

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ  
ПОВРЕЖДЕННЫХ ТЕЛ С ЗОНАМИ РАЗУПРОЧНЕНИЯ \***

*В. Э. Вильдеман, Ю. В. Соколкин, А. А. Ташкинов*

*Пермский государственный технический университет,  
614600 Пермь*

В основу традиционной оценки несущей способности деформируемых тел с использованием критериев прочности положено предположение, что потеря несущей способности соответствует достижению в наиболее опасных точках максимально допустимых значений параметров напряженного состояния или запаса упругой энергии, а момент разрушения однозначно определяется прочностными константами материала. Однако имеются экспериментальные свидетельства, что сопротивление разрушению зависит, кроме того, и от жесткости нагружающей системы, в которую входят как нагружающее устройство (испытательная машина, элементы конструкции, передающие нагрузку, рабочая жидкость или газ и т. д.), так и само деформируемое тело, окружающее зону разрушения [1, 2].

При «мягком» нагружении, когда к находящемуся в однородном напряженном состоянии телу прикладываются не зависящие от его сопротивления силы, разрушению действительно соответствуют максимальные напряжения. В другом предельном случае, когда задаются перемещения точек на границе («жесткое» нагружение), возможно равновесное протекание процесса накопления повреждений, что находит свое отражение на диаграмме деформирования в виде ниспадающей ветви [3–9]. При конечной жесткости нагружающей системы моменту потери несущей способности может соответствовать та или иная точка на ниспадающей ветви диаграммы. Состояние материала, отвечающее наивысшей точке на диаграмме, является критическим, а разрушение, точнее, заключительная быстропотекающая неравновесная стадия этого процесса, может быть рассмотрено как результат потери устойчивости накопления повреждений на закритической стадии деформирования. Вместе с тем реализация закритической стадии деформирования приводит к использованию резервов несущей способности, что может применяться при оптимальном проектировании конструкций.

Уточненный расчет с использованием полных диаграмм требует постановки и решения краевых задач с учетом разупрочнения материала [10–13], а также возможной потери устойчивости деформирования ослабленных зон [4, 13, 14]. В настоящей работе предложены новые граничные условия с учетом жесткости системы нагружения, сформулированы определяющие соотношения, введены условия закритической деформации, получены критерии устойчивости накопления повреждений на закритической стадии деформирования для элементарной частицы материала и дана постановка краевых задач, позволяющая учесть указанные эффекты в рамках моделей механики деформируемого твердого тела.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

**1. Уравнение состояния.** В [15] определяющие соотношения, связывающие тензор напряжений  $\sigma$  с тензором деформаций  $\epsilon$  для среды с микроповреждениями, с использованием тензора повреждаемости четвертого ранга  $\Omega$  представлены в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}(I_{mnkl} - \Omega_{mnkl})\epsilon_{kl}, \quad (1.1)$$

где  $C$  — тензор упругих модулей;  $I_{klmn} = (1/2)(\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{kn}\delta_{lm})$  — компоненты единичного тензора;  $\delta_{kn}$  — символ Кронекера.

Все процессы, приводящие к некоторому изменению свойств материала, описываются в рассматриваемой модели с помощью тензора-оператора повреждаемости  $\Omega$ , компоненты которого однозначно определяются процессом деформирования (нагружения). В случае, когда для определения напряжений достаточно знания деформаций только в настоящий момент времени, тензор  $\Omega$  является функцией. При соответствующей обработке экспериментальных данных она может описывать и ниспадающие ветви диаграмм деформирования.

