, и при их эксплуатации необходимо учитывать некоторые особенности, проявляющиеся при течении в каналах [5].

В настоящей работе используется реологическая модель бингамовской жидкости, в одномерном случае описываемая уравнением

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign} \frac{dV}{dZ} + \eta \frac{dV}{dZ},$$

где τ — касательное напряжение сдвига; τ_0 — предельное напряжение сдвига; V — проекция скорости \mathbf{V} на ось X , направление которой противоположно направлению градиента внешнего давления, ось Z перпендикулярна оси X ; η — динамическая вязкость. Такая модель используется при описании различных течений многих реальных бингамовских сред [6].

При течении бингамовских жидкостей в канале возможно образование одновременно двух областей: вязкого (сдвигового) течения ($\tau > \tau_0$) и пластического течения ($\tau = \tau_0$),

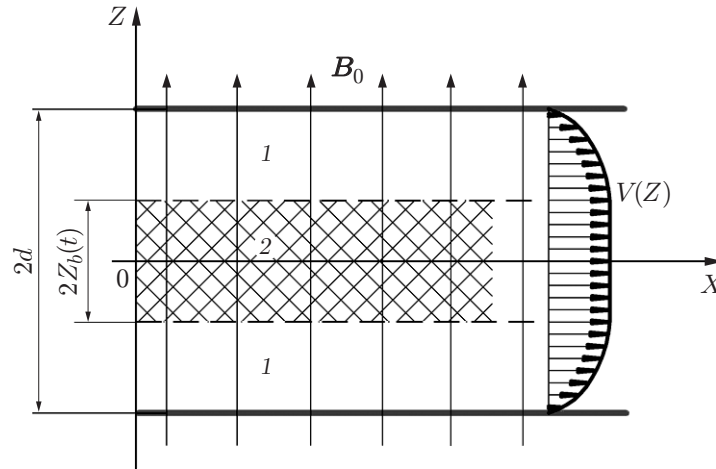


Рис. 1. Схема течения:

1 — области вязкого течения, 2 — область пластического течения

однако в особых случаях зона пластического течения может отсутствовать [7]. Это позволяет рассмотреть течение в каждой области независимо, а общее решение получить из условий сопряжения решений задачи на границе раздела областей [8].

Примеры стационарных магнитогидродинамических течений в каналах свидетельствуют о зависимости ширины зоны пластического течения от напряженности внешнего магнитного поля [9]. Поэтому даже слабо проявляющиеся пластические свойства, наблюдаемые практически у всех реальных сред, в случае магнитогидродинамических течений могут существенно проявляться в сильных магнитных полях. Это позволяет измерить предельное напряжение τ_0 для бингамовских сред, даже незначительно отличающихся от ньютоновских. В случае резкого увеличения напряженности внешнего магнитного поля область пластического течения может заполнить большую часть канала или почти весь канал.

Ниже изучается течение электропроводящей бингамовской жидкости в плоском канале при скачкообразном возрастании напряженности внешнего магнитного поля, что имеет большое практическое значение, поскольку проточные части многих магнитогидродинамических машин выполнены в виде каналов с большим значением отношения ширины канала к его высоте [10].

1. Постановка задачи и ее решение. Задача о течении электропроводящей бингамовской жидкости в плоском канале рассматривается в постановке, аналогичной постановке известной задачи Гартмана. Будем полагать, что зона пластического течения занимает центральную часть канала и симметрична относительно оси Z .

Схема течения приведена на рис. 1. Течение жидкости происходит в направлении оси X в магнитном поле, которое является суперпозицией внешнего однородного магнитного поля с индукцией \mathbf{B}_0 и поля \mathbf{B}_{ind} , индуцированного токами, циркулирующими в области течения. Иными словами, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{ind} = (B_X; 0; B_0)$, где $B_X = \pm B_{ind}$. Полагается, что величина индукции внешнего магнитного поля B_0 изменяется скачкообразно. Также полагается, что проводимость стенок канала равна нулю, магнитная проницаемость близка к единице, а резкое изменение напряженности магнитного поля не приводит к существенному изменению параметров жидкости. В случае предельного напряжения сдвига в центре канала возможно образование ядра потока (область пластического течения), движущегося как твердое тело с касательным напряжением τ_0 на границе.

Граница, разделяющая области вязкого и пластического течений, считается функцией времени $Z_b = Z_b(t)$, подлежащей определению.

Поскольку проводимость стенок канала равна нулю, а проводимость жидкости не равна нулю, вектор электрического поля может иметь единственную отличную от нуля компоненту $E_Y = E_Y(Z_b)$.

Рассмотрим элемент области пластического течения длиной ΔX , высотой $2Z_b$ и единичной толщины.

