

10. Charwat A. F., Kelly R. E. The flow and stability of thin liquid films on a rotating disk. — J. Fluid Mech., 1972, vol. 53, p. 2.
 11. Espig H., Hoyle R. Waves in a thin liquid layer on a rotating disk. — J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, p. 4.
 12. Бутузов А. П., Пуховой И. И. О режимах течения пленки жидкости на вращающейся поверхности. — ИФЖ, 1976, т. 31, № 2.

УДК 532.526

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ИСКАЖЕНИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СОБСТВЕННЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Н. А. Желтухин, Н. М. Терехова

(Новосибирск)

1. Одной из фаз нелинейного развития возмущений в области перехода от ламинарного режима течения к турбулентному в пограничном слое вязкой несжимаемой жидкости на пластине является фаза зарождения и последующего развития трехмерного осцилляционного поля, в результате чего возмущения обнаруживают четко выраженную пространственную структуру с чередующимися максимумами (гребнями или пиками) и минимумами (впадинами) амплитуд в поперечном направлении (по оси z). Вопрос о причинах появления в течении такого собственного волнового поля еще окончательно не выяснен. Одной из них может быть взаимодействие первоначально плоских возмущений конечной интенсивности с малыми локальными пространственными неоднородностями среднего течения, которое приводит к порождению пары косых волн Толлмина — Шлихтинга [1]. Собственные слабые неоднородности волн, имеющие место в районе передней кромки, также могут нести в себе прообраз будущих реальных волновых полей.

Дальнейшее трехволновое резонансное взаимодействие в области нелинейного развития плоских волн приводит к усилению трехмерных компонент [2, 3]. Так, в [4] показано, что при достижении пороговых амплитуд $\kappa_d \sim 0,007$ начинается сильный рост косых волн, так что собственное поле возмущений пограничного слоя принимает вид аддитивного поля волн Толлмина — Шлихтинга:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u'(x, y, z, t) &= \kappa_d u_d(y) e^{\Omega_1} + 2\kappa_T u_T(y) e^{\Omega_2} \cos \beta z, \\ v'(x, y, z, t) &= \kappa_d v_d(y) e^{\Omega_1} + 2\kappa_T v_T(y) e^{\Omega_2} \cos \beta z, \\ w'(x, y, z, t) &= 2\kappa_T i w_T(y) e^{\Omega_2} \sin \beta z, \end{aligned}$$

где $\Omega_1 = i\alpha_1(x - C_1 t)$; $\Omega_2 = i\alpha_2(x - C_2 t)$. Угол наклона косых волн к плоскости течения определяется как $\theta = \arctg \beta/\alpha$. Наличие собственных возмущений такого вида приводит к качественному изменению структуры среднего течения — в нем обнаруживаются минимумы средней скорости в местах пиков волн и максимумы в местах впадин. Это интерпретируется как появление в потоке системы локализованных в пограничном слое продольных вихрей, периодических по координате z и стационарных (или квазистационарных) во времени (вихри Бенни — Линя). Исследование вторичных вихревых режимов проведено в ряде работ [5—7] по методу возмущений в рамках слабонелинейной теории. Показано, что наличие слабой трехмерности $\kappa_d \gg \kappa_T$ вызывает к жизни слабый подковообразный вихрь, занимающий положение, определяемое полупериодом волн (1.1) $0 \leq \beta z \leq \pi$. Рост амплитудного параметра κ_T приводит к усложнению этой вторичной структуры, и при $\kappa_T \gg \kappa_d$ вихревая картина представится системой противоположно закрученных пар. Такой предельный случай рассмотрен в [8] на основе численного решения уравнений Рейнольдса для осредненного течения, что позволило установить не только количественные зависимости вихреобразования от величин κ_T , но и рассчитать

эпюры продольных компонент средних скоростей, что не было сделано в цитируемых выше работах.

Настоящее исследование, проведенное для волн вида (1.1), расширяет и конкретизирует применение модельного подхода, основанного на решении уравнений Рейнольдса, к описанию сложных вторичных режимов течения в области перехода.