Так же как и тензор модулей упругости, тензор  $\Omega$  имеет несколько независимых компонент (их число и структура тензора зависят от анизотропии процессов накопления повреждений), через которые определяются другие ненулевые компоненты. Например, для начально-изотропной среды, остающейся изотропной при накоплении повреждений, компоненты тензора  $\Omega$  определяются двумя независимыми скалярными величинами, а уравнения состояния имеют вид

$$\sigma_{ij} = [3K(1 - \alpha)V_{ijmn} + 2G(1 - g)D_{ijmn}]\epsilon_{mn}.$$

Функции повреждаемости  $\alpha$  и  $g$  зависят от двух инвариантов тензора деформаций:

$$j_{\epsilon}^{(1)} = \epsilon_{kk}, \quad j_{\epsilon}^{(2)} = \sqrt{\epsilon_{ij}\epsilon_{ij}}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} - (1/3)\epsilon_{kk}\delta_{ij}.$$

Для неупругой трансверсально-изотропной среды определяющие соотношения с использованием технических упругих постоянных представим как

$$(1/2)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = k(1 - \alpha)(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + l(1 - \varphi)\epsilon_{33},$$

$$(1/2)(\sigma_{11} - \sigma_{22}) = G_{\perp}(1 - \rho_{\perp})(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}),$$

$$\sigma_{33} = l(1 - \varphi)(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + n(1 - \xi)\epsilon_{33},$$

$$\sigma_{12} = 2G_{\perp}(1 - \rho_{\perp})\epsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = 2G_{\parallel}(1 - \rho_{\parallel})\epsilon_{13}.$$

Все компоненты тензора повреждаемости определяются пятью независимыми функциями:  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $\xi$ ,  $\rho_{\perp}$  и  $\rho_{\parallel}$ , аргументами которых являются в общем случае четыре инварианта тензора деформаций [16]:

$$j_{\epsilon}^{(1)} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22}, \quad j_{\epsilon}^{(2)} = \epsilon_{33},$$

$$j_{\epsilon}^{(3)} = \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4\epsilon_{12}^2}, \quad j_{\epsilon}^{(4)} = \sqrt{\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{23}^2}.$$

Соотношения (1.1) применительно к ортотропному материалу имеют вид

$$\sigma_{11} = C_{1111}(1 - \lambda_1)\epsilon_{11} + C_{1122}(1 - \lambda_4)\epsilon_{22} + C_{1133}(1 - \lambda_6)\epsilon_{33},$$

$$\sigma_{22} = C_{1122}(1 - \lambda_4)\epsilon_{11} + C_{2222}(1 - \lambda_2)\epsilon_{22} + C_{2233}(1 - \lambda_5)\epsilon_{33},$$

$$\sigma_{33} = C_{1133}(1 - \lambda_6)\epsilon_{11} + C_{2233}(1 - \lambda_5)\epsilon_{22} + C_{3333}(1 - \lambda_3)\epsilon_{33},$$

$$\sigma_{12} = 2C_{1212}(1 - \lambda_7)\epsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2C_{2323}(1 - \lambda_8)\epsilon_{23},$$

$$\sigma_{13} = 2C_{1313}(1 - \lambda_9)\varepsilon_{13}.$$

Для ортотропного тела аргументами материальных функций  $\lambda_\alpha$  являются шесть инвариантов тензора деформаций [16].

Постановка краевой задачи для тела, при деформировании которого возможно появление зон разрушения, может быть облегчена, если определяющие соотношения записать как [17]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(I_{klmn} - \Omega_{klmn})(I_{mnpq} - P_{mnpq})\varepsilon_{pq}$$

и явным образом учесть скачкообразное изменение деформационных свойств материала с помощью индикаторного тензора  $P$ . Компоненты этого тензора скачком изменяют свои значения от нуля до единицы в случае невыполнения соответствующего условия прочности или устойчивости закритического деформирования, что отражает потерю материалом способности сопротивляться определенному виду нагрузки.

**2. Граничные условия.** Сформулируем граничные условия краевых задач с учетом конечной жесткости нагружающего устройства. Пусть на участке  $\Gamma_S$  границы тела приложенные внешние силы задаются следующим образом:

$$[S_i(t) + R_{ij}u_j(t)]\Big|_{\Gamma_S} = S_i^0(t), \quad S_i = \sigma_{ij}n_j. \quad (2.1)$$

Здесь  $S^0(t)$  — вектор внешних сил, задаваемый по программе нагружения;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещения точки на границе с нормалью  $\mathbf{n}$ ;  $\sigma$  — тензор напряжений;  $t$  — время;  $R_{ij}(\mathbf{u})$  — жесткость нагружающего устройства.

