

Из построения видно, что напряжение в плоскости фактически задается значением  $\sigma_{zz}(x, y)$  в ней и двумя первыми производными по  $z$  от этой функции.

Первая производная по  $z$  от  $\sigma_{zz}$  определяет  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{zy}$ , а комбинация  $\sigma_{zz}$  и ее второй производной по  $z$  — остальные компоненты напряжения. На данные две функции накладывается ограничение: на контуре  $\Gamma$  интеграл (3.2) должен обращаться в нуль. Такое условие является следствием предположения о том, что напряженное состояние не содержит нормального вращения ( $G = 0$ ) и может быть использовано в конкретном алгоритме реконструкции для уменьшения ошибок исходных измерений.

Задачи в такой постановке до сих пор решались только для осесимметричного напряженного состояния [4, 7]. Напряженное состояние, не содержащее нормального вращения, существенно шире и содержит осесимметричное состояние как частный случай.

В заключение автор считает своей приятной обязанностью выразить благодарность Х. К. Абену за предложенную тему, а также постоянное доброжелательное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абен Х. К. Интегральная фотоупругость. — Таллинн: Валгус, 1975.
2. Абен Х. К., Иднурм С. И., Иозенсон Ю. И., Келл К.-Ю. Э. Случай слабой оптической анизотропии в оптической томографии тензорного поля // Оптическая томография. — Таллинн: АН ЭССР, 1988.
3. Шарафутдинов В. А. Формула обращения лучевого преобразования симметричных тензорных полей // Там же.
4. Doyle I. F., Danyluk H. T. Integrated photoelasticity for axisymmetric problems // Exper. Mech. — 1978. — V. 18, N 6.
5. Censor V. Finite series-expansion reconstruction methods // Proc. IEEE. — 1983. — V. 71, N 3.
6. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975.
7. Чумак А. В. К решению осесимметричных задач теории упругости // Применение новейших математических методов и вычислительной техники в решении инженерных задач. — 1975. — Т. 12, вып. 7.

г. Таллинн

Поступила 2/VIII 1989 г.

УДК 539.375.5

С. П. Киселев

### О ДИНАМИЧЕСКОМ ПИКЕ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ РАЗРУШЕНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Дано объяснение динамическому пику пластичности [1]. Показано, что этот эффект связан с резким ухудшением пластических свойств металла при скорости деформации  $\dot{\epsilon} \sim 10^5 \text{ с}^{-1}$ .

В [1—4] исследовалось разрушение цилиндрических металлических оболочек, расширяющихся под действием продуктов детонации, при высоких скоростях деформации  $\dot{\epsilon} > 10^4 \text{ с}^{-1}$ . При этом было обнаружено, что высокоскоростное разрушение обладает рядом особенностей, к которым относится наличие масштабного эффекта и динамического пика пластичности.

Объяснение этих особенностей будем искать в рамках описания разрушения как двухстадийного процесса [2]. Первая стадия состоит в накоплении повреждений при пластическом течении. На второй стадии путем распространения трещин происходит разделение оболочки на части за счет запасенной упругой энергии.

Разделим процесс накопления повреждений на два этапа. Предположим, что на первом этапе происходит накопление точечных дефектов,

а на втором — рост пор, образующихся в результате слияния точечных дефектов. Аналогично [5] будем считать, что дефекты возникают при некоординативном движении ступенек, образовавшихся от пересечения краевых и винтовых дислокаций. Тогда из [5] следует, что концентрация дефектов  $c_d = f(\epsilon)$ . Поскольку возникновение пор происходит при некоторой их критической концентрации  $c_d^*$ , материал должен испытать некоторую деформацию  $\epsilon_0$ , прежде чем начнется рост пор.

