

2. Von Kármán Th. Über laminare und turbulente Reibung.— ZAMM, 1921, Bd 1, Ht. 4.
3. Messiter A. F., Linán A. The vertical plate in laminar free convection: effects of leading and trailing edges and discontinuous temperature.— ZAMP, 1976, vol. 27, N 5.
4. Smith F. T., Duck P. W. Separation of jets or thermal boundary layers from a wall.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1977, vol. 30, pt 2.
5. Smith F. T. On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer.— Proc. Roy. Soc., Ser. A., 1979, vol. 366, N 1724.
6. Жук В. И., Рыжов О. С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— ДАН СССР, 1980, т. 253, № 6.
7. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
8. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений.— Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1529.
9. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies.— In: Advances in Appl. Mech. Vol. 14. New York — San Francisco — London: Academic Press, 1974.
10. Schneider W. Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers.— J. Fluid Mech., 1974, vol. 63, pt 3.
11. Brown S. N., Daniels P. G. On the viscous flow about the trailing edge of a rapidly oscillating plate.— J. Fluid Mech., 1975, vol. 67, pt 4.
12. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
13. Ryzhov O. S., Zhuk V. I. Internal waves in the boundary layer with the self-induced pressure.— J. de mecanique, 1980, vol. 19, N 3.
14. Терентьев Е. Д. Расчет давления в линейной задаче о вибраторе в сверхзвуковом пограничном слое.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 6.
15. Dryden H. L. Recent advances in the mechanics of boundary layer flow.— In: Advances in Appl. Mech. Vol. 1. N. Y.: Academic Press, 1948.
16. Ross J. A., Barnes F. H. et al. The flat plate boundary layer. Pt 3. Comparison of theory with experiment.— J. Fluid Mech., 1970, vol. 43, pt 4.
17. Smith F. T. Nonlinear stability of boundary layers for disturbances of various sizes.— Proc. Roy. Soc., Ser. A., 1979, vol. 368, N 1735.

УДК 532.516 : 541.24 : 532.5

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. Попов

(Ленинград)

1. **Равновесная толщина пленки.** Если поместить некоторое количество легкой жидкости на неограниченную поверхность более тяжелой, причем жидкости не смешиваются, то конечное состояние системы определяется знаком величины γ :

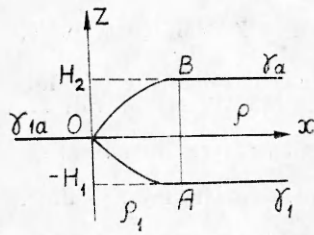
$$(1.1) \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_a - \gamma_{1a},$$

где γ_1 , γ_a и γ_{1a} — коэффициенты поверхностных натяжений границ легкая жидкость — тяжелая жидкость, легкая жидкость — атмосфера и тяжелая жидкость — атмосфера соответственно (фиг. 1). Если $\gamma < 0$ (величина $-\gamma$ называется коэффициентом растекания [1]), то образуется мономолекулярная пленка. При $\gamma > 0$ образуется пленка конечной толщины H_0 , определяемой формулой [2]

$$(1.2) \quad H_0^2 = \frac{2\gamma}{\rho g (1 - \rho/\rho_1)},$$

где ρ и ρ_1 — плотности верхней и нижней жидкостей; g — ускорение силы тяжести.

Полная сила, действующая на сечение пленки AB справа, равна сумме поверхностных натяжений горизонтальных границ верхней жидкости за вычетом гидростатического давления ее слоя высоты H . Сила, действующая



Ф и г. 1

щая на AB слева, равна поверхностному натяжению свободной границы нижней жидкости за вычетом давления ее слоя высотой H_1 . Приравнявая эти силы, имеем

$$(1.3) \quad \gamma_1 + \gamma_a - \rho g H^2 / 2 = \gamma_{1a} - \rho_1 g H_1^2 / 2.$$

С учетом закона Архимеда $H_1 = (\rho / \rho_1) H$, $H_1 + H_2 = H$ из (1.3) получаем (1.2). Рассматривая задачу о равновесной толщине пленки обычными методами гидростатики, изложенными, например, в [3], с учетом краевых углов в точке

O можно показать, что соотношение (1.3) является точным следствием уравнений гидростатики. Если не интересоваться формой пленки на расстояниях порядка H_0 от края, то можно считать, что действие поверхностных сил всех границ раздела сводится к действию на край пленки на единицу длины силы величиной γ . Это приближение, верное в статическом случае, будет справедливым и в некотором диапазоне течений под действием сил того же порядка, что и γ .

