тервале времени. Оценки интенсивностей излучения, при которых процесс горения превалирует над процессом испарения, приведены в [9].

В случае полидисперсного аэрозоля фронт волны просветления будет размыт, поскольку частицы разных размеров воспламеняются при различной интенсивности падающего на них излучения.

Иными словами, в аэрозоле будет существовать перемещающаяся область конечной ширины, отделяющая горящие частицы от негорящих. В пределах данной области имеются как горящие, так и негорящие частицы. Положение такой области и скорость ее перемещения можно оценить на основании приведенных выше результатов, взяв в качестве размера частицы характерный средний радиус. Такая оценка будет, очевидно, тем более точной, чем у́же диапазон размеров частиц.

Авторы выражают благодарность В. Н. Штерну, В. И. Букатому, А. М. Шайдуку и А. А. Тельнихину за полезные обсуждения.

Поступила 9 VI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сухоруков А. П., Хохлов Р. В., Шумилов Э. Н.** Динамика просветления облаков лазерным пучком.— Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 14, № 4.
2. **Сухоруков А. П., Шумилов Э. Н.** Просветление полидисперсного тумана.— ЖТФ, 1973, т. 43, № 5.
3. **Sutton G. W.** Fog dispersal by high-power lasers.— AIAA J., 1970, N 10.
4. **Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.** Теория волн. М.: Наука, 1979.
5. **Ван де Хюлст Г.** Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961.
6. **Блох А. Г.** Тепловое излучение в котельных установках. Л.: Энергия, 1967.
7. **Крылов В. Н., Скобля Н. С.** Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974.
8. **Хитрин Л. Н.** Физика горения и взрыва. М.: изд. МГУ, 1957.
9. **Букатый В. И., Сагалаков А. М. и др.** Горение углеродных частиц в мощном оптическом поле.— ФГВ, 1979, т. 15, № 6.

УДК 532.516

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОЦЕССАХ НЕЛИНЕЙНОГО ПЕРЕНОСА, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ ТУРБУЛЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

К. Б. Павлов, А. С. Романов, И. А. Федотов

(Москва)

Параболическое квазилинейное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{n-1}\frac{\partial u^k}{\partial x}\right)=0,\quad k,n>0,\quad kn>1 \tag{1}$$

описывает различные процессы переноса в случае степенной зависимости коэффициентов переноса от переносимой величины u и ее градиента $\partial u/\partial x$. В частности, при $n=1$ уравнение (1) может рассматриваться как уравнение нелинейной теплопроводности, при $k=1$ — переноса импульса в неньютоновской дилатантной жидкости и в общем случае $k,\ n\neq 1$ как уравнение турбулентной фильтрации [1—3]. Существенной особенностью процессов переноса, описываемых уравнением (1), является наличие линии $x=x_f(t)$, разграничивающей область с $u(x,t)=0$ и область локализации возмущений с $u(x, t) > 0$ [4]. В работе исследуются закономерности движения фронта $x = x_f(t)$ в задаче Коши для уравнения (1).

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ задано симметричное по x начальное распределение переносимой величины, описываемое ограниченной финитной функцией

$$u_0(x)\begin{cases} > 0 & \text{при } |x| < |x_\text{ф}|, \\ = 0 & \text{при } |x| > |x_\text{ф}|, \end{cases}$$

и что асимптотическое представление функции $u_0(x)$ при $x \to x_\text{ф} + 0$, $x_\text{ф} < 0$ имеет вид

$$u_0(x) \sim U_0(x - x_\text{ф})^\omega, \quad \omega \geqslant 0. \tag{2}$$

Тогда закон движения фронта $x_f = x_f(t)$ должен быть найден из решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x}\right)^n = 0, \quad 0 > x > x_f(t), \quad t > 0, \tag{3}$$
$$u(x, 0) = u_0(x),$$

где необходимо считать $x_f(0) = x_\text{ф}$. Из условия непрерывности искомого решения $u(x, t)$ и его производных $(\partial u^k/\partial x)^n$ на фронте $x = x_f(t)$ следует, что

$$u[x_f(t), t] = \left(\frac{\partial u^k}{\partial x}\right)^n [x_f(t), t] = 0. \tag{4}$$