На втором этапе рост пор определяется вязкими и инерционными свойствами материала. Это предположение справедливо при больших скоростях деформации. Согласно [6], уравнение для радиуса поры имеет вид

$$(1) \quad \dot{R}/R = (\sigma_m - \sigma_0)/\eta_1,$$

где  $\eta_1$  — постоянная величина с размерностью вязкости;  $\sigma_0$  — пороговое напряжение;  $\sigma_m = \sigma_{ii}/3$  — растягивающая шаровая часть тензора напряжений. Из уравнения (1) найдем характерное время роста пор

$$(2) \quad t_p = \eta_1/(\sigma_m - \sigma_0).$$

С учетом изложенного выше запишем уравнение для деформации разрушения как

$$(3) \quad \epsilon_p = \int_0^{t_1} \dot{\epsilon} dt + \int_{t_1}^{t^*} \dot{\epsilon} dt.$$

Полагая  $\epsilon_0 = \int_0^{t_1} \dot{\epsilon} dt$  и считая  $\dot{\epsilon} = \text{const}$  при  $\epsilon > \epsilon_0$ , найдем

$$(4) \quad \epsilon_p = \epsilon_0 + \dot{\epsilon} t_p$$

( $t_p = t^* - t_1$ ). Предположение  $\dot{\epsilon} = \text{const}$  соответствует тому, что оболочка расширяется с постоянной скоростью при  $\epsilon > \epsilon_0$ . Как будет показано ниже, при  $\epsilon > \epsilon_0$  давление в продуктах детонации мало, поэтому ускорением оболочки можно пренебречь. При выводе формулы (4) пренебрегалось временем распространения трещины по оболочке, поскольку, как будет показано ниже, оно на порядок меньше времени разрушения  $t^*$ .

Для определения  $\sigma_m$  рассмотрим напряженное состояние оболочки в рамках упругопластической модели Прайдтля — Рейса [7, 8]:

$$(5) \quad \sigma_i = -p + S_i, \quad S_i = S'_i \sqrt{\frac{2}{3}} Y / \sqrt{\sum_{i=1}^3 (S'_i)^2},$$

$$\dot{S}'_i = 2\mu (\dot{\epsilon}_i - 1/3 \dot{V}/V),$$

$$\dot{V}/V = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3, \quad i = 1, 2, 3$$

( $\sigma_i, S_i, \epsilon_i, p, V, \mu, Y$  — главные напряжения, девиаторы напряжений, деформации, давление, удельный объем, модуль сдвига и предел текучести). Уравнения (5) должны быть дополнены уравнениями движения и энергии. Полная система уравнений приведена, например, в [7, 8]. В случае плоской деформации оболочки справедливы соотношения

$$(6) \quad \epsilon_3 = 0, \quad \dot{V}/V \ll \dot{\epsilon}_1, \quad \dot{V}/V \ll \dot{\epsilon}_2.$$

Подставляя уравнения (6) в систему (5), получим

$$(7) \quad \begin{aligned} \epsilon_2 &\approx -\epsilon_1, \quad \epsilon_2 > 0, \quad S'_3 \approx 0, \\ S'_2 &\approx -S'_1 \approx 2\mu \epsilon_2, \quad S_2 = Y/\sqrt{3}, \\ S_1 &= -Y/\sqrt{3}, \quad \sigma_2 - \sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} Y, \end{aligned}$$

отсюда

$$(8) \quad \sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2)/2.$$

Величина  $\sigma_1$  изменяется от  $-p_d$  (на внутренней поверхности оболочки) до нуля (на внешней поверхности оболочки), поэтому  $|\sigma_1| < p_d$  ( $p_d$  — давление в продуктах детонации (ПД) в окрестности оболочки). Оценим  $p_d$  в интервале  $t_1 < t < t^*$ . Полагая расширение ПД адиабатическим, найдем  $p_d = p_0(R_0/a)^{2\gamma}$ ,  $a = (1 + \varepsilon_0)a_0$ ,  $p_0 = p_H/2$  ( $R_0$ ,  $a_0$  — начальные радиус ПД и внутренний радиус оболочки). Подставляя данные из [3]:  $R_0/a_0 \approx 1/2$ ,  $\gamma = 3$ ,  $p_H = 25,2$  ГПа (ТГ50/50),  $\varepsilon_0 \approx 0,3$ , получим  $p_d \approx \approx 0,04$  ГПа,  $|\sigma_1| < p_d$ . Поскольку для материала ст. 20 [3]  $Y \approx 0,4$  ГПа, из последней формулы системы (7) найдем  $\sigma_1 \gg \sigma_2$ ,  $\sigma_2 \sim Y$ . Подставляя эти соотношения в уравнение (8), имеем