Интерес к этому кругу вопросов возрос в связи с появлением нового метода производства высококачественного листового стекла — флоат-процесса [4]. На одной из его стадий поток расплавленного стекла выливается в ванну с расплавленным оловом, причем края ленты стекла остаются свободными. За время, необходимое для того, чтобы поверхность стекла стала гладкой, его толщина достигает равновесного значения H_0 , равного 6—7 мм. В этом примере мы встречаемся с течением вязкой пленки по поверхности невязкой жидкости, поскольку вязкость олова пренебрежимо мала при высоких температурах по сравнению с вязкостью стекла и касательные напряжения на их общей границе отсутствуют. Все вязкие эффекты в такого рода течениях обусловлены внутренним трением из-за изменения формы самой пленки.

2. Вывод уравнений движения. Будем исходить из уравнения неразрывности и уравнений для горизонтальных компонент импульса для несжимаемой жидкости постоянной плотности:

$$(2.1) \quad \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0;$$

$$(2.2) \quad \rho (\partial u / \partial t + \partial u^2 / \partial x + \partial uv / \partial y + \partial uw / \partial z) = \\ = \partial \sigma_{xx} / \partial x + \partial \sigma_{xy} / \partial y + \partial \sigma_{xz} / \partial z;$$

$$(2.3) \quad \rho (\partial v / \partial t + \partial vw / \partial x + \partial v^2 / \partial y + \partial vw / \partial z) = \\ = \partial \sigma_{yx} / \partial x + \partial \sigma_{yy} / \partial y + \partial \sigma_{yz} / \partial z,$$

где u, v, w — компоненты скорости вдоль осей x, y, z ; $\sigma_{xx}, \sigma_{xy} \dots$ — компоненты тензора напряжений. Положения верхней и нижней поверхностей пленки $H_2(t, x, y)$ и $-H_1(t, x, y)$ будем считать медленно меняющимися функциями x и y , так что характерные интервалы их изменения велики по сравнению с толщиной $H = H_1 + H_2$, а также справедливы неравенства $(\partial H_i / \partial x)^2 \ll 1$, $(\partial H_i / \partial y)^2 \ll 1$, $i = 1, 2$. При интегрировании уравнений (2.1) — (2.3) по z воспользуемся формулой

$$(2.4) \quad \int_{-H_1}^{H_2} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x, y, z) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-H_1}^{H_2} f dz - f \Big|_{-H_1}^{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial t} - f \Big|_{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial t}$$

и аналогичными формулами для дифференцирования по x и y . Введем средние по толщине значения скоростей и напряжений

$$\langle u \rangle = \frac{1}{H} \int_{-H_1}^{H_2} u dz, \quad \langle \sigma_{xx} \rangle = \frac{1}{H} \int_{-H_1}^{H_2} \sigma_{xx} dz, \dots$$

Для значений w на поверхностях справедливы кинематические условия

$$(2.5) \quad w|_{H_2} = \left(\frac{\partial H_2}{\partial t} + u \frac{\partial H_2}{\partial x} + v \frac{\partial H_2}{\partial y} \right)_{H_2}, \quad w|_{-H_1} = - \left(\frac{\partial H_1}{\partial t} + u \frac{\partial H_1}{\partial x} + v \frac{\partial H_1}{\partial y} \right)_{-H_1}.$$

Интегрирование по z (2.1) с учетом (2.4), (2.5) дает уравнение неразрывности в форме

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H \langle u \rangle) + \frac{\partial}{\partial y} (H \langle v \rangle) = 0.$$

Компоненты скорости u и v можно представить в виде

$$u = \langle u \rangle + \delta u, \quad v = \langle v \rangle + \delta v, \quad \langle \delta u \rangle = \langle \delta v \rangle = 0.$$

Будем считать, что горизонтальные скорости мало меняются по толщине пленки, т. е. $|\delta u| \ll |\langle u \rangle|$, $|\delta v| \ll |\langle v \rangle|$. Тогда после интегрирования по z левую часть уравнения (2.2) можно записать в виде

$$\rho [\partial H \langle u \rangle / \partial t + \partial H \langle u \rangle^2 / \partial x + \partial H \langle u \rangle \langle v \rangle / \partial y + O_2],$$

