

УДК 532.59

## НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОБТЕКАНИИ СИСТЕМЫ ВИХРЕЙ УСТАНОВИВШИМСЯ ПОТОКОМ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ, ОГРАНИЧЕННЫМ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С. И. Горлов

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 644099 Омск

В рамках нелинейной теории рассмотрена задача об обтекании системы двух вихрей противоположной интенсивности потоком жидкости со свободной поверхностью. Найдена область параметров задачи, при которых не существует стационарного решения. Приведены результаты численного эксперимента по исследованию влияния интенсивностей вихрей и числа Фруда на форму свободной поверхности и гидродинамические реакции особенностей.

Задачи обтекания системы гидродинамических особенностей потоком жидкости, ограниченным свободной поверхностью, имеют обширные практические приложения. Наибольшее число работ в этой области посвящено обтеканию одиночного вихря (см., например, [1] и библиографию к ней). Единственный пример решения задачи обтекания системы двух вихрей и источников приводится в [2]. В связи со значительными успехами в области развития численных методов решения нелинейных задач волновой гидродинамики интерес к этой проблеме значительно возрос.

Целью настоящей работы является разработка нового численного метода решения нелинейных задач об обтекании гидродинамических особенностей стационарным потоком весомай жидкости, ограниченным свободной поверхностью. Метод применяется к решению задачи обтекания системы двух вихрей противоположной интенсивности. Исследуется влияние характера волнообразования на волновое сопротивление вихрей. Значительное внимание уделяется изучению профилей генерируемых волн.

Следует отметить, что предложенный численный метод решения нелинейных стационарных волновых задач является разновидностью более общего метода граничных интегральных уравнений, при помощи которого в последнее время достигнуты значительные успехи в этой области [3].

1. Пусть стационарный поток со свободной поверхностью  $L$  обтекает систему двух вихрей противоположной интенсивности. Жидкость предполагается идеальной, несжимаемой, весомай и однородной. Вводится система координат, ось  $x$  которой расположена вдоль невозмущенного уровня свободной поверхности, ось  $y$  проходит через точку положения первого вихря (рис. 1). В выбранной системе координат вихрь интенсивности  $\Gamma$  расположен в точке  $(0, -h)$ , вихрь интенсивности  $-\Gamma$  — в точке  $(d, -h)$ . Введем следующие обозначения:  $\vec{v}_\infty$  — скорость жидкости на бесконечности слева,  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения,  $f(x)$  — функция, описывающая форму свободной поверхности  $L$ .

Будем рассматривать задачу в плоскости комплексной переменной  $z = x + iy$ . Аналитическая функция  $\bar{V}(z)$ , описывающая движение жидкости, должна удовлетворять условиям

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00093).

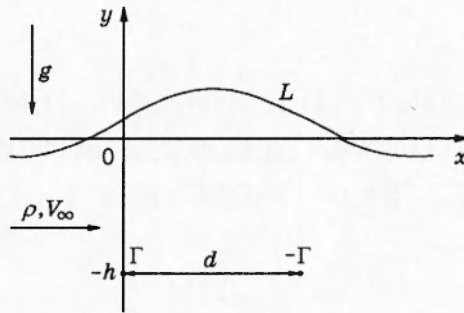


Рис. 1. Схема обтекания

постоянства давления и равенства нулю нормальной составляющей скорости на свободной поверхности:

$$\operatorname{Im}(\bar{V}(z)(1 + if'(x))) = 0, \quad z = x + if(x), \quad |x| < +\infty; \quad (1.1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2g}(V_\infty^2 - |V(z)|^2), \quad z = x + if(x), \quad |x| < +\infty. \quad (1.2)$$

Кроме того, должны быть выполнены условия затухания возмущений скорости и свободной поверхности в бесконечном удалении слева:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{V}(z) = V_\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0. \quad (1.3)$$

2. Краевая задача (1.1)–(1.3) для функций  $\bar{V}(z)$  и  $f(x)$  является нелинейной. Эта нелинейность обусловлена двумя факторами: 1) комплексная скорость  $V(z)$  входит в (1.2) нелинейным образом; 2) неизвестна форма свободной поверхности, на которой выполняются граничные условия (1.1), (1.2). Это обстоятельство создает определенные трудности при решении. Сведем краевую задачу (1.1)–(1.3) к решению системы интегральных уравнений относительно двух вещественных функций одной переменной.