2. Итак, в пограничном слое на плоской пластине, профиль скорости которого описывается уравнением

$$(2.1) \quad \Phi_{\eta\eta\eta} + \Phi\Phi_{\eta\eta} = 0, \quad \eta = y(\bar{U}_0/2\nu x)^{1/2}, \quad U_0 = \Phi_\eta, \\ \Phi = \Phi_\eta = 0 (\eta = 0), \quad \Phi_\eta \rightarrow 1 (\eta \rightarrow \infty),$$

в области нелинейного развития возмущений возникают собственные колебания (1.1). Амплитудные функции волн u, v, w удовлетворяют линеаризованным уравнениям Навье — Стокса [9]. Для упрощения анализа примем, что фазы Ω_1 и Ω_2 равны, ибо, как показано в [7], введение в анализ частотного несоответствия волн разной размерности, проявляющегося в отличии фазовых скоростей C_1 и C_2 на 10—15%, не имеет принципиальной важности. Но заметим, что такое несоответствие может быть введено через разность фаз $\Delta\Omega$, которая будет присутствовать в формулах как множитель.

Вторичный режим, индуцированный (1.1), принимает вид пространственного течения $U = U(\eta, z)$, $V = V(\eta, z)$, $W = W(\eta, z)$ и описывается системой

$$(2.2a) \quad VU_\eta + WU_z - (1/\text{Re})(U_{\eta\eta} + U_{zz}) = -f_1;$$

$$(2.2b) \quad VV_\eta + WV_z + P_\eta - \frac{1}{\text{Re}}(V_{\eta\eta} + V_{zz}) = -\frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial \eta} - \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z}, \\ VW_\eta + WW_z + P_z - \frac{1}{\text{Re}}(W_{\eta\eta} + W_{zz}) = -\frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial \eta} - \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z}, \\ V_\eta + W_z = 0.$$

В правых частях стоят напряжения Рейнольдса, полученные статистическим осреднением соответствующих моментов второго порядка, вид которых конкретизируется ниже. Автомодельная переменная η рассматривается здесь как однородная поперечная координата, а сами уравнения безразмерны посредством деления на характерную скорость \bar{U}_0 и толщину пограничного слоя δ .

По оценкам [10] зона пространственного роста возмущений и установления связанных с ними вторичных явлений имеет порядок δ . Рассматриваемые в работе режимы имеют место после этой зоны. Замыкание (2.2) проведено в рамках моногармонического приближения [3] — для основной гармоники вида (1.1).

Система (2.2) допускает разделение, и можно найти продольные вихри с компонентами V, W отдельно от эпюр $U(\eta, z)$. Как показано в [8], для амплитуд $\kappa_T \leq 0,01$ ($\theta \sim \pi/6$) пренебрежение конвективным переносом в (2.2b) вполне оправдано, что позволяет для функции тока $V = \psi_z$, $W = -\psi_\eta$ привести (2.2b) к виду

$$(2.3) \quad \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + F(\eta, z) = 0.$$

Общий момент сил, создаваемый напряжениями Рейнольдса $F(\eta, z)$, складывается из генерационного действия трехмерных волн F_T и момента F_{dT} , обусловленного нелинейным зацеплением дву- и трехмерных волн, и для (1.1) записывается в виде

$$F(\eta, z) = \kappa_T^2 \mathcal{F}_T(\eta) \sin 2\beta z + \kappa_T \kappa_d \mathcal{F}_{dT}(\eta) \sin \beta z,$$

где

$$(2.4) \quad \mathcal{F}_T(\eta) = \langle v_T w_T \rangle_{\eta\eta} + 2\beta (\langle v_T^2 \rangle_\eta + \langle w_T^2 \rangle_\eta + 2\beta \langle v_T w_T \rangle), \\ \mathcal{F}_{dT}(\eta) = \langle v_d w_T \rangle_{\eta\eta} + \beta (\langle v_d v_T \rangle_\eta + \beta \langle v_d w_T \rangle).$$

Здесь в угловые скобки введены амплитудные функции, которые расширяются следующим образом:

$$\langle uv \rangle = v_i w_r - v_r w_i, \quad \langle v^2 \rangle = v_r^2 + v_i^2, \quad \langle w^2 \rangle = w_r^2 + w_i^2.$$

Из-за линейности (2.3) его решение представим в виде

$$\psi(\eta, z) = \Psi_T(\eta) \sin 2\beta z + \Psi_{dT}(\eta) \sin \beta z,$$

а амплитудные функции удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} (D^2 - 4\beta^2)^2 \Psi_T &= -\kappa_T^2 \operatorname{Re} \mathcal{F}_T(\eta), \\ (D^2 - \beta^2)^2 \Psi_{dT} &= -\kappa_T \kappa_d \operatorname{Re} \mathcal{F}_{dT}(\eta). \end{aligned}$$