В этом случае в граничных условиях явным образом учитывается изменение внешних нагрузок, связанное с изменением конфигурации тела вследствие деформации, чем обычно пренебрегают, когда деформации малы. Однако как малые деформации могут привести к весьма большим напряжениям и являются предметом изучения механики деформируемых твердых тел, так и малые перемещения границ при высокой жесткости системы нагружения являются причиной резкого изменения внешних нагрузок и заслуживают внимания. Это, по-видимому, в первую очередь, относится к краевым задачам, в которых устанавливается энергетический баланс на стадии формирования и роста зон накопления повреждений, разупрочнения и разрушения. Например, в инженерной практике отмечено существенное отличие характера разрушения гидравлических и пневматических сосудов давления и трубопроводов. С точки зрения традиционных постановок краевых задач эти случаи эквивалентны. Предлагаемые граничные условия дополняют задачу информацией о свойствах нагружающего устройства и позволяют описывать перераспределение энергии между ним и деформируемым телом.

Аналогично (2.1) запишем кинематические граничные условия. Пусть на границе  $\Gamma_u$  заданы перемещения

$$[u_i(t) + Q_{ij}S_j(t)]\Big|_{\Gamma_u} = u_i^0(t), \quad (2.2)$$

где  $Q_{ij}(\mathbf{S})$  — податливость нагружающего устройства;  $\mathbf{u}^0$  задается по программе деформирования. Номинально задаваемые усилия и перемещения связаны соотношениями

$$S_i^0 = R_{ij}u_j^0, \quad u_i^0 = Q_{ij}S_j^0, \quad R_{ik}Q_{kj} = \delta_{ij}, \quad (2.3)$$

а уравнения (2.1) и (2.2) являются взаимно обратными.

При  $R_{ij} = 0$  либо  $Q_{ij} = 0$  граничные условия соответствуют случаям «мягкого» или «жесткого» нагружения соответственно, а по форме

совпадают с граничными условиями, используемыми в механике деформируемого твердого тела.

Схематично взаимодействие деформируемого тела и нагружающей системы проиллюстрировано на рис. 1 (а — общий одномерный случай, б — абсолютно «мягкое» нагружение, в — абсолютно «жесткое» нагружение, 1 — характеристика нагружающей системы, 2 — характеристика деформируемого тела).

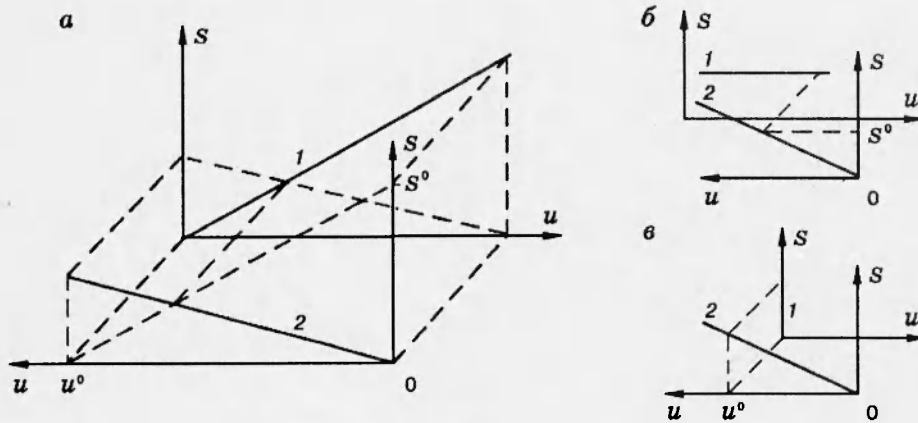


Рис. 1

Некоторые варианты граничных условий, записанные с учетом жесткости нагружающего устройства, для различных технических систем приведены в таблице. Обратим внимание, в частности, на то, что в отдельных случаях жесткость нагружения может быть отрицательной, а повышение жесткости нагружающего устройства осуществимо с помощью специальных технических средств, например клина или накладок.

Новая формулировка граничных условий позволяет учесть отличие реального процесса нагружения или деформирования от номинально задаваемого. Важной характеристикой режима нагружения является его скорость. Покажем, что реальная скорость нагружения отличается от номинальной в зависимости от жесткости нагружающего устройства.