Дифференцируя первое из условий (4) вдоль линии $x = x_f(t)$, получим выражение

$$\dot{x}_f \equiv \frac{dx_f}{dt} = -\lim_{x \to x_f + 0} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1},$$

которое, учитывая (3), можно преобразовать к виду

$$\dot{x}_f = -\lim_{x \to x_f + 0} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u^k}{\partial x}\right)^n\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1}. \tag{5}$$

Из равенства (5) следует асимптотическое представление для переносимой величины

$$u(x, t) \sim \left[\frac{kn - 1}{kn}\right]^{\frac{n}{kn-1}} (-\dot{x}_f)^{\frac{1}{kn-1}} (x - x_f)^{\frac{n}{kn-1}}, \quad x \to x_f + 0. \tag{6}$$

Соотношения (5), (6) не имеют места, если $\dot{x}_f \equiv 0$.

Определим теперь движение фронта при $t \to +0$. Будем исходить из естественного условия непрерывного перехода решения $u = u(x, t)$ в начальное условие $u(x, 0) = u_0(x)$ при $t \to +0$

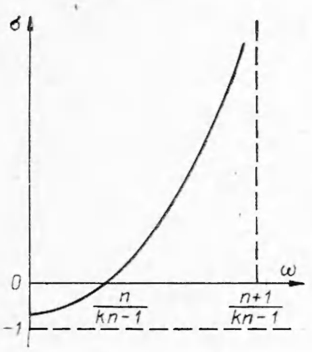
$$u(x, t) \sim U_0(x - x_\text{ф})^\omega, \quad t \to +0, \quad x \to x_\text{ф} + 0. \tag{7}$$

Учитывая, что $(x - x_f)^\omega \sim (x - x_\text{ф})^\omega$ при $t \to +0$, $x \to x_\text{ф} + 0$ и $x_f - x_\text{ф} = \int_0^t \dot{x}_f dt$, из (6), (7) получим соотношение

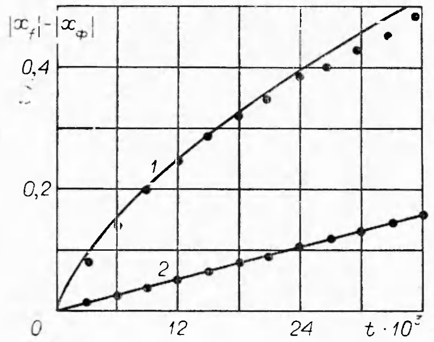
$$(-\dot{x}_f)^{\frac{1}{kn-1}}\left[-\int_0^t \dot{x}_f dt\right]^{\frac{n}{kn-1} - \omega} \sim U_0\left[\frac{kn}{kn - 1}\right]^{\frac{n}{kn-1}}, \quad t \to +0, \quad x \to x_\text{ф} + 0.$$

Функцию $\dot{x}_f = \dot{x}_f(t)$ будем искать в виде

$$\dot{x}_f = -At^\sigma < 0, \tag{8}$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

тогда $A = \left\{\left(\frac{kn}{kn-1}\right)^n \beta^{\beta-1} U_0^{kn-1}\right\}^{1/\beta}$, $\sigma = -1 + 1/\beta, \beta = 1 + n + \omega - kn\omega$.

Зависимость показателя $\sigma = \sigma(\omega)$ показана на фиг. 1. При $0 < \omega < n/(kn-1)$ скорость движения фронта $\dot{x}_f \to -\infty$ при $t \to +0$, но переносимая величина остается локализованной, так как $|x_f - x_ф| < \infty$, поскольку $\sigma > -1$, $0 < A < \infty$. Если $\omega = n/(kn-1)$, то $\dot{x}_f(0) = [kn/(kn-1)]^n U_0^{kn-1}$. Если же $n/(kn-1) < \omega < (n+1)/(kn-1)$, то $\dot{x}_f \to 0$ при $t \to +0$.