где O_2 — сумма членов второго порядка малости. Интегрирование правой части (2.2) дает выражение

$$(2.6) \quad \frac{\partial H \langle \sigma_{xx} \rangle}{\partial x} + \frac{\partial H \langle \sigma_{xy} \rangle}{\partial y} + \left[\sigma_{xz} - \sigma_{xz} \frac{\partial H_2}{\partial x} - \sigma_{xy} \frac{\partial H_2}{\partial y} \right]_{H_2} - \left[\sigma_{xz} + \sigma_{xz} \frac{\partial H_1}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right]_{-H_1}.$$

Компоненты внешних нормалей к поверхностям $-H_1$ и H_2 можно приближенно записать в виде

$$\mathbf{n}_1 = (-\partial H_1 / \partial x, -\partial H_1 / \partial y, -1), \quad \mathbf{n}_2 = (-\partial H_2 / \partial x, -\partial H_2 / \partial y, 1).$$

Теперь видно, что в (2.6) в квадратных скобках стоят x -компоненты сил, действующих на поверхности пленки. Будем считать, что на верхней границе пленки силы отсутствуют, а на нижней границе

$$\left[\sigma_{xz} + \sigma_{xz} \frac{\partial H_1}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right]_{-H_1} = \left[\sigma_{xz}^1 + \sigma_{xz}^1 \frac{\partial H_1}{\partial x} + \sigma_{xy}^1 \frac{\partial H_1}{\partial y} \right]_{-H_1},$$

где σ^1 — тензор напряжений в нижней жидкости.

Равенство нулю z -компоненты силы на верхней границе с точностью до величин первого порядка малости запишется в виде

$$(2.7) \quad \sigma_{zz}|_{H_2} = 0.$$

Для ньютоновской жидкости

$$(2.8) \quad \sigma_{xx} = -p + 2\mu \partial u / \partial x, \quad \sigma_{xy} = \mu (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x), \\ \sigma_{zz} = -p + 2\mu \partial w / \partial z,$$

где p — давление; μ — коэффициент вязкости. С учетом (2.1) условие (2.7) дает

$$(2.9) \quad p|_{H_2} = -2\mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{H_2} = -2\mu \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} \right) - 2\mu \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right)_{H_2}.$$

Если принять, что δu и δv не только малые, но и медленно меняющиеся функции, т. е. дифференцирование по x и y повышает порядок малости последнего члена в (2.9), то с принятой нами точностью он может быть отброшен. Тогда

$$(2.10) \quad p|_{H_2} = -2\mu (\partial \langle u \rangle / \partial x + \partial \langle v \rangle / \partial y).$$

Отметим, что переход от (2.9) к (2.10), по существу, эквивалентен пред-

положению о линейной зависимости скорости w от z , так как из уравнения (2.11)

$$\partial w / \partial z = -(\partial \langle u \rangle / \partial x + \partial \langle v \rangle / \partial y)$$

следует равенство $w = A(t, x, y)z + B(t, x, y)$.

Будем считать, что давление в пленке меняется гидростатически: $\partial p / \partial z = -\rho g$.

Тогда с учетом (2.10) получим

$$p = \rho g(H_2 - z) - 2\mu(\partial \langle u \rangle / \partial x + \partial \langle v \rangle / \partial y).$$

На нижней границе, пользуясь (2.8), (2.11), имеем

$$(2.12) \quad \sigma_{zz} |_{-H_1} = -\rho g H_1.$$

Для тензора напряжений в нижней жидкости справедливо представление $\sigma_{ik}^1 = -p^1 \delta_{ik}$, δ_{ik} — символ Кронекера.

Можно с разной степенью точности учитывать свойства течения нижней жидкости, беря различные выражения для давления p^1 . Простейший способ, пригодный для малоинтенсивных течений, — это считать давление в ней гидростатическим. Тогда из условия $\sigma_{zz} |_{-H_1} = \sigma_{zz}^1 |_{-H_1}$, пользуясь (2.12), получим $H_1 = (\rho / \rho_1) H$, т. е. в нашем приближении условие гидростатического равновесия выполняется локально. Теперь можно написать

$$H \langle \sigma_{xx} \rangle = -\rho g \frac{H^2}{2} + 4\mu H \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + 2\mu H \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} + O_2,$$

$$H \langle \sigma_{xy} \rangle = \mu H \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} \right) + O_2.$$