Пусть краевая задача решена и известна связь между усилиями и перемещениями любой точки на границе тела:

$$S_i = H_{ij}u_j, \quad u_i = P_{ij}S_j, \quad H_{ij}P_{jk} = \delta_{ik}.$$

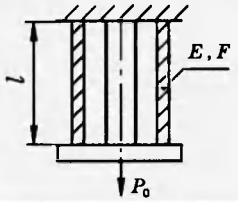

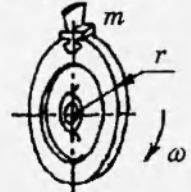
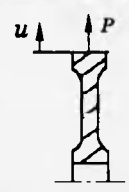
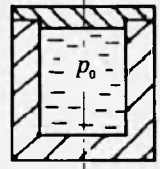

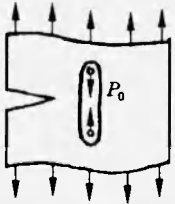
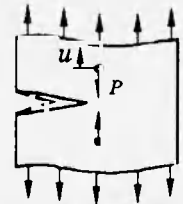
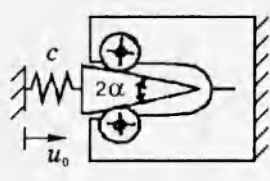
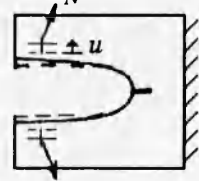
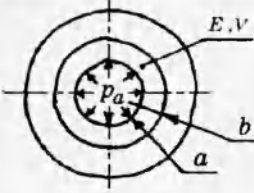

Здесь  $H_{ij}$  и  $P_{ij}$  — соответственно жесткости и податливости деформируемой системы. С учетом последних соотношений из уравнений (2.1)–(2.3) следует

$$S_i = (\delta_{ik} + R_{ij}P_{jk})^{-1}S_k^0, \quad u_i = (\delta_{ik} + Q_{ij}H_{jk})^{-1}u_k^0.$$

Если свойства нагружающей и деформируемой систем не зависят от времени, то становятся очевидными соотношения, связывающие скорости изменения силовых и кинематических величин ( $S_i^0 = dS_i^0/dt$ ,  $\dot{S}_i = dS_i/dt$ ,  $\dot{u}_i^0 = du_i^0/dt$ ,  $\dot{u}_i = du_i/dt$ ):

$$\dot{S}_i = (\delta_{ik} + R_{ij}P_{jk})^{-1}\dot{S}_k^0, \quad \dot{u}_i = (\delta_{ik} + Q_{ij}H_{jk})^{-1}\dot{u}_k^0.$$

Схемы нагружения различных технических объектов  
и соответствующие варианты граничных условий

Технический объект	Расчетная схема	Граничные условия
		$P = P_0 - \frac{EF}{l} u$ <p>(<math>F</math> — площадь поперечного сечения, <math>E</math> — модуль упругости, <math>u</math> — перемещение конца стержня)</p>
		$P = m\omega^2 r - Ru$ <p>Отрицательная жесткость нагружения <math display="block">R = -m\omega^2</math></p>
		$p = p_0 - \frac{2K}{a} u$ <p>(<math>K</math> — модуль объемного сжатия рабочей жидкости, <math>u</math> — перемещение внутренней стенки цилиндра)</p>
		$P = P_0 + 2Ru$ <p>(<math>R</math> — жесткость накладки, <math>u</math> — перемещение заклепки, связанное с прорастанием трещины)</p>
		$N = \frac{c}{2 \sin \alpha} u_0 - Ru,$ $R = \frac{c \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha}$ <p>(<math>u</math> — перемещение оси подшипника)</p>
		$p = \frac{2a^2}{a^2 + b^2 - \nu(b^2 - a^2)} p_a - Ru_b,$ $R = \frac{E(b^2 - a^2)}{b[a^2 + b^2 - \nu(b^2 - a^2)]}$

В одномерном случае последние соотношения проиллюстрированы на рис. 2. Чем выше жесткость нагружающей системы, тем ближе режим деформирования к  $u^0(t)$ . Чем выше податливость нагружающей системы, тем ближе режим нагружения к  $S^0(t)$ .