Краевая задача для (2.5) определяется из физических условий

$$V = W = 0 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } V, W \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty.$$

Два первых условия позволяют определить

$$(2.6a) \quad \Psi_T = \Psi_{dT} = D\Psi_T = D\Psi_{dT} = 0 \text{ при } \eta = 0,$$

а два вторых заменяются асимптотическими соотношениями, которым для больших η можно придать вид

$$(2.6b) \quad L_1 \Psi_T = L_2 \Psi_{dT} = DL_1 \Psi_T = DL_2 \Psi_{dT} = 0.$$

Здесь $L_1 = D^2 + 4\beta(D + \beta)$; $L_2 = D^2 + \beta(2D + \beta)$. Верхняя граница $\eta = Y$, как правило, соответствовала $(1,5-2)\delta_{\text{лам}}$. Задача (2.5), (2.6) определяет вихревые компоненты вторичного течения $V(\eta, z) = 2\beta\Psi_T \times \cos 2\beta z + \beta\Psi_{dT} \cos \beta z$, $W(\eta, z) = -\Psi_T' \sin 2\beta z - \Psi_{dT}' \sin \beta z$. Период пространственных повторений должен быть выбран как $T = 2\pi/\beta$. Продольная компонента $U(\eta, z)$ определится в области $[0 \leq \eta \leq Y, 0 \leq z \leq T]$ из (2.2a) и краевых условий:

$$U(0, z) = U_\eta(Y, z) = 0, \quad \{U, U_z\}(\eta, 0) = \{U, U_z\}(\eta, T).$$

Правая часть f_1 позволяет выделить следующие составляющие действия волн (1.1):

трехмерное искажение U трехмерными волнами

$$f_{1T} = \kappa_T^2 \langle u_T v_T \rangle_\eta + 2\beta \langle u_T w_T \rangle \cos 2\beta z,$$

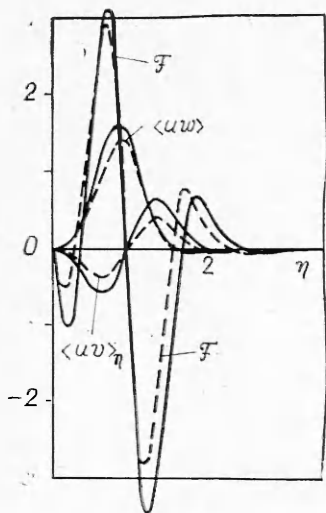
трехмерное искажение, создаваемое взаимодействием волн,

$$f_{1dT} = \kappa_T \kappa_d (\langle u_d v_T \rangle_\eta + \langle u_T v_d \rangle_\eta + \beta \langle u_d w_T \rangle) \cos \beta z,$$

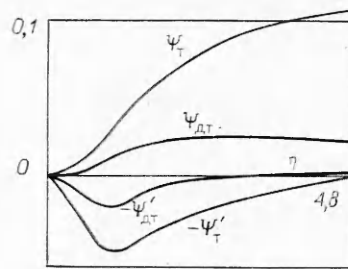
двумерное искажение, производимое дву- и трехмерными волнами $f_{1d} = \kappa_T^2 \langle u_T v_T \rangle_\eta + \kappa_d^2 \langle u_d v_d \rangle_\eta / 2$. Здесь $\langle uv \rangle = u_r v_r + u_i v_i$; $\langle uv \rangle = u_i w_r - u_r w_i$. В отсутствие возмущений (2.2a) определяет ламинарное распределение U_0 , если в правую часть введены силы $f_{10} = -\Phi_{\eta\eta}/\operatorname{Re}$. Так, окончательно $f_1 = f_{1T} + f_{1d} + f_{1dT} + f_{10}$.

3. Реализацию поставленной задачи можно проиллюстрировать на моделировании вторичных режимов, возникающих в областях, близких к критическому числу Рейнольдса по линейной теории. Как показано в работах по исследованию характера ветвления уравнений Навье — Стокса [3, 11], нелинейное развитие волн в этой области лишь незначительно изменяет величину Re_* , таким образом, выбор волн с собственными значениями, соответствующими нейтральным колебаниям, для этой области вполне оправдан.