Кроме того,

$$\left[\sigma_{xz}^1 + \sigma_{xx}^1 \frac{\partial H_1}{\partial x} + \sigma_{xy}^1 \frac{\partial H_1}{\partial y} \right]_{-H_1} = -\rho_1 g H_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} = -\frac{\rho^2}{2\rho_1} \frac{\partial H^2}{\partial x}.$$

Собирая вместе полученные выражения, переходя к субстанциональной записи инерционных членов, отбрасывая знаки усреднения и пользуясь тем, что уравнение для y -компоненты импульса получается из уравнения для x -компоненты заменой $x \rightleftharpoons y$, $u \rightleftharpoons v$, будем иметь следующую систему для функций H , u , v от переменных t , x , y :

$$(2.13) \quad \partial H / \partial t + \partial H u / \partial x + \partial H v / \partial y = 0;$$

$$(2.14) \quad \rho H \frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\rho(1 - \rho/\rho_1) g \frac{H^2}{2} + 4\mu H \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu H \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu H \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right];$$

$$(2.15) \quad \rho H \frac{dv}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\rho(1 - \rho/\rho_1) g \frac{H^2}{2} + 4\mu H \frac{\partial v}{\partial y} + 2\mu H \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu H \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right],$$

где $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$.

3. Общие формулировки. Запишем уравнения (2.14), (2.15) в виде

$$\rho H dv_i / dt = \partial S_{ik} / \partial x_k + F_i, \quad i, k = 1, 2,$$

под k подразумевается суммирование; S_{ik} — двумерный тензор напряжений; F_i — вектор внешних сил. Тензор S_{ik} можно представить в виде

$$S_{ik} = -P\delta_{ik} + S'_{ik} = -P\delta_{ik} + \lambda H D\delta_{ik} + 2\mu H e_{ik}.$$

Здесь P — двумерное давление:

$$(3.1) \quad P = \rho(1 - \rho/\rho_1)gH^2/2;$$

e_{ik} — тензор скоростей деформаций; D — дивергенция скорости. Величины λH и μH играют роль постоянных Ламэ. Вязкую часть тензора напряжений S'_{ik} можно записать, используя девиатор d_{ik} , в виде

$$(3.2) \quad S'_{ik} = d_{ik} + \mu' H D \delta_{ik}, \quad d_{ik} = 2\mu H \left(e_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} D \right).$$

Итак, течение пленки можно описывать как течение двумерной жидкости с уравнением состояния (3.1) и отличными от нуля «постоянными» Ламэ (которые из-за множителя H являются функциями x_i и t) или двумерным аналогом объемной вязкости $\mu' H$, причем $\lambda = 2\mu$, $\mu' = 3\mu$. Такой тензор напряжений нужно использовать, если необходимо учесть растяжение пленки*. В случае плоского (в трехмерном смысле) течения при $v_2 = 0$ имеем $S'_1 = 4\mu H \partial v_1 / \partial x$ **. При переходе к одномерному течению, усредняя уравнение (2.14) по y , получим $S'_1 = \mu' s \partial v_1 / \partial x$, где s — площадь поперечного сечения. Таким образом, величина $\mu' = 3\mu$ — фактически «продольная вязкость», введенная в [7].

Движение пленки по слою невязкой жидкости можно интерпретировать как скольжение по твердой поверхности, прогибающейся под тяжестью пленки на величину H_1 . При $\rho_1 = \infty$ получается скольжение пленки по горизонтальной плоскости, при этом $P = \rho g H^2 / 2$. Если теперь положить в уравнениях $\mu = \lambda = 0$, то получатся обычные уравнения «мелкой воды», так что данную модель можно рассматривать и как обобщение модели «мелкой воды».

В нашей модели учитывается только инерция самой пленки, поэтому ею можно пользоваться, когда инерционные эффекты в нижней жидкости мало влияют на течение пленки. Сюда попадают и частные виды быстрых течений пленок, например ускоренное движение пленки постоянной ширины в направлении, параллельном краю. Если пленка движется вместе с потоком жидкости, то такие течения тоже можно рассматривать в рамках описанной модели, вводя движущуюся систему координат и включая в F_i силы инерции.