$$(9) \quad \sigma_m \approx \sigma_2/2 \approx Y/\sqrt{3}.$$

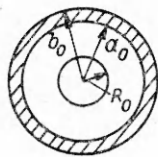
Формула (9) и предположение  $v = \text{const}$  при  $\varepsilon > \varepsilon_0$  ( $t_1 < t < t^*$ ) подтверждены численными расчетами на ЭВМ. Задача решалась в одномерном случае для геометрии, показанной на рис. 1. Оболочка описывалась упругопластической моделью Праудтля — Рейса, ПД — моделью идеального газа с  $\gamma = 3$ . Расчеты проводились по разностной схеме «крест» с использованием подвижной эйлеровой сетки. Более подробно методика расчета описана в [8, 9]. В качестве материала оболочки выбиралась ст. 20 с параметрами  $\rho = 7,8$  г/см<sup>3</sup>,  $E = 200$  ГПа,  $\mu = 84$  ГПа,  $Y = 0,43$  ГПа ( $E$  — модуль Юнга). Внутренний радиус оболочки  $a_0 = 2,1$  см, внешний —  $b_0 = 2,19$  см. Продукты детонации в момент  $t = 0$  находились в цилиндре радиусом  $R_0 = 0,5$  см с параметрами  $p_0 = p_H/2$ ,  $p_H = 25,2$  ГПа,  $\rho_0 = 1,65$  г/см<sup>3</sup> (ТГ50/50). Радиус цилиндра с ПД выбирался несколько меньше, чем в эксперименте ( $R_0 = 0,75$  см), при той же скорости оболочки. Это связано с тем, что в расчетах не учитывалось истечение ПД через торцы оболочки. На рис. 2 приведена рассчитанная на ЭВМ зависимость  $\sigma_m(\xi)$  (кривая 1) при  $\dot{\varepsilon} = 3,72 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>,  $\varepsilon = 0,56$  ( $\xi = (r - a)/(b - a)$ ,  $r$  — координата оболочки,  $a$ ,  $b$  — координаты внутренней и внешней поверхности оболочки). Из рис. 2 видно, что  $\sigma_m(r)$  слабо меняется по толщине оболочки и хорошо согласуется с найденным по формуле (9)  $\sigma_m = 0,248$  ГПа (линия 2). На рис. 3 показана рассчитанная зависимость среднemasсовой скорости оболочки от времени. Крестик отвечает деформации  $\varepsilon_0 = 0,3$ , вертикальная черта — моменту разрыва оболочки. Видно, что на интервале  $\varepsilon > \varepsilon_0$  скорость оболочки практически постоянна. Полагая в (2)  $\sigma_0 = 0$  и учитывая (9), найдем

$$(10) \quad t_p = \sqrt{3}\eta_1/Y.$$

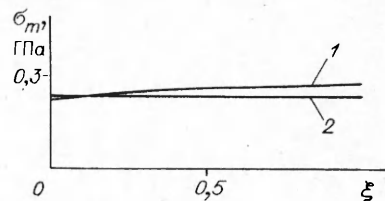
Подставляя  $t_p$  в уравнение (4), получим искомое уравнение для  $\varepsilon_p$ :

$$(11) \quad \varepsilon_p = \varepsilon_0 + \sqrt{3}\eta_1\dot{\varepsilon}/Y.$$

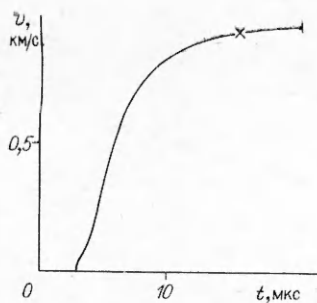
Предположим, что предел текучести есть функция скорости деформации  $Y = Y(\dot{\varepsilon})$  и воспользуемся экспериментальными результатами из [3] для определения функции  $Y(\dot{\varepsilon})$  и констант  $\varepsilon_0$ ,  $\eta_1$ . На рис. 4 приведены экспериментальные результаты [3] (обозначения из [3]) и аппроксими-



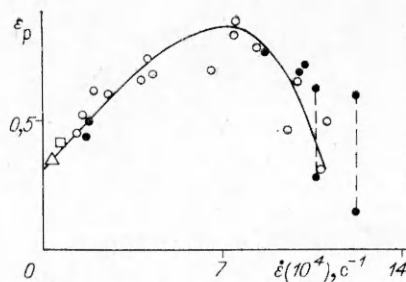
Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