Введем интенсивность вихревого слоя  $\gamma(x)$ , расположенного на свободной поверхности. Будем предполагать, что  $L$  — гладкая кривая,  $\gamma(x)$  удовлетворяет условию Гёльдера и  $\gamma(-\infty) = 0$ . В этих предположениях комплексная скорость жидкости будет описываться формулой

$$\bar{V}(z) = V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_1} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(\xi)}{z - \zeta(\xi)} \frac{1 - if'(\xi)}{\sqrt{1 + (f'(\xi))^2}} d\xi, \quad (2.1)$$

$$z_1 = -ih, \quad z_2 = d - ih, \quad \zeta(\xi) = \xi + if(\xi).$$

Из предположения о затухании интенсивности вихревого слоя в бесконечном удалении слева следует, что построенная в соответствии с (2.1) функция  $\bar{V}(z)$  удовлетворяет условию (1.3).

Предельное значение функции  $V(z)$  при подходе к  $L$  снизу определяется формулой Сохоцкого — Племели

$$\bar{V}(z) = \bar{V}_0(z) + \frac{1}{2} \gamma(x) \frac{1 - if'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}, \quad (2.2)$$

где  $V_0(z)$  вычисляется из (2.1) при  $z = x + if(x)$ , соответствующий несобственный интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Кинематическое и динамическое условия (1.1), (1.2) с учетом (2.1), (2.2) сводятся к

$$\operatorname{Im}(V_0(z)(1 + if'(x))) = 0, \quad z = x + if(x). \quad (2.3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2g} \left( V_\infty^2 - V_{0s}^2(z) - \gamma(x)V_{0s}(z) - \frac{1}{4} \gamma^2(x) \right), \quad z = x + if(x), \quad (2.4)$$

$$V_{0s}(z) = \operatorname{Re} \left( V_0(z) \frac{1 + if'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right), \quad z = x + if(x).$$

Здесь  $V_{0s}(z)$  — касательная составляющая скорости  $V_0(z)$ .

Гидродинамические нагрузки  $R_{xj}$  и  $\bar{R}_{yj}$ , действующие на вихри, определяются формулой

$$R_{yj} + i R_{xj} = -\rho_1 \Gamma \left( V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z_2 - z_1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(\xi)}{z_j - \zeta(\xi)} \frac{1 - if'(\xi)}{\sqrt{1 + (f'(\xi))^2}} d\xi \right),$$

где  $j = 1$  для вихря интенсивности  $\Gamma$ ,  $j = 2$  для вихря  $-\Gamma$ .

3. Для решения системы нелинейных интегральных уравнений (2.3), (2.4) будем использовать обобщенный метод Ньютона [4]:

$$G^{(n)} + G_\gamma^{(n)} \Delta \gamma^{(n)} + G_f^{(n)} \Delta f^{(n)} + G_{f'}^{(n)} \Delta f'^{(n)} = 0; \quad (3.1)$$

$$\Delta f^{(n)} = F^{(n)} + F_\gamma^{(n)} \Delta \gamma^{(n)} + F_f^{(n)} \Delta f^{(n)} + F_{f'}^{(n)} \Delta f'^{(n)}; \quad (3.2)$$

$$\Delta \gamma^{(n)} = \gamma^{(n+1)} - \gamma^{(n)}, \quad \Delta f^{(n)} = f^{(n+1)} - f^{(n)}, \quad \Delta f'^{(n)} = f'^{(n+1)} - f'^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$\gamma^{(0)}(x) = 0, \quad f^{(0)}(x) = 0, \quad f'^{(0)}(x) = 0, \quad |x| < +\infty, \quad (3.3)$$