На фиг. 1 представлены амплитудные функции генерационных сил $\mathcal{F}(\eta)$ вместе с величинами $\langle uv \rangle_\eta$, $\langle uw \rangle$, из которых можно скомпоновать составляющие f_1 (сплошные линии — трехмерные волны, штриховые — дву- и трехмерные). Представленные данные соответствуют $\theta \sim 25^\circ$. Формы кривых довольно хорошо совпадают, весьма незначительно отличаясь в максимумах. С ростом θ отличие в распределениях возрастает. Типичный вид амплитудных функций вихря (2.5) показан на фиг. 2 для того же θ и $\kappa_d = \kappa_T = 0,02$. Как оказалось, при прочих равных условиях интенсивность вихря, индуцированного трехмерными волнами, приближи-



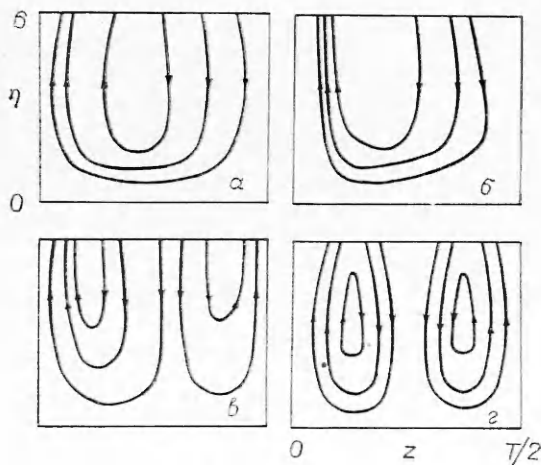
Ф и г. 1



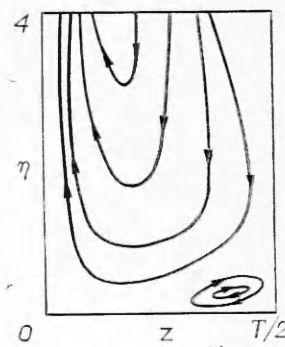
Ф и г. 2

тельно в 5 раз превышает добавочную, определяемую силами \mathcal{F}_{DT} . Такие же соотношения обнаруживаются и для других параметров κ_d , κ_T . Вихревые структуры для некоторых интересных соотношений κ_d и κ_T представлены на фиг. 3. Когда в течении преобладает плоская волна ($\kappa_d/\kappa_T = 20$, фиг. 3, а), очень слабый вихрь ($\psi_{\max}(z \sim T/4) = 0,001$) занимает положение $0 \leq z \leq T/2$, достаточно симметрично распределяясь в области течения. Рост амплитуд трехмерных волн ($\kappa_d/\kappa_T = 10$, фиг. 3, б) приводит к нарушению симметрии распределения (линии тока $\psi = \text{const}$ сгущаются в областях малых z) и к увеличению $\psi_{\max}(z \sim T/6) = 0,003$. В областях $\kappa_d \sim \kappa_T$ (фиг. 3, в) вихревая структура усложняется, обогащаясь более слабым противоположно закрученным вихрем, который отесняет первоначальный из областей $T/3 \leq z \leq T/2$. Вихревая интенсивность исходного вихря при этом максимальна $\psi_{\max}(z \sim T/8) = 0,125$, а у добавочного $\psi_{\max}(z \sim 3T/8) = 0,09$. Преобладание косых волн $\kappa_T \gg \kappa_d$ (фиг. 3, г) приводит к картинам, разобранным в [8], т. е. к симметрично расположенной и распределенной паре, разделяющейся в $z = T/4$ с $\psi_{\max}(z = T/8) \sim 0,1$.

В экспериментах [12] замечено, что при некоторых режимах наблюдалось изменение знака полной трансверсальной скорости в положениях, очень близких к стенке. Это изменение сигнала W было интерпретировано как появление слабых пристенных вихрей, лежащих ниже критического слоя, которые подавляются влиянием стенки. Для Re_* и $\theta \sim 25^\circ$ такой режим возможен при $\kappa_d = 0,05$ в диапазоне $10 \leq \kappa_d/\kappa_T \leq 25$ (фиг. 4). Увеличение угла θ при фиксированном Re приводит к уменьшению предельных амплитуд κ_d , при которых этот режим возможен, но неизменным условием появления усложненной структуры является преобладание плоской волны, что выражается в сохранении диапазона κ_d/κ_T его существования. Для нижней ветви нейтральной кривой при