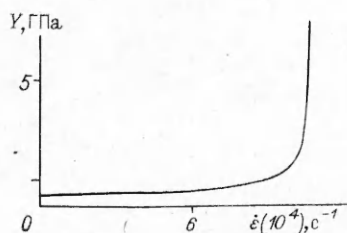
рующая их кривая  $\epsilon_p(\dot{\epsilon})$ , где  $\epsilon_p = (b_p - b_0)/b_0$ ,  $\dot{\epsilon} = v/b_0$ ,  $b_0, b_p$  — радиус оболочки при  $t = 0$  и в момент разрушения (в [1—4] исследовалась зависимость  $\epsilon_p(\lg \dot{\epsilon})$  ( $\dot{\epsilon} = v/b_p$ )). Полагая  $Y = Y_0 = 0,43$  ГПа при  $\dot{\epsilon} < 10^3 \text{ с}^{-1}$ , из рис. 4 и уравнения (11) найдем  $\epsilon_0 = 0,3$ ,  $\eta_1 = 3,1 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}$  и зависимость  $Y(\dot{\epsilon})$ , приведенную на рис. 5.

Характерной особенностью полученной кривой  $Y = Y(\dot{\epsilon})$  является слабая зависимость  $Y$  от  $\dot{\epsilon}$  при  $\dot{\epsilon} < 7 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$  и резкий рост  $Y$  для  $\dot{\epsilon} \sim 10^5 \text{ с}^{-1}$ . В [10] приведена зависимость предела текучести от скорости сдвига для алюминия, полученная в испытаниях на сжатие — сдвиг. Видно, что при  $\dot{\epsilon} \geq 10^5 \text{ с}^{-1}$  наблюдается сильный рост предела текучести алюминия, а кривая  $Y(\dot{\epsilon})$  качественно совпадает с найденной в данной работе (рис. 5). В интервале  $\dot{\epsilon} < 7 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$  зависимость  $Y(\dot{\epsilon})$  может быть описана в рамках вязкопластической модели

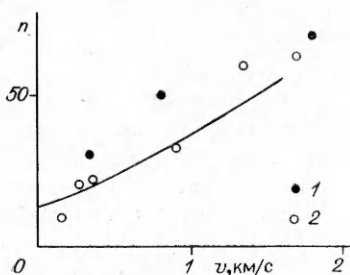
$$(12) \quad Y = Y_0 + \eta \dot{\epsilon}$$

( $\eta = 3,42 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}$  — вязкость металла). Отсюда следует, что  $\eta_1$  совпадает с вязкостью металла  $\eta$ .

В [11, 12] из экспериментов по сварке взрывом была найдена вязкость стали в интересующем нас диапазоне  $10^4 \text{ с}^{-1} < \dot{\epsilon} < 10^5 \text{ с}^{-1}$ , которая изменяется в пределах  $\eta = (6 \div 10) \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Эта величина в 2—3 раза превышает  $\eta$ , найденную в данной работе. Отличие может быть объяснено, если предположить, что вязкость зависит не только от скорости деформации, но и от величины деформации  $\eta = \eta(\dot{\epsilon}, \epsilon)$  [13]. Чем больше деформация, тем больше плотность дефектов, поэтому релаксация идет быстрее и значение вязкости будет меньше. Например, в [13] на рис. 1 показано, что увеличение деформации от 0,06 до 0,6 приводит к уменьшению вязкости в 3 раза для Al 1100. При определении вязкости металлов в [11, 12] используется суммарное смещение материала  $S = \int_0^{l_2} z(y) dy$ , возникающее при сварке взрывом ( $z$  — горизонтальное смещение,  $l_2$  —



Р и с. 5



Р и с. 6

толщина пластинки). Оценим величину средней деформации по формуле  $\epsilon \approx S/l_2^2$ . Подставляя в эту формулу численные значения из [12]:  $l_2 = 8$  мм,  $S < 0,54$  мм<sup>2</sup>, получим искомую оценку  $\epsilon < 10^{-3}$ . Поскольку до момента разрушения оболочка претерпевает существенно большую деформацию, чем свариваемые пластины, то и полученная в данной работе вязкость меньше, чем в [11, 12]. Отмеченная выше разница в вязкостях не связана с влиянием температуры, поскольку нагрев оболочки не превышает 100 К ( $\Delta T \approx \sigma \epsilon / (c_p \rho)$ ),  $\epsilon \approx 0,6$ ,  $\sigma \approx Y \approx 0,43$  ГПа,  $\rho = 7$  г/см<sup>3</sup>,  $c_p = 0,46$  Дж/(г·К), отсюда  $\Delta T \approx 80$  К).