где  $G(\gamma, f, f')$  и  $F(\gamma, f, f')$  — левая часть (2.3) и правая часть (2.4) соответственно;  $G^{(n)}$ ,  $G_\gamma^{(n)}$ ,  $G_f^{(n)}$ ,  $G_{f'}^{(n)}$ ,  $F^{(n)}$ ,  $F_\gamma^{(n)}$ ,  $F_f^{(n)}$ ,  $F_{f'}^{(n)}$  — интегродифференциальные операторы и их частные производные по  $\gamma$ ,  $f$ ,  $f'$  при  $\gamma = \gamma^{(n)}$ ,  $f = f^{(n)}$ ,  $f' = f'^{(n)}$ . Выражение (3.3) определяет начальное приближение для функций  $\gamma$ ,  $f$  и  $f'$ .

Будем рассматривать свободную поверхность  $L$  в расчетной области  $[x_a, x_b]$  ( $x_a \ll -h$ ,  $x_b \gg h$ ). Предположим, что  $\gamma(x) = f(x) = 0$  при  $x \leq x_a$  и  $f(x)$ ,  $\gamma(x)$  периодичны при  $x \geq x_b$ . В этих предположениях выражение для комплексной скорости (2.1) можно записать в виде

$$\bar{V}(z) = V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_1} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{x_a}^{x_b} \frac{\gamma(\xi)}{z - \zeta(\xi)} \frac{1 - if'(\xi)}{\sqrt{1 + (f'(\xi))^2}} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{x_b}^{x_b + \lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\gamma(\xi)}{z - (\xi + k\lambda + if(\xi))} \frac{1 - if'(\xi)}{\sqrt{1 + (f'(\xi))^2}} d\xi. \quad (3.4)$$

Здесь последнее слагаемое обусловлено наличием бесконечной системы волн длины  $\lambda$  при  $x \geq x_b$ .

Систему линейных интегральных уравнений (3.1), (3.2) будем решать методом панелей высокого порядка [5]. С этой целью в области  $[x_a, x_b]$  построим сетку узлов  $x_k$  ( $k = 1, \dots, N + 1$ ),  $x_1 = x_a$ ,  $x_{N+1} = x_b$ . Потребуем выполнения линеаризованных граничных условий (3.1), (3.2) в точках коллокации  $x_{0k} \in [x_k, x_{k+1}]$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Дальнейшая дискретизация рассматриваемой системы связана с предположением о том, что свободная поверхность в интервале  $[x_k, x_{k+1}]$  аппроксимируется параболой, а интенсивность вихревого слоя на этом же интервале — линейной функцией. При этом предполагается, что

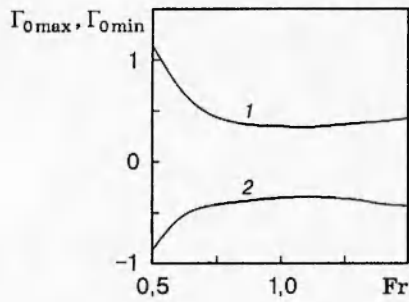


Рис. 2. Зависимость предельных значений  $\Gamma_{0\max}$  (1) и  $\Gamma_{0\min}$  (2), для которых возможно решение задачи, от числа Фруда  $Fr$