Представляет интерес рассмотреть предельный переход при $\omega \to (n+1)/(kn-1)$. В этом случае производные $d^j x_f/dt^j(0) = 0$ вплоть до $j = [\sigma] \to \infty$, поэтому в пределе необходимо считать $\dot{x}_f \equiv 0$ при $t \to +0$, а выражения (5), (6) становятся, как отмечалось, неправомерными.

Будем искать асимптотическое представление функции $u = u(x, t)$ при $x \to x_f + 0$ непосредственно в виде

(9) $$u(x, t) \sim a(t)(x - x_ф)^\alpha, \quad a(t) > 0.$$

Из уравнения (3) тогда получим

$$\frac{da}{dt} \sim a^{kn} n (k\alpha)^n (k\alpha - 1)(x - x_ф)^{n(k\alpha-1)-1-\alpha}, \quad x \to x_ф + 0,$$

откуда определяются

$$\alpha = \frac{n+1}{kn-1}, \quad a = \left[\left(\frac{kn-1}{kn+k}\right)^n \frac{1}{n(k+1)(T-t)}\right]^{1/(kn-1)}.$$

Постоянная интегрирования T вычисляется по начальному условию (3)

$$T = U_0^{1-kn}\left(\frac{kn-1}{kn+k}\right)^n \frac{1}{n(k+1)}.$$

Полученное асимптотическое представление решения

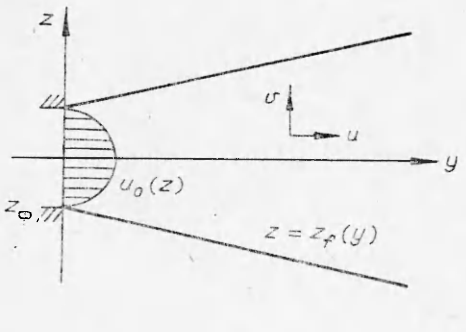
(10) $$u(x, t) \sim a(t)(x - x_ф)^{\frac{n+1}{kn-1}}, \quad x \to x_ф + 0$$

справедливо лишь в конечное время $0 < t < T$ и носит название метастабильного (см., например, [5, 6]).

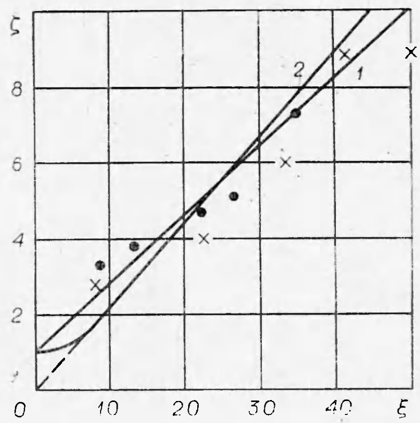
Рассмотрим вспомогательную задачу Коши, отличающуюся от (3) областью определения $\infty > x > x_f(t)$, $t > 0$. Функция

(11) $$u^*(x, t) = \left\{\left(\frac{kn-1}{kn+k}\right)^n \frac{(x - x_ф)^{n+1}}{n(k+1)(T^* - t)}\right\}^{1/(kn-1)},$$

$$\infty > x > x_ф, \quad t < T^* = \mathrm{const} < \infty$$



Фиг. 3



Фиг. 4

является решением вспомогательной задачи с соответствующим начальным условием, содержащим константу T^*.

В силу монотонной зависимости решения задачи Коши для уравнения (1) от начального условия функция (11) мажорирует любое решение симметричной задачи (3) [4] при должном подборе константы T^* для любого $\omega \geqslant (n+1)/(kn-1)$. Следовательно, при $\omega \geqslant (n+1)/(kn-1)$ имеет место режим $x_f \equiv x_ф$, по крайней мере, в течение конечного отрезка времени $0 \leqslant t \leqslant T^*$.