Масса выделенного элемента изменяется за счет перехода некоторого количества вещества из зоны вязкого течения в область пластического течения либо наоборот. Относительная скорость вдоль оси X отделившейся (присоединившейся) части элемента и измененной массы элемента равна нулю при $Z = Z_b$, поэтому нестационарное уравнение движения (уравнение Мешерского) для указанного элемента можно записать в виде

$$m(t) \frac{dV(Z_b)}{dt} = 2\Delta p Z_b - 2\tau_0 \Delta X + (\sigma E_Y B_0 - \sigma V(Z_b) B_0^2) 2Z_b \Delta X. \quad (1)$$

Здесь $m(t) = 2\rho Z_b \Delta X$ — масса выделенного элемента; ρ — плотность жидкости; σ — электропроводность жидкости; первый член в правой части равенства содержит градиент давления вдоль оси X , второй представляет собой результирующую поверхностную силу, действующую на выделенный элемент, последний член — результат действия объемной магнитной силы. Обозначив через $P = -dp/dX$ постоянный градиент внешнего давления, уравнение (1) представим в виде

$$\rho \frac{dV(Z_b)}{dt} = P + \sigma E_Y B_0 - \frac{\tau_0}{Z_b} - \sigma V(Z_b) B_0^2. \quad (2)$$

Принимая в качестве характерных параметров безразмерные комбинации указанных физических величин

$$x = \frac{X}{d}, \quad z = \frac{Z}{d}, \quad u = V \frac{\eta}{Pd^2}, \quad \theta = t \frac{\eta}{\rho d^2}, \quad S = \frac{\tau_0}{Pd}, \quad \text{Ha} = B_0 d \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$$

(S — число Сен-Венана; Ha — число Гартмана), уравнение (2) запишем в безразмерной форме

$$\frac{du(z_b)}{d\theta} = 1 + \varepsilon(z_b) - \frac{S}{z_b} - \text{Ha}^2 u(z_b), \quad (3)$$

где $\varepsilon(z_b) = \sigma E_Y B_0 / P$ — безразмерный параметр.

Для нахождения параметра $\varepsilon(z_b)$ используем одно из уравнений Максвелла

$$\frac{dB_X}{dZ} = \mu_0 \sigma (E_Y(Z_b) - V(z) B_0),$$

в безразмерных переменных имеющее вид

$$\frac{dB_x}{dz} = \frac{\mu_0 \sigma P d^3}{\eta \text{Ha}^2} (\varepsilon(z_b) - \text{Ha}^2 u(z)), \quad (4)$$

где $B_x = B_X / B_0$; μ_0 — магнитная постоянная; $u(z)$ — распределение скоростей в области вязкого течения при $z_b \leq z \leq 1$ [9], полученное, в частности, с учетом равенства касательных напряжений на границе раздела сред:

$$u(z) = \frac{1 + \varepsilon(z_b)}{\text{Ha}^2} \left(1 - \frac{\text{ch Ha}(z - z_b)}{\text{ch Ha}(1 - z_b)} \right). \quad (5)$$

Уравнение (3) включает две неизвестные функции $z_b(t)$, $u(z_b)$, которые связаны соотношением [9]

$$u(z_b) = \frac{1 + \varepsilon(z_b)}{\text{Ha}^2} \left(1 - \frac{1}{\text{ch Ha}(1 - z_b)} \right), \quad (6)$$

характеризующим скорость области пластического течения.

Граничные условия имеют следующий вид: в центре и на стенках канала, проводимость которых равна нулю, $B_x = 0$; тангенциальные составляющие магнитного поля на границе раздела областей непрерывны, т. е. $B_x^{visc}(z_b) = B_x^{plast}(z_b)$. С учетом (5) после несложных преобразований решение уравнения (4) можно представить в виде

$$\varepsilon(z_b) = \frac{\text{Ha ch Ha}(1 - z_b)}{\text{Ha } z_b + \text{sh Ha}(1 - z_b)} - 1. \quad (7)$$

Подставляя (6), (7) в (3), получаем дифференциальное уравнение для определения функции $z_b(\theta)$:

$$\frac{dz_b}{d\theta} = \frac{\text{Ha}}{D} \left(\frac{S}{\text{Ha}} \frac{1}{z_b} - \frac{1}{\text{Ha } z_b + \text{sh Ha}(1 - z_b)} \right), \quad (8)$$

где

$$D = \frac{1}{(\text{Ha } z_b + \text{sh Ha}(1 - z_b)) \text{ch Ha}(1 - z_b)} \times \\ \times \left(\frac{\text{Ha } z_b \text{sh Ha}(1 - z_b) + \text{ch Ha}(1 - z_b) - 1}{\text{Ha } z_b + \text{sh Ha}(1 - z_b)} (\text{ch Ha}(1 - z_b) - 1) + \text{sh Ha}(1 - z_b) \right).$$

Уравнение (8) решалось с помощью численных методов при начальном условии $z_b(0) = z_0$. Координата z_0 границы раздела областей для стационарного состояния в начальный момент времени определялась из уравнения

$$\text{Ha } z_0 = \frac{S}{1 - S} \text{sh Ha}(1 - z_0),$$

которое в свою очередь получено из условия равенства нулю на этой границе равнодействующей сил трения, давления и магнитной силы, т. е. из условия равенства нулю правой части уравнения (3) и соотношений (6), (7). Значение величины z_0 находилось графическим способом.