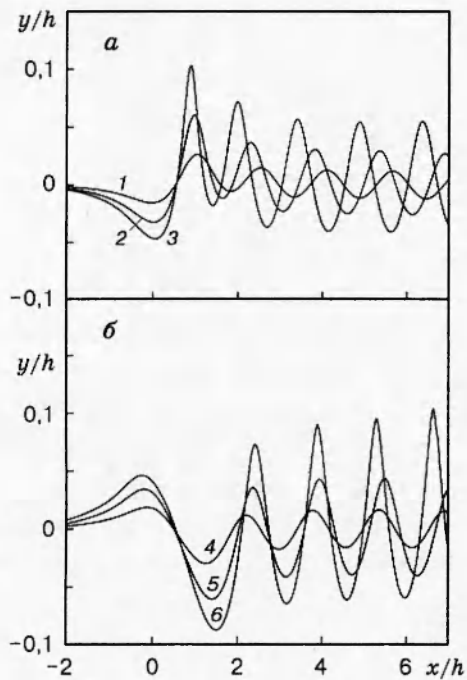


Рис. 3

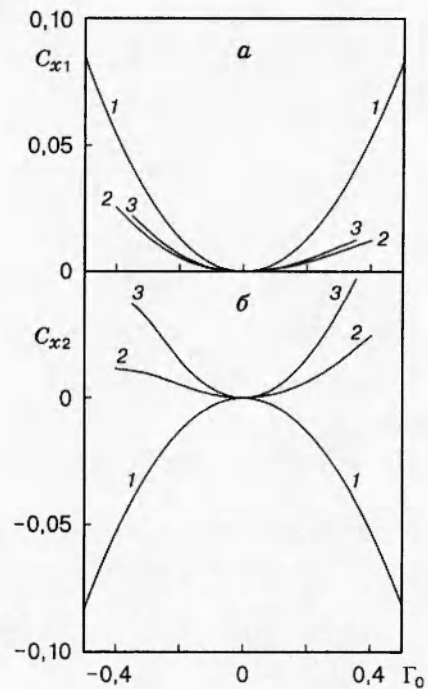


Рис. 4

Рис. 3. Форма свободной поверхности для  $Fr = 0,5$ :

1-6 —  $\Gamma_0 = -0,3; -0,6; -0,861; 0,4; 0,8; 1,142$

Рис. 4. Зависимость сил  $C_{x1}$  и  $C_{x2}$ , действующих на вихри, от их интенсивностей  $\Gamma_0$ :

1-3 —  $Fr = 0,5; 0,8; 1$

$\gamma(x_1) = f(x_1) = 0$ . Значения производной  $f'(x)$  в точках коллокации выразим через значения  $f(x)$  в соседних узлах с помощью формул численного дифференцирования четвертого порядка [6]. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\Delta\gamma^{(n)}(x_k)$  и  $\Delta f^{(n)}(x_k)$  ( $k = 2, \dots, N+1$ ).

Опишем алгоритм решения задачи в целом. Сначала выполняются итерации метода Ньютона до получения некоторого решения. Начальное приближение определяется (3.3). Последнее слагаемое в (3.4), обусловленное наличием бесконечной волновой системы, опускается. При этом на каждом шаге при помощи метода верхней релаксации решается система  $2N$  линейных уравнений. Далее используется второй итерационный процесс, связанный с использованием в качестве начального приближения метода Ньютона уже известного решения. При этом длина генерируемых волн  $\lambda$  находится из решения, полученного на предыдущем шаге дополнительного итерационного процесса. Этот процесс продолжается до достижения необходимой точности.

4. На основании предложенного метода проведен обширный численный эксперимент по решению задачи об обтекании системы двух вихрей противоположной интенсивности установившимся потоком весомой жидкости при наличии свободной поверхности. Безразмерными параметрами задачи являются число Фруда  $Fr = V_\infty/\sqrt{gh}$  и интенсивность вихрей  $\Gamma_0 = \Gamma/(V_\infty h)$ . В качестве расчетной выбиралась область  $[-2,5\lambda_0; 4,5\lambda_0]$  ( $\lambda_0 = 2\pi V_\infty^2/g$  — длина волны, полученная по линейной теории). В расчетах полагалось  $N = 210$ ,  $d = \lambda_0/2$ .