Для подтверждения полученного асимптотического соотношения (8) был проведен численный расчет процесса переноса, описываемого уравнением (1) для $k = 1$, $n = 2$ с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} (1-|x|)^{\omega}, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Поставленная задача Коши дополнялась при расчетах граничными условиями $u(l, t) = 0$, $|l| = 2$, что возможно, если $|x_f(t)| < 2$. Дифференциальное выражение (1) после квазилинеаризации вблизи решения аппроксимировалось по неявной разностной схеме второго порядка точности. Расчеты велись методом прогонки. Положение фронта $|x| = |x_f(t)|$ определялось приближенно по условию $u(x_f, t) = 10^{-5}u(0, t)$. Достаточная точность получалась, если выбрать шаг $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta t = 10^{-3}/3$ по x и t соответственно.

Некоторые результаты сравнения теоретических зависимостей с численными приведены на фиг. 2, где показано движение фронта области локализации $|x_f| - |x_ф|$ со временем. Кривые *1*, *2* рассчитаны по формуле (8) и соответствуют значениям показателя $\omega = 1{,}5$; $2{,}0$. Положение фронта, полученное численно, указано точками. Для $\omega \geqslant 3$ теоретически установлена метастабильная локализация решения. При численных расчетах в этом случае фронт оставался неподвижным в течение всего времени счета до $t = 20\Delta t$. Проведенные расчеты в области изменения показателя $0 \leqslant \omega < 3$ полностью подтвердили соотношение (8).

В качестве приложения применим развитую теорию к анализу задачи о затопленной турбулентной струе конечной ширины несжимаемой жидкости (фиг. 3). В приближении теории пограничного слоя турбулентный перенос импульса описывается системой уравнений

$$u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{z^i}\frac{\partial}{\partial z}\left[z^i\frac{\tau}{\rho}\right], \tag{12}$$

$$\frac{\partial u z^i}{\partial y} + \frac{\partial v z^i}{\partial z} = 0, \quad \tau = \rho l_т^2\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\frac{\partial u}{\partial z},$$

где $i = 0{,}1$ соответствует плоской и цилиндрической симметрии задачи ρ — плотность жидкости; τ — напряжение турбулентного трения, определяемое по Прандтлю [7, 8]; $l_т$ — длина турбулентного перемешивания. В рассматриваемом случае затопленной струи $l_т = cy$ [7, 8], c — эмпирическая константа теории.

В плоскости сечения сопла $y = 0$ (фиг. 3) скорость жидкости равна

$$u(0, z) = u_0(z) \begin{cases} > 0 & \text{при } |z| < |z_ф|, \\ = 0 & \text{при } |z| > |z_ф|, \end{cases} \tag{13}$$

причем асимптотическое представление для $u_0(z)$ при $|z| \to |z_ф| - 0$, $z_ф < 0$ будем считать заданным в виде

(14) $u_0(z) \sim W(|z_ф| - |z|)^\gamma$, $|z| \to |z_ф| - 0$, $W = \mathrm{const} > 0$, $\gamma = \mathrm{const} \geqslant 0$.

Особенностью турбулентной затопленной струи в данной постановке является ее конечная ширина. Иными словами, в любом сечении струи $y = y_0$ существует граница струи $z = z_f(y_0)$, $z_f(0) = z_ф$ такая, что $u(y_0, |z| < |z_f(y_0)|) > 0$ и $u(y_0, |z| > |z_f(y_0)|) = 0$. На границе струи выполняются физически очевидные условия отсутствия скорости $u(y, \pm z_f) = 0$ и напряжения турбулентного трения $\partial u/\partial z(y, \pm z_f) = 0$.

Если перейти к новым независимым переменным, являющимся обобщением переменных Мизеса [8], $y, z \to t, x$, где

$$dt = \frac{1}{4} c^2 y^2 \left[(i+1) \int\limits_0^{x_f} \frac{dx}{u} \right]^{3i/(i+1)} dy, \quad dx = uz^i dz, \tag{15}$$

то исходная задача (12)—(14) в области $0 > x > x_f$ сводится к задаче Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \int\limits_{x_f}^{x} \frac{dx}{u} \left(\int\limits_0^{x_f} \frac{dx}{u} \right)^{-1} \right]^{\frac{3i}{i+1}} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad x_f = x(y, z_f); \tag{16}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \sim U_0 (x - x_ф)^\omega, \quad x \to x_ф + 0, \quad x_ф = x(0, z_ф); \tag{17}$$

$$u(t, x_f) = 0. \tag{18}$$

Здесь $\quad U_0 = W \left[(W z_ф^i)^{-1} (1 + \gamma) \right]^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}; \quad \omega = \gamma/(1 + \gamma).$

Из условия ограниченности начального распределения скорости $0 \leqslant \gamma < \infty$ следует, что $0 \leqslant \omega < 1$.