Проанализируем уравнение (8), представив его в виде

$$\frac{dz_b}{d\theta} = F(z_b), \quad (9)$$

где

$$F(z_b) = \left(\text{sh Ha}(1 - z_b) - \frac{1 - S}{S} \text{Ha } z_b \right) \Phi(z_b), \\ \Phi(z_b) = \frac{S (\text{sh Ha}(1 - z_b) + \text{Ha } z_b)}{z_b (\text{Ha } z_b \text{sh Ha}(1 - z_b) + 4 \text{sh}^2 \text{Ha}(1 - z_b)/2)}.$$

Нетрудно показать, что $\Phi(z_b) > 0$ при $0 < z_b < 1$. Уравнение $F(z_b) = 0$ имеет единственный корень z_r , удовлетворяющий неравенству $0 < z_r < 1$, и функция $F(z_b)$ определяет поле направлений интегральных кривых уравнения (9) (рис. 2).

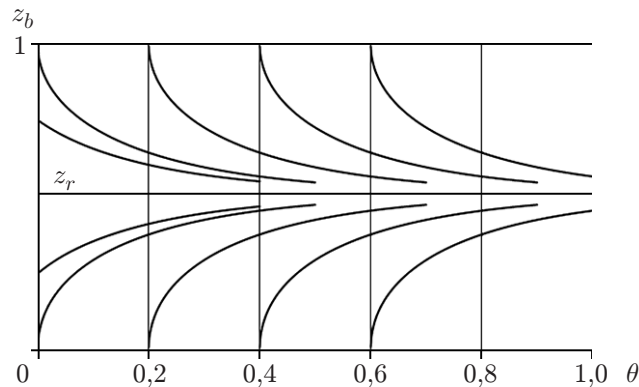


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (9)

Выполнение неравенства $F'(z_b) < 0$ гарантирует асимптотическую устойчивость по первому приближению решения $z_b(\theta)$ при стремлении величины θ к бесконечности [11].

Покажем, что при увеличении числа Гартмана Ha величина $z_r(Ha)$ увеличивается, при этом

$$\lim_{Ha \rightarrow \infty} z_r(Ha) = 1. \quad (10)$$

Действительно, вводя вспомогательную переменную $\alpha = Ha(1 - z_b)$, из соотношения $F(z_b) = 0$ получаем уравнение

$$\frac{S}{1 - S} \operatorname{sh} \alpha = Ha - \alpha,$$

решение которого α_r существует при любом значении Ha . Очевидно также, что $\lim_{Ha \rightarrow \infty} \alpha_r(Ha) = \infty$, однако $\alpha_r(Ha)$ является бесконечно большой величиной меньшего порядка, чем число Гартмана. Действительно,

$$\lim_{Ha \rightarrow \infty} \frac{\alpha_r(Ha)}{Ha} = \lim_{Ha \rightarrow \infty} \frac{\alpha_r}{(S/(1 - S)) \operatorname{sh} \alpha_r + \alpha_r} = \lim_{Ha \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + (S/(1 - S)) \operatorname{sh} \alpha_r / \alpha_r} = 0,$$

откуда с учетом $z_r(Ha) = 1 - \alpha_r(Ha)/Ha$ следует (10).

Таким образом, при стремлении числа Гартмана к бесконечности область пластического течения в пределе заполняет весь канал.

2. Результаты численных расчетов. Численное решение уравнения (7) получено с помощью метода Рунге — Кутты четвертого порядка и метода прогноза и коррекции (прогноз с использованием метода Адамса — Башфорта, коррекция — метода Адамса — Мулттона) [12] при начальном условии $z_b(0) = z_0$. При этом шаг интегрирования одношаговых методов $\Delta\theta$, зависящий от значений правой части, выбран из условия $|F(0, z_b(0))\Delta\theta/z_b(0)| < 1\%$ и принят равным 0,001.

На рис. 3 приведена зависимость $z_b(\theta)$ при различных значениях определяющих параметров задачи Ha и S , дающая представление о положении границы раздела областей пластического и вязкого течений. На рис. 3 эти зависимости приведены для случая, когда электромагнитная индукция не учитывается, т. е. магнитогидродинамический канал работает в режиме короткого замыкания ($E_y = 0$).