В области  $\dot{\epsilon} \geq 7 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup> происходит резкое ухудшение пластических свойств металла (быстрый рост  $Y$ ), которое приводит к возникновению пика пластичности на кривой  $\epsilon_p(\dot{\epsilon})$  (см. рис. 4).

Рассмотрим вторую стадию разрушения — разделение материала на части. Приравняв упругую энергию растяжения энергии, идущей на образование свободных поверхностей  $\lambda$ , получим уравнение для определения величины осколка

$$(13) \quad Y^2 l / E = \lambda.$$

Подставляя в (13) уравнения (11), (12) и используя формулу  $n = 2\pi b_p / l$ , найдем уравнение для числа осколков

$$(14) \quad n = \frac{2\pi h_0 Y_0^2 v}{E \lambda} \left( 1 + \epsilon_0 + (1 + \epsilon_0 + \sqrt{3}) \frac{\eta v}{b_0 Y_0} \right) \left( 1 + \frac{\eta v}{b_0 Y_0} \right).$$

Уравнение (14) справедливо при скоростях  $v < 1,6$  км/с, так как при больших скоростях величина осколка  $l$  определяется толщиной оболочки [3]. Характерной особенностью формулы (14) является ярко выраженный масштабный эффект  $n(b_0)$ , отмеченный ранее в [3]. На рис. 6 приведена зависимость  $n(v)$  для фиксированного радиуса оболочки  $b_0$ . Кривая описывается уравнением (14) при  $\eta = 3,4 \cdot 10^3$  Па·с,  $Y_0 = 0,4$  ГПа,  $E = 200$  ГПа,  $b_0 = 2,1$  см,  $\epsilon_0 = 0,3$ ,  $\lambda = 1$  Дж/см<sup>2</sup>. Точки 1 отвечают рентгенографическим опытам, а 2 — опытам по торможению осколков в опилках [3]. Видно, что теоретическая кривая (14) достаточно хорошо описывает опыты по торможению осколков в опилках. Некоторое отличие рентгенографических опытов связано, по-видимому, с регистрацией в этих опытах осколков мелкой фракции.

Используя рис. 6, оценим характерное время второй стадии  $t_2 \approx l/c$ . Полагая  $v = 1$  км/с, из рис. 4 найдем  $\epsilon_p = 0,78$ , а из рис. 6 — число осколков  $n \approx 40$ . Размер осколка определяется по формуле  $l = 2\pi(1 + \epsilon_p)b_0/n$ , отсюда  $l \approx 0,58$  см,  $t_2 \approx 1,2$  мкс при  $c = 5$  км/с ( $c$  — скорость звука в стали). Время расширения оболочки до разрушения для данного случая  $t^* = \epsilon_p/\dot{\epsilon} \approx 16$  мкс. Величина  $t^*$  на порядок больше  $t_2$ , что доказывает справедливость приближений, сделанных при выводе формулы (4).

Следует отметить, что степенная зависимость  $Y(\dot{\epsilon})$ , приведенная на рис. 5, характерна для «мягких» металлов. Резкий рост  $Y$  при  $\dot{\epsilon} \sim 10^5$  с<sup>-1</sup> связан, в первую очередь, с ограничением скорости дислокации, которая не превосходит скорости звука. Для «твердых» металлов характерна линейная зависимость  $Y(\dot{\epsilon})$  с большим коэффициентом вязкости  $\eta$  [14]. Сильное упрочнение возникает за счет торможения дислокации на примесях, стенках границ зерен и других дефектах решетки. Предложенная в данной работе модель пика пластичности относится к «мягким» металлам, а модель [1] — к «твердым». Для «мягких» металлов требуется произвести большую пластическую деформацию, прежде чем накопятся значительные повреждения, поэтому пик пластичности связан с первой стадией. При переходе к «твердым» металлам повреждения накапливаются быстро (например, за счет механизма Стро [15] и др.) и пик пластичности