Таким образом, реальная скорость нагружения отличается от номинальной при ненулевой жесткости нагружения, а реальная скорость перемещения граничных точек отличается от номинальной при ненулевой податливости нагружения.

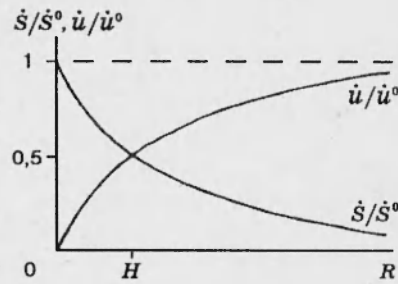


Рис. 2

**3. Условия закритической деформации.** Традиционно используемые критерии прочности, основанные на сравнении значения некоторой функции компонент тензора напряжений или деформаций с ее предельным значением, обычно не включают в себя жесткость нагружающей системы и соответствуют нулевой жесткости. В этом случае подобные условия могут быть использованы для оценки критического напряженного состояния. Предельное состояние материала будем характеризовать сочетанием двух условий: закритической деформации и потери устойчивости этого процесса. Рассмотрим первое условие с учетом возможности разрушения по различным механизмам.

Феноменологическая оценка разрушения твердого тела на основании критерия прочности в общем случае ничего не говорит о характере тех процессов, которые привели к потере несущей способности, хотя некоторые критерии могут иметь определенную физическую интерпретацию. Использование совокупности критериев может позволить в рамках феноменологического подхода отличать различные механизмы разрушения.

Меры тензора повреждаемости  $M_m(\Omega)$ , называемые мерами повреждений и являющиеся функциями компонент  $\Omega$ , могут быть использованы для построения критериев закритической стадии деформирования изотропных и анизотропных материалов. Пусть существуют константы критической поврежденности материала  $\Omega_m^*$  такие, что если для любого  $m$

$$M_m(\Omega) < \Omega_m^*, \quad m = 1, 2, \dots \leq n$$

( $n$  — число независимых компонент тензора  $\Omega$ ), то состояние частицы прочно, а если для некоторого  $m = k$

$$M_k(\Omega) \geq \Omega_k^*, \quad (3.1)$$

то возможно разрушение типа  $k$ . Стремление к учету хотя бы двух различных видов разрушения (например, от отрыва и от сдвига) приводит к необходимости рассмотрения не менее двух мер повреждений.

Для неупругих склерономных материалов при однократном нагружении условие закритической деформации (3.1) эквивалентно одному из неравенств

$$f_m(j_\varepsilon^{(1)}, \dots, j_\varepsilon^{(n)}) \geq C_m, \quad m = 1, 2, \dots \leq n, \quad (3.2)$$

где  $j_\varepsilon^{(n)}$  — независимые инварианты тензора деформаций;  $C_m$  — константы материала;  $f_m$  — универсальные функции.

Вследствие неоднородности напряженного состояния, что особенно характерно для композитов, в объеме деформируемого тела возникают зоны, для которых не выполняются условия прочности. Решить вопрос о

том, приведет ли разрушение некоторой микрочастицы к разрушению деформируемого тела, можно, только описав процесс перераспределения напряжений и, возможно, возникающего при этом разрушения соседних частиц. Естественно, что для этого необходимо иметь данные или сделать предположения о том, какими свойствами обладает частица материала, разрушенная по некоторому механизму. Возможно, в результате перераспределения напряжений эта частица и далее будет вносить свой вклад в сопротивление внешней нагрузке.

**4. Условие устойчивости закритического деформирования материальной точки.** Для оценки устойчивости процесса закритического деформирования, сопровождающегося равновесным ростом дефектов, следует рассмотреть соотношение между расходуемой (сумма приращений энергии упругой деформации и работы разрушения) и подводимой (работа внешних сил) энергиями при фиктивном малом приращении закритической деформации. При этом под работой разрушения в рамках феноменологического описания понимается диссипация энергии, связанная с процессом накопления повреждений. Для элементарного объема материала работа разрушения и увеличение потенциальной энергии упругого деформирования составляют удельную работу деформации, которая на любом интервале деформации находится как площадь под кривой равновесной диаграммы, полученной экспериментально с помощью «жесткой» испытательной машины.