Ф и г. 3



Ф и г. 4

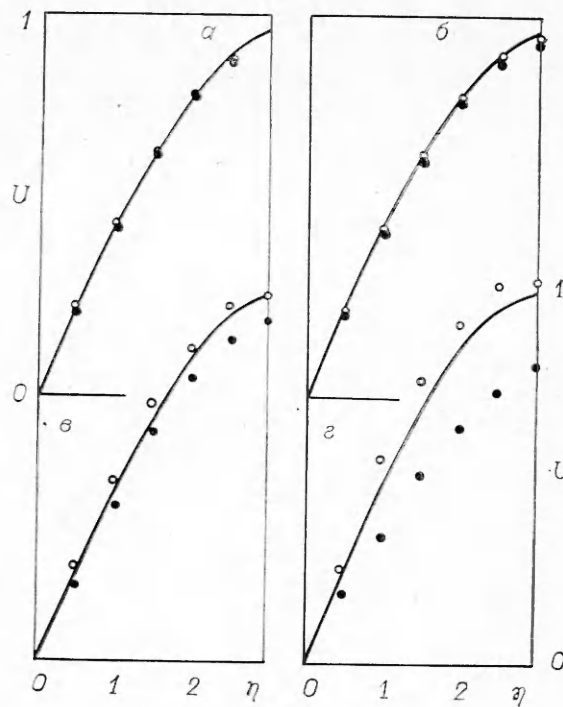
$Re \sim 10^3$ подобный режим отвечает значениям $\kappa_d = 0,01$, $\theta \sim 50^\circ$ и $7 \leq \kappa_d/\kappa_T \leq 11$.

Такой подробный анализ вихревых структур позволяет дополнить работу [7] количественными соотношениями и показывает, что в рамках линейного подхода описания явлений с позиций осредненных течений и с позиций метода возмущений в рамках слабонеплывной теории вполне тождественны и типологически соответствуют экспериментально наблюдаемой тонкой структуре вторичного течения.

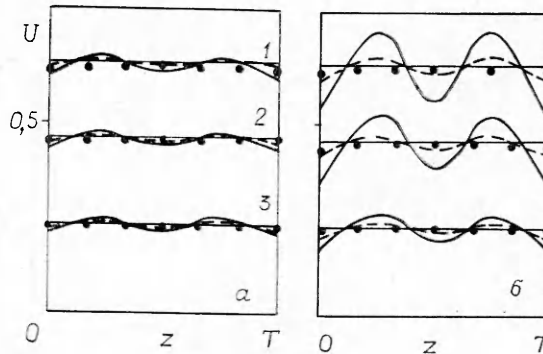
Оказалось, что наличие в пограничном слое когерентной структуры в виде системы продольных вихрей производит следующее перераспределение массы и количества движения жидкости — в некоторых местах пространства вихри вовлекают в движение пристенные низкоскоростные слои жидкости, выносят их в области внешних границ, что сопровождается уменьшением заполненности локальных распределений $U(\eta, z)$. В других областях происходит обратное явление — вихри приносят жидкость из потенциального ядра течения, в результате чего заполненность пристенных участков возрастает. Подобное перераспределение, полученное в рамках (2.2а), показано на фиг. 5 для $\kappa_d = 0,005$ и $\kappa_d/\kappa_T = 10; 5; 1$ и $0,5$ (а — г соответственно). Здесь сплошной линией нанесены ламинарные скорости $U_0 = \Phi_\eta$, а точками — расчетные значения максимальных и минимальных эпюр $U(\eta, z)$.

Суммарная картина искажения U приведена на фиг. 6 для $\theta \sim 25^\circ$ и $\kappa_d/\kappa_T = 2; 4; 10$ (сплошные и штриховые линии, точки). Фиг. 6, а соответствует $\kappa_d = 0,0025$, фиг. 6, б — $0,005$. Сплошные горизонтальные линии 1—3 — ламинарные U_0 для $\eta = 1,5; 1$ и $0,5$ соответственно. Отсюда можно получить эпюры $U(\eta, z)$ для любых сечений $z = \text{const}$. При некоторых значениях параметра κ_T в областях $z = 0$ профили $U(\eta, 0)$ имеют точку перегиба, что может быть причиной локального роста колебаний в этих местах пространства. Однако в области внешней границы не всегда удается прийти к выходу продольных распределений U на скорость невозмущенного течения. Это отражает факт недостаточности моногармонического приближения в этих областях.