Ограничиваясь областью струи вблизи ее границы $x \to x_f + 0$, имеем

$$\int\limits_{x_f}^{x} \frac{dx}{u} \left(\int\limits_0^{x_f} \frac{dx}{u} \right)^{-1} \to 0,$$

при этом уравнение (16) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad x \to x_f(t) + 0, \tag{19}$$

которое вместе с условиями (17), (18) совпадает с задачей (3) для $k = n = 2$.

Обратный переход к физическим переменным y, z осуществляется исходя из соотношений (15).

В итоге в соответствии с развитой теорией для границы струи получаются выражения

(20) $$z_f \sim z_\Phi + 6^{1/3}\varkappa(1-\omega)y,\ y \to +0,\ \varkappa^3 = 2c^2$$

для плоской струи ($i = 0$) и

(21) $$z_f \sim 2^{1/2}\left[z_\Phi^2/2 + 12^{2/3}(1-\omega)^{1/3}t^{1/3}\right]^{1/2},\quad t \to +0$$

для цилиндрической ($i = 1$). Здесь $t = t(y)$ вычисляется из соотношения

$$\left[z_\Phi^2/2 + 12^{2/3}(1-\omega)^{1/3}t^{1/3}\right]^{-3/2}dt = 2^{3/2}c^2dy^3/12.$$

При этом, если выполняется неравенство $y \gg z_\Phi$, выражение (21) аппроксимируется соотношением

(22) $$z_f \sim 3^{1/3}2(1-\omega)^{1/3}\varkappa y,\ y \to +0\ (i = 1).$$

На фиг. 4 приведено сравнение полученных теоретических зависимостей для границы струи $z_f = z_f(y)$ с экспериментальными данными [9, 10] в безразмерных координатах $\zeta = z_f/z_\Phi$ и $\xi = y/z_\Phi$. Кривые *1*, *2* построены по формулам (20), (21). При этом полагалось $\omega = 0$, $\varkappa = 0{,}1$ и $0{,}077$ для $i = 0$ и 1 соответственно [7]. Крестиками помечены экспериментальные данные для плоской турбулентной струи ($i = 0$) [9], а точками — для цилиндрической ($i = 1$) [10]. Штриховая линия построена по приближенной зависимости (22).

Совпадение полученных теоретических зависимостей, результатов численных расчетов и экспериментальных данных свидетельствует об эффективности развитого асимптотического метода.

Авторы благодарят К. А. Волосова за помощь при проведении численных расчетов.

Поступила 11 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.— Сб., посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
2. **Уилкинсон У. Л.** Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964.
3. **Лейбензон Л. С.** Общая задача о движении сжимаемой жидкости в пористой среде.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1947, т. 9, № 1.
4. **Баренблатт Г. И., Вишик М. И.** О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
5. **Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др.** Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— ДАН СССР, 1975, т. 223, № 6.
6. **Мартинсон Л. К.** Распространение сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6.
7. **Абрамович Г. Н.** Теория турбулентных струй и следов. М.: ГИФМЛ, 1960.
8. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
9. **Förtmann E.** Über turbulente Strahlausbreitung.— Ingenieur-Archiv, 1934, vol. V, N 1.
10. **Trüpel T.** Über die Einwirkung eines Luftstrahles auf die umgebende Luft.— Zeitschrift für das gesammte Turbinenwesen, 1915, N 5—6.

УДК 532.5

О СПЕКТРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ

И. В. Никитина, А. Г. Сазонтов

(Горький)

Центральной проблемой теории развитой сильной турбулентности является, как известно, определение спектра турбулентности. Современные представления о масштабно-инвариантных спектрах основываются на идеях Колмогоро-