На участке ниспадающей ветви работа разрушения больше, чем работа деформации. Это отличие тем сильнее, чем круче спадает диаграмма на заключительной стадии деформирования. Процесс разрушения дополнительно (кроме притока энергии извне) поддерживается за счет освобождения потенциальной энергии упругого деформирования.

Мысленно удалим из тела элементарный параллелепипед объемом  $d\Omega$  в окрестности рассматриваемой точки. Если на гранях получившейся полости приложить напряжения  $\sigma'$  (штрих для отличия от напряжений в общепринятом смысле), то это вызовет ее деформацию  $\epsilon$ .

Установим связь между введенными таким образом напряжениями и деформациями:

$$\sigma'_{ij} = -V_{ijmn}\epsilon_{mn}.$$

Тензор  $V$  может быть назван тензором жесткости нагружающей системы и характеризует деформационные свойства всего тела, а также нагружающего устройства, которое обеспечивает заданные перемещения или усилия на границе.

С использованием введенного тензора жесткости нагружающей системы работа внешних сил при виртуальном приращении закритической деформации области  $\Omega_0$  с границей  $\Gamma$  может быть представлена выражением

$$\delta A = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^0 - \frac{1}{2} V_{ijmn} \delta \epsilon_{mn}) \delta u_i n_j d\Gamma, \quad (4.1)$$

где  $\sigma_{ij}^0$  — напряжения до вариации деформаций. После преобразования (4.1) по формуле Гаусса — Остроградского имеем

$$\delta A = \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}^0 - \frac{1}{2} V_{ijmn} \delta \epsilon_{mn}) \delta \epsilon_{ij} d\Omega.$$

Сравнивая это выражение с формулой для вычисления работы деформа-

ции

$$\delta E = \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}^0 - \frac{1}{2} D_{ijmn} \delta \varepsilon_{mn}) \delta \varepsilon_{ij} d\Omega,$$

в которую входит  $\mathbf{D}$  — тензор касательных модулей на закритической стадии деформирования материала:

$$d\sigma = -\mathbf{D} : d\varepsilon,$$

получим, что устойчивому состоянию соответствует условие

$$\delta E - \delta A = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (V_{ijmn} - D_{ijmn}) \delta \varepsilon_{mn} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega > 0.$$

Если перейти к элементарному объему  $d\Omega$  и ввести тензорную величину  $\mathbf{S}$  — сравнительную жесткость нагружения:

$$S_{ijmn} = V_{ijmn} - D_{ijmn}, \quad (4.2)$$

то условие устойчивости закритического деформирования элементарной частицы материала в теле конечных размеров будет эквивалентно требованию положительности квадратичной формы тензора:

$$S_{ijmn} \delta \varepsilon_{mn} \delta \varepsilon_{ij} > 0. \quad (4.3)$$

Рассмотрим вопрос нахождения тензора жесткости нагружающей системы. Запишем выражение для работы внешних сил в виде

$$\delta A = \int_{\Gamma} \left( \sigma_{ij}^0 - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_k} \delta u_k \right) \delta u_i n_j d\Gamma. \quad (4.4)$$

Из сравнения (4.4) и (4.1) следует, что компоненты искомого тензора могут быть найдены по формуле

$$V_{ijmn} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_k} (dx_m \delta_{kn} + dx_n \delta_{km}). \quad (4.5)$$

Как видим, жесткость нагружающей системы зависит от соотношения внутренних усилий и перемещений. Это естественно, поскольку перемещение любой точки деформируемого тела определяется деформациями всех его материальных частиц, а также перемещениями границ и в этом смысле является интегральной величиной, характеризующей жесткость нагружающей системы.