Целесообразно дать формулировку полученных уравнений в произвольных координатах. Общее уравнение движения сплошной среды с учетом замены ρ , λ , μ на ρH , λH , μH имеет вид [8]

$$(3.3) \quad \rho H a^i = \nabla_j S^{ij} + F^i, \quad S^{ij} = -P g^{ij} + \lambda H D g^{ij} + 2\mu H e^{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Здесь вверху записаны индексы контравариантных компонент тензоров, внизу — ковариантных, g^{ij} — метрический тензор, a^i — ускорение, ∇_j — символ ковариантной производной, причем $e_{ij} = (\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) / 2$. Незначительно меняя выкладки, приведенные в [8], из (3.3) получим уравнение вида

$$(3.4) \quad \rho H a^i = -\nabla^j P + (\lambda + \mu) H \nabla^i D + \mu H \Delta v^i + D \nabla^i (\lambda H) + e^{ij} \nabla_j (2\mu H),$$

где $\Delta = \nabla^j \nabla_j$ — оператор Лапласа. Поднятие индекса осуществляется сверткой с метрическим тензором, например, $\nabla^i = g^{ij} \nabla_j$, $e^{ij} = g^{ik} g^{jl} e_{kl}$. В частности, в полярных координатах (r — радиус, φ — угол) уравнения (3.4), записанные для физических компонент векторов и тензоров, примут вид

$$(3.5) \quad \rho H \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) = F_r - \frac{\partial P}{\partial r} + (\lambda + \mu) H \frac{\partial D}{\partial r} + \mu H \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \right) + D \frac{\partial \lambda H}{\partial r} + 2 \frac{\partial \mu H}{\partial r} e_{rr} + \frac{2}{r} \frac{\partial \mu H}{\partial \varphi} e_{r\varphi},$$

* Течения вязких пленок с тензором напряжений вида (3.2) рассматривались в работе [5].

** Такого рода течение рассмотрено в работе [6].

$$\rho H \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) = F_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + (\lambda + \mu) \frac{H}{r} \frac{\partial D}{\partial \varphi} +$$

$$+ \mu H \left(\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) + \frac{D}{r} \frac{\partial \lambda H}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial \mu H}{\partial r} e_{r\varphi} + \frac{2}{r} \frac{\partial \mu H}{\partial \varphi} e_{\varphi\varphi},$$

где $D = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$;

$$e_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad e_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right); \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r};$$

$P = \rho(1 - \rho/\rho_1)gH^2/2$. Уравнение неразрывности примет вид

$$(3.6) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + v_r \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} + HD_r = 0.$$

4. Примеры. А. *Одномерное растекание пленки.* Пусть переменные H и u зависят только от времени и координаты x , а $v = 0$. Тогда из (2.13), (2.14) получим систему

$$(4.1) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

$$(4.2) \quad H \frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[- (1 - \rho/\rho_1) g \frac{H^2}{2} + 4\nu H \frac{\partial u}{\partial x} \right],$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости. Будем считать, что течение является ползущим и происходит под действием силы γ (1.1), приложенной к краю пленки. Отметим, что действующая на край сила гидростатического давления нижней жидкости включена в уравнение движения. Полагая правую часть (4.2) равной нулю и интегрируя полученное уравнение, будем иметь

$$(4.3) \quad (1 - \rho/\rho_1)gH^2/2 - 4\nu H \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma/\rho.$$

Введем вместо x лагранжеву координату a по формулам $x = x(t, a)$, $x(0, a) = a$. Тогда, обозначая $x_a = \partial x / \partial a$, получим $\frac{\partial u}{\partial x} = (\partial x_a / \partial t) / x_a$. Уравнение (4.1) дает соотношение $H x_a = H(0, a)$, откуда $x_a = H(0, a) / H$ и, следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x} = -(\partial H / \partial t) / H$. Подставляя это выражение в (4.3), получим для $H(t, a)$ уравнение

$$(4.4) \quad (1 - \rho/\rho_1) g \frac{H^2}{2} + 4\nu \frac{\partial H}{\partial t} = \gamma/\rho.$$

Итак, переходом к лагранжевой координате мы исключили дифференцирование по пространственной переменной и получили обыкновенное дифференциальное уравнение. Вводя безразмерную высоту h и константу κ по формулам

$$(4.5) \quad h = H/H_0, \quad \kappa = \rho g(1 - \rho/\rho_1)H_0/8\nu,$$

где H_0 дается выражением (1.2), приведем (4.4) к виду

$$dh/dt + \kappa(h^2 - 1) = 0.$$

Уравнение легко интегрируется:

$$(4.6) \quad h(t, a) = 1 + \frac{2}{[1 + 2/(h(0, a) - 1)] e^{2\kappa t} - 1}.$$

Эта формула справедлива и при $h(0, a) < 1$, когда пленка растянута до толщины, меньшей H_0 . Положение элемента с координатой a дается выражением

$$x(t, a) = \int_0^a x_a da = \int_0^a \frac{h(0, a)}{h(t, a)} da.$$

Для течения расплавленного стекла по расплавленному олову при $\rho = 2460$ кг/м³, $\rho_1 = 6450$ кг/м³, $\gamma_a = 0,267$ Дж/м², $\gamma_{1a} = 0,497$ Дж/м²,