Необходимо сказать несколько слов о времени развития указанных явлений. Так как система (2.2) описывает стационарные или квазистационарные режимы, метод установления [13], используемый для решения



Ф и г. 5



Ф и г. 6

(2.2a), позволяет оценить медленное время \bar{t} , и сравнить его с быстрым временем $t = 2\pi/\alpha C$ волнового процесса (1.1). Оказалось, что для установления распределений, показанных на фиг. 5, на течение должно воздействовать ~ 5 периодов быстрого времени. С ростом угла θ и амплитуд волн κ_T это соотношение уменьшается. Оценки для V, W несколько хуже, здесь t_1/t оценивается в несколько десятков.

Поступила 25 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Tani I. Some thoughts on boundary-layer transition.— In: Laminar-Turbulent Transition: Symp., Stuttgart, 1979, Berlin e. a., 1980.
2. Craik A. D. D. Nonlinear resonant instability in boundary layers.— J. Fluid Mech., 1971, vol. 50, pt 2.
3. Гольдштик М. А., Штерн В. И. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
4. Nakaya C. Three-dimensional waves in boundary layer.— In: Laminar-Turbulent Transition: Symp., Stuttgart, 1979, Berlin e. a., 1980.
5. Benney D. J., Lin C. C. On the secondary motion induced by oscillations in a shear flow.— Phys. Fluids, 1960, vol. 3, N 4.
6. Benney D. J. Finite amplitude effects in an unstable laminar boundary layer.— Phys. Fluids, 1964, vol. 7, N 3.
7. Antar V. N., Collins F. G. Numerical calculation of finite amplitude effects in unstable laminar boundary layers.— Phys. Fluids, 1975, vol. 18, N 3.
8. Желтухин Н. А., Терехова Н. М. Вторичные течения в неустойчивом пограничном слое.— ПМТФ, 1981, № 4.
9. Бетчев Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.
10. Жигулев В. Н. Нелинейная теория развития возмущений.— В кн.: Аэродинамика и физическая кинетика. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1977.
11. Гапонов С. А., Скобелев Б. Ю. Вторичные автоколебательные режимы в течении Блазиуса.— В кн.: Вопросы гидродинамики. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1975.
12. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability.— J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, pt 1.
13. Яненко Н. П. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

УДК 536.252 + 532.5 + 532.68

ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ПРИ БОКОВОМ ПОДВОДЕ ТЕПЛА

А. Г. Кирдяшкин, В. И. Полежаев, А. И. Федюшкин

(Новосибирск, Москва)

1. Введение. Задача о конвекции в вытянутом по горизонтали слое в поле силы тяжести при наличии градиента тепла, направленного вдоль этого слоя, наряду с известной задачей Рэлея — Бенара о возникновении конвекции при подогреве слоя снизу представляет одну из фундаментальных задач теории тепловой конвекции, к которой в последние годы привлечено внимание исследователей благодаря различным техническим, технологическим и геофизическим приложениям (процессы переноса при кристаллизации в горизонтальном методе направленной кристаллизации, в коллекторах установок для преобразования солнечной энергии, в мелководных водоемах и т. д.). Так как гидростатическое равновесие в этом случае отсутствует, то конвекция в отличие от упомянутого случая подогрева снизу имеет здесь место при любой отличной от нуля горизонтальной разности температур, но ее интенсивность и воздействие на поле температур (концентраций) существенно зависят от относительного удлинения слоя, чисел Рэлея, Прандтля. Принципиальную роль играют при этом условия теплообмена на верхней и нижней горизонтальных поверхностях, которые в реальных условиях, как правило, изменяются в широких пределах. Таким образом, здесь имеется широкий класс многопараметрических конвективных процессов, для изучения которых, как и в других случаях, требуются построение математической модели на основе уравнений Навье — Стокса и проверка ее адекватности путем сопоставления с данными лабораторного эксперимента.

Наиболее изученным теоретически является случай, когда вдоль обеих горизонтальных границ задано одинаковое (линейное) распределение температур. В этом случае выполнен ряд работ по устойчивости течения в бесконечно длинном слое [1, 2].