Связь внутренних усилий с перемещениями отражает жесткостные характеристики всех материальных частиц и элементов нагружающего устройства в совокупности. Согласно этому, в работе [4] введено понятие эквивалентной жесткости системы нагружения, связывающей перемещение рассматриваемой точки в направлении действия главного напряжения на элементарной площадке. Условие закритического деформирования области малых, но конечных размеров, полученное в [4], следует из соотношений (4.2), (4.3) и (4.5), однако лишь в том случае, если записать их применительно к главным осям, частные производные в (4.5) заменить отношением абсолютных величин,  $dx$  заменить на  $\Delta x$  и принять, что каждая компонента тензора  $\mathbf{S}$  должна быть положительна (условие достаточное, но не являющееся необходимым для выполнения (4.3)).

**5. Краевая задача.** На основе предлагаемого подхода деформирования и разрушения нагруженного тела, сопровождаемые возникновением и



развитием поврежденных зон, областей закритической деформации, поведение которых находит отражение на диаграмме деформирования в виде ниспадающей ветви, а также зон разрушенного материала, можно исследовать как единый процесс, описываемый при квазистатическом нагружении краевой задачей, состоящей из замкнутой системы уравнений

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}(t) &= 0, \quad \varepsilon_{ij}(t) = (1/2)[u_{i,j}(t) - u_{j,i}(t)], \\ \sigma_{ij}(t) &= C_{ijkl}[I_{klmn} - \Omega_{klmn}][I_{mnpq} - P_{mnpq}]\varepsilon_{pq}(t), \\ \Omega_{klmn} &= \Omega_{klmn}(j_\varepsilon^{(n)}, \dot{\varepsilon}, t), \quad P_{klmn} = P_{klmn}(f_k, C_k, S),\end{aligned}$$

условий закритической деформации (3.2), условия устойчивости закритической деформации (4.3) и граничных условий (2.1) и (2.2).

Рассматриваемая постановка краевой задачи континуальной механики разрушения базируется на постановках краевой задачи в теории упругости и теории пластичности, однако главной ее особенностью являются учет в определяющих соотношениях возможности реализации состояний материала, соответствующих ниспадающей ветви на диаграммах, и использование критериев устойчивости процессов закритического деформирования. Конкретный же вид уравнений, естественно, может отличаться от представленного.

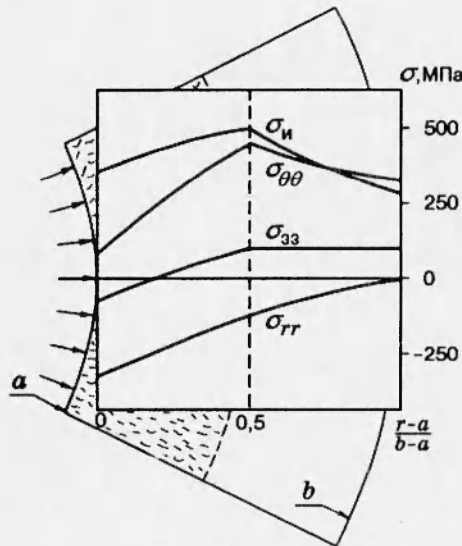


Рис. 3

чи были получены результаты расчета напряженно-деформированного состояния толстостенного цилиндра, приведенные на рис. 3, при следующих данных:  $p = 326$  МПа,  $a = 10$  мм,  $b = 20$  мм,  $\sigma_{\text{нб}} = 500$  МПа,  $G = 2 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu = 0,3$ ,  $G_p = 10^4$  МПа,  $H = 0$ .

Расчеты показали, что стабильная стадия разрушения, когда на внутренней поверхности интенсивность напряжений достигла предела прочности, началась при давлении 216 МПа. Устойчивое закритическое деформирование, соответствующее «движению» по ниспадающей ветви диаграммы точек, отражающих напряженно-деформированное состояние частиц материала в пределах зоны с ослабленными связями, продолжалось до тех пор, пока радиус внешней границы этой зоны не превысил  $c^* = 15$  мм, а давление — 326 МПа. Как видим, резерв несущей способности, обнаруженный при уточненном расчете с использованием полной