связан со второй стадией — разделением материала на части. Этот случай описывается в модели [1], которая приводит к большим значениям  $\eta$  и  $\lambda$ , чем данная модель.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А. Г. Особенности взрывной деформации и разрушения труб // Пробл. прочности. — 1976. — № 11.
2. Иванов А. Г., Минеев В. П. О масштабных эффектах при разрушении // ФГВ. — 1979. — № 5.
3. Иванов А. Г., Кочкин Л. П., Новиков В. Ф., Фоломеева Т. М. Высокоскоростное разрушение тонкостенных труб из мягкой стали // ПМТФ. — 1983. — № 1.
4. Иванов А. Г. Феноменология разрушения и откол // ФГВ. — 1985. — № 2.
5. Майерс М. А., Мурр Л. Е. Образование дефектов при деформации ударной волной // Ударные волны и явления высокоскоростной деформации металлов/Под ред. М. А. Майерса и Л. Е. Мурра: Пер. с англ. — М.: Металлургия, 1984.
6. Курран Д. Р., Симэн Л., Шоки Д. А. Микроструктура и динамика разрушения // Там же.
7. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др. Физика взрыва. — М.: Наука, 1975.
8. Киселев С. П., Фомин В. М. О разлете оболочки с учетом разрушения и истечения продуктов детонации между осколками // ПМТФ. — 1989. — № 4.
9. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967.
10. Клифтон Р. Дж. Динамическая пластичность // Успехи прикладной механики. — М.: Мир, 1986.
11. Годунов С. К., Дерibas А. А., Мали В. П. О влиянии вязкости материала на процесс образования струй при соударениях металлических пластин // ФГВ. — 1975. — № 1.
12. Сергеев-Альбов Н. П. Остаточные напряжения и вязкость при высокоскоростном деформировании металлов // ПМТФ. — 1983. — № 2.
13. Жукова Т. В., Макаров П. В., Платова Т. М. и др. Исследование вязких и релаксационных свойств металлов в ударных волнах методами математического моделирования // ФГВ. — 1987. — № 1.
14. Борисевич В. К., Сабелькин В. П., Солодянкин С. П. и др. Динамические характеристики некоторых металлов и сплавов // Импульсная обработка давлением. — Харьков: ХАИ, 1981. — Вып. 9.
15. Бернштейн М. Л., Займовский В. А. Структура и механические свойства металлов. — М.: Металлургия, 1970.

г. Новосибирск

Поступила 7/VII 1989 г.,  
в окончательном варианте — 17/X 1989 г.

УДК 539.384/385.001 : 539.216.1

*И. Л. Батаронов, А. М. Роцупкин*

### ТЕОРИЯ УПРУГОИЛАСТИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ НИТЕВИДНЫХ КРИСТАЛЛОВ

**1. Введение.** Пластическая деформация кристаллов сопровождается сложной эволюцией внутренних полей упругих напряжений, обусловленной самосогласованным движением конгломератов дефектов кристалла на различных структурных уровнях деформации [1]. Определенная роль в формировании указанных упругих полей принадлежит поверхности кристалла [2], которая, таким образом, оказывается включенной в число факторов, влияющих на движение дефектной структуры. В силу этого при микроскопическом характере некоторых линейных размеров кристалла определяющим в кинетике пластической деформации выступает тот структурный уровень деформации, размер которого сопоставим с размером кристалла. В этом отношении нитевидные кристаллы (НК) — уникальные модельные объекты для изучения в «чистом виде» особенностей развития пластической деформации в ансамблях дефектов разных ступеней иерархии структурных уровней. В экспериментальном отношении удобными методами исследования пластичности НК являются кручение и изгиб [3], причем образующаяся дислокационная структура хорошо выявляется прямыми методами [4]. Представляет интерес получение общих соотношений, связывающих макроскопическую реакцию НК (т. е. величину кручения) на присутствующие в нем дислокации с характеристиками дислокационной структуры, что выступает в качестве базы для теоретического анализа пластического поведения НК при кручении, а также, в общем случае, и при изгибе.