Заключение. Получено точное уравнение, определяющее зависимость положения границы областей вязкого и пластического течений от времени при резком увеличении индукции внешнего магнитного поля. Показано, что при возрастании индукции внешнего магнитного поля область пластического течения увеличивается, причем процесс перехода

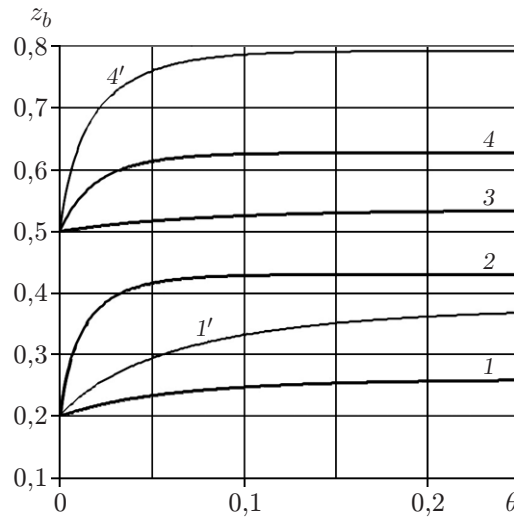


Рис. 3. Зависимость функции $z_b(\theta)$ при $Ha_0 = 0,5$ и различных значениях S , z_0 , Ha :
 1, 1' — $z_0 = 0,2$, $S = 0,2$, $Ha = 2$; 2 — $z_0 = 0,2$, $S = 0,2$, $Ha = 5$; 3 — $z_0 = 0,5$, $S = 0,5$, $Ha = 2$;
 4, 4' — $z_0 = 0,5$, $S = 0,5$, $Ha = 5$; 1–4 — с учетом электромагнитной индукции, 1', 4' — без учета электромагнитной индукции

к новому стационарному состоянию завершается за бесконечное время. Также показано, что ширина зоны пластического течения существенно зависит от режима работы магнитогидродинамического канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Osalusi E., Side J., Haris R., Jonston B.** On the effectiveness of viscous dissipation and Joule heating on steady MHD and slip flow of a Bingham fluid over a porous rotating disk in the presence of hall and ion-slip currents // *Rom. Reports Phys.* 2009. V. 61, N 1. P. 71–93.
2. **Arief I., Mukhopadhyay P. K.** Magnetorheological payne effect in bidisperse MR fluids containing Fe nanorods and Fe304 nanospheres: A dynamics rheological study // *J. Alloys Compounds.* 2017. V. 696. P. 1053–1058.
3. **Алиев К. М., Кутузова Э. Р., Тазюков Ф. Х.** Течение проводящих нелинейно-вязких жидкостей в плоских расширяющихся каналах в условиях воздействия внешнего магнитного поля // *Вестн. Казан. технол. ун-та.* 2015. Т. 18, № 19. С. 215–218.
4. **Халдар С., Мухопадхай С., Лайек Г. С.** Два решения задачи о течении жидкости Кэссона вдоль растягивающейся по степенному закону пленки // *ПМТФ.* 2017. Т. 58, № 4. С. 68–74.
5. **Найгерт К. В., Редников С. Н., Костик Д. А.** Преимущества применения прямого электромагнитного управления потоком в прецизионных гидравлических приводах // *Наука Юж.-Урал. гос. ун-та. Секции техн. наук: Материалы 66-й Науч. конф., Челябинск, 15–17 апр. 2014 г. Челябинск: Издат. центр Юж.-Урал. гос. ун-та, 2014. С. 205–212. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://dspace.susu.ac.ru/xmlui/handle/0001.74/4311>.*
6. **Гноевой А. В.** Основы теории течения бингамовских сред / А. В. Гноевой, Д. М. Климов, В. М. Чесноков. М.: Физматлит, 2014.
7. **Вишняков В. И., Павлов К. Б., Романов А. С.** Перистальтическое течение неньютоновской вязкопластической жидкости в щелевом канале // *Инж.-физ. журн.* 1976. Т. 31, № 3. С. 499–505.

8. **Вишняков В. И., Покровский Л. Д.** К теории нестационарных течений вязкопластических сред // Инж. журн.: наука и инновации. 2013. Вып. 8. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/876.html.
9. **Ватажин А. Б.** Магнитогидродинамические течения в каналах / А. Б. Ватажин, Г. А. Любимов, С. А. Регирер. М.: Наука, 1970.
10. **Кирко И. М.** Магнитная гидродинамика / И. М. Кирко, Г. Е. Кирко. М.; Ижевск: Науч.-издат. центр “Регулярная и хаотическая динамика”: Ижевский ин-т компьютер. исслед., 2009.
11. **Эльсгольц Л. Э.** Дифференциальные уравнения. М.: ЛКИ, 2014.
12. **Корн Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 2003.

*Поступила в редакцию 15/III 2018 г.,
после доработки — 6/XI 2018 г.
Принята к публикации 26/XI 2018 г.*