Уровень возмущений свободной поверхности при фиксированном значении числа Фруда определяется интенсивностями вихрей. Высота свободной поверхности не может быть больше  $y_{\text{lim}}/h = Fr^2/2$ . Это обстоятельство накладывает ограничения на величину  $\Gamma_0$ . Увеличивая или уменьшая  $\Gamma_0$ , можно получить предельные значения  $\Gamma_{0\text{max}}$  и  $\Gamma_{0\text{min}}$ , для которых возможно решение рассматриваемой задачи. Эти значения представлены на рис. 2 для различных  $Fr$ . Максимальное возвышение свободной поверхности, рассчитанное для предельных значений  $\Gamma_0$ , составляет не менее 85–86% от  $y_{\text{lim}}/h$ .

Результаты численного эксперимента по оценке влияния параметров задачи на характер волнообразования приведены на рис. 3. В случае, когда вихрь, расположенный вверх по потоку, имеет положительную интенсивность, максимального значения свободная поверхность достигает в бесконечном удалении справа (рис. 3, б). Если вверх по потоку расположен вихрь отрицательной интенсивности, то максимальное возвышение свободной поверхности наблюдается непосредственно над системой вихрей (рис. 3, а). Таким образом, характер волн, образующихся в дальнем поле, полностью определяется знаком интенсивности вихря, расположенного вниз по потоку. Для предельных значений  $\Gamma_0$ , для которых возможно решение задачи, наблюдается ярко выраженный нелинейный характер генерируемых волн.

Fr	$\Gamma_0$					
	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3
	$C_{y1}$					
0,5	0,6037	0,4016	0,2004	-0,1996	-0,3985	-0,5968
0,8	0,6141	0,4067	0,2017	-0,1981	-0,3923	-0,5825
1,0	0,6144	0,4068	0,2018	-0,1979	-0,3909	-0,5789
	$C_{y2}$					
0,5	-0,5971	-0,3987	-0,1997	0,2003	0,4014	0,6033
0,8	-0,5842	-0,3933	-0,1984	0,2015	0,4061	0,6134
1,0	-0,5787	-0,3921	-0,1982	0,2017	0,4065	0,6149

Расчеты безразмерных коэффициентов гидродинамических нагрузок

$$C_{xj} = \frac{2R_{xj}}{\rho V_{\infty}^2 h}, \quad C_{yj} = \frac{2R_{yj}}{\rho V_{\infty}^2 h} \quad (j = 1, 2),$$

действующих на вихри, представлены на рис. 4 и в таблице соответственно. При  $Fr = 0,5$  вследствие малости расстояния между вихрями и амплитуды генерируемых волн основной вклад в  $C_{xj}$  вносят силы взаимодействия вихрей. Этот факт объясняет различия в значениях данных коэффициентов, рассчитанных для разных  $Fr$ , и наличие тянущей силы у вихря, расположенного вниз по потоку, при  $Fr = 0,5$ . При  $Fr = 0,8; 1$  проявляются силы волнового воздействия, которые приводят к возникновению силы сопротивления для обоих вихрей. Значения коэффициента  $C_{yj}$  определяются подъемной силой Жуковского и мало зависят от числа Фруда. Этот факт подтверждают приведенные в таблице значения коэффициентов, которые для фиксированных значений  $\Gamma_0$  и разных  $Fr$  отличаются друг от друга на малые величины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Маклаков Д. В.** Обтекание препятствия с образованием нелинейных волн на свободной поверхности. Предельные режимы // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 2. С. 108–117.
2. **Вальдман Н. А.** Метод решения плоских нелинейных задач теории корабельных волн // Гидродинамика высоких скоростей. Л.: Судостроение, 1987. Вып. 13. С. 17–28.
3. **Grue J., Friis H. A., Palm E., Rusan P. O.** A method for computing unsteady fully nonlinear interfacial waves // J. Fluid. Mech. 1997. V. 351. P. 223–252.
4. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
5. **Hess J. L.** Higher-order numerical solution of the integral equation for the two-dimensional Neumann problem // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 1973. V. 2, N 1. P. 1–15.
6. **Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.** Численные методы. М.: Наука, 1987.

*Поступила в редакцию 9/I 1998 г.,  
в окончательном варианте — 11/VIII 1998 г.*