В качестве иллюстрации рассмотрим решение краевой задачи о закритическом деформировании толстостенного цилиндра, нагруженного внутренним давлением. Полагалось, что диаграмма деформирования материала допускает кусочно-линейную аппроксимацию с модулем сдвига  $G$  на упругом участке и соответствующим модулем разупрочнения  $-G_p$  на участке закритической деформации. Критическое напряженное состояние достигалось, когда интенсивность напряжений  $\sigma_{\text{н}}$  достигала предельного значения  $\sigma_{\text{нб}}$ . С целью учета жесткости  $H = 2K/a$  нагружающей системы, которая в данном случае включает устройство, создающее давление, и рабочую жидкость или газ, использовались граничные условия, приведенные в таблице. На основе аналитического решения рассматриваемой зада-

диаграммы деформирования, составил в данном случае 51 %.

Ненулевая жесткость нагружающей системы способствует стабилизации процесса разрушения и увеличению предельного размера ослабленной зоны ( $c^* - a$ ). График этой зависимости приведен на рис. 4. Значение параметра  $H$ , вычисленное на основе [18], для воздуха составляет  $2 \cdot 10^7$  Н/м<sup>3</sup>, для воды —  $4,5 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>3</sup>.

Подобно тому, как это принято при анализе упругопластических задач [19], существование и единственность решения краевой задачи в рассмотренной постановке требуют доказательства. Отсутствие в математическом смысле решения задачи свидетельствует о невозможности равновесного сопротивления тела приложенным внешним нагрузкам, т. е. о макроразрушении.

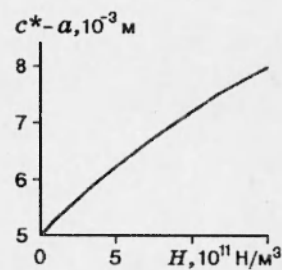


Рис. 4

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фридман Я. Б. Оценка опасности разрушения машиностроительных материалов // Теоретические основы конструирования машин. М.: Машгиз, 1957. С. 257–281.
2. Зилова Т. К., Палкин Б. А., Петрухина Н. И. и др. Испытание на растяжение при различных запасах упругой энергии // Завод. лаб. 1959. Т. 25, № 1. С. 76–82.
3. Дубровина Г. И., Соковнин Ю. П., Гуськов Ю. П. и др. К теории накопления повреждений // Пробл. прочности. 1975. № 2. С. 21–24.
4. Волков С. Д., Дубровина Г. И., Соковнин Ю. П. Устойчивость сопротивления материала в механике разрушения // Пробл. прочности. 1978. № 6. С. 65–69.
5. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов // ПМТФ. 1977. № 3. С. 156–174.
6. Лебедев А. А., Марусий О. И., Чаусов Н. Г., Зайцева Л. В. Исследование кинетики разрушения пластичных материалов на заключительной стадии деформирования // Пробл. прочности. 1982. № 1. С. 12–18.
7. Аннин Б. Д., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Механика деформируемого твердого тела в СО АН СССР // ПМТФ. 1987. № 4. С. 66–86.
8. Петухов И. М., Линьков А. М. Механика горных ударов и выбросов. М.: Недра, 1983.
9. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г. Механика деформирования и разрушения горных пород. М.: Недра, 1992.
10. Ибрагимов В. А., Ключников В. Д. Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 116–121.
11. Волков С. Д. Функция сопротивления материалов и постановка краевых задач механики разрушения. Свердловск, 1986. (Препр. / УрО АН СССР).
12. Стружанов В. В. О применении полных диаграмм деформирования в расчетах на прочность // Пробл. прочности. 1988. № 5. С. 122–123.
13. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Краевые задачи континуальной механики разрушения. Пермь, 1992. (Препр. / УрО РАН).
14. Линьков А. М. Об условиях устойчивости в механике разрушения // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233, № 1. С. 45–48.
15. Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. М.: Наука, 1984.
16. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

17. Вильдеман В. Э. О построении определяющих соотношений структурно-феноменологической механики композитов // Механика микронеоднородных сред. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 77–80.
18. Горлин С. М. Экспериментальная аэромеханика. М.: Высш. шк., 1970.
19. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983.

*Поступила в редакцию 4/VIII 1994 г.,  
в окончательном варианте — 30/XII 1994 г.*

---