$\gamma_1 = 0,392 \text{ Дж/м}^2$, $\mu = 10^3 \text{ кг/м}\cdot\text{с}$ при температуре 1000°C получим характерное время растекания $1/2\kappa = 1 \text{ мин}$, что по порядку величины соответствует опытными данным [4].

Б. Пленка толщины KH_0 , вытекающая из начала координат в направлении оси x со скоростью U . Эта задача решается на основе результатов, полученных в предыдущем примере. Для элемента пленки, вытекающего в момент t_0 , толщина в момент t дается видоизмененной формулой (4.6):

$$(4.7) \quad h(t, t_0) = 1 + 2/\{\exp[2\kappa(t - t_0)](K + 1)/(K - 1) - 1\}.$$

За время $t - t_0$ элемент растянется в $K/h(t, t_0)$ раз. Его положение с учетом длин всех элементов, поступивших в интервале времени $t_0 \leq \tau \leq t$, определяется выражением

$$(4.8) \quad x(t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{KU d\tau}{h(t, \tau)} = KU \left[(t - t_0) - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{2K}{K+1} + \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{K-1}{K+1} e^{-2\kappa(t-t_0)} \right) \right].$$

По прошествии времени, в несколько раз большего $1/2\kappa$, устанавливается стационарный режим течения, при котором пленку можно разделить на два участка. На первом из них толщина меняется от K до 1, на втором — пленка единичной толщины течет со скоростью KU . В частности, положение ее края W дается формулой

$$W(t) = x(t, 0) = KU \left(t - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{2K}{K+1} \right).$$

Второй член в скобках дает запаздывание края по сравнению с движением края пленки толщины H_0 , вытекающей со скоростью KU . Профиль начального участка $h(x)$, который можно определить из (4.7), (4.8), для случаев $K = 2$ и 3 показан на фиг. 2 (кривые 1 и 2 соответственно).

В. Радиальные течения пленок с учетом линейного натяжения на краю. Помимо силы γ , на край пленки на единицу длины действует еще сила натяжения линии раздела трех сред величиной $\gamma_{\text{л}}/R$, где R — радиус кривизны. Ограничимся случаями ползущих радиальных течений ($v_r = 0$, $v_r = v$) пленок однородной толщины $H = H(t)$. Тогда уравнения (3.5), (3.6) примут вид

$$(4.6a) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0;$$

$$(4.7a) \quad \partial H / \partial t + H(\partial v / \partial r + v/r) = 0.$$

Из (4.6a) получаем $v = A(t)r + B(t)/r$. Для пленки в форме круга радиуса R — «линзы» — из условия конечности скорости при $r = 0$ получим $v = A(t)r$. Радиальная компонента тензора напряжений, которая понадобится для формулировки краевых условий, имеет вид

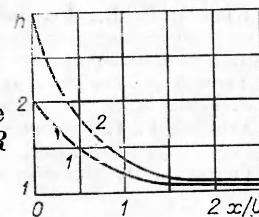
$$S_{rr} = -P + \lambda H(\partial v / \partial r + v/r) + 2\mu H \partial v / \partial r.$$

С учетом соотношения $A = -(dH/dt)/2H$, вытекающего из (4.7a), условие равенства сил на краю дает уравнение

$$(4.8a) \quad 3\mu \frac{dH}{dt} + \rho(1 - \rho/\rho_1) g \frac{H^2}{2} = \gamma + \gamma_{\text{л}}/R.$$

Полагая здесь $dH/dt = 0$, получаем новое значение равновесной толщины $H_* > H_0$, зависящее от R [2]:

$$H_*^2 = \frac{2(\gamma + \gamma_{\text{л}}/R)}{\rho g(1 - \rho/\rho_1)}.$$



Ф и г. 2

Условие сохранения объема пленки дает соотношение

$$(4.9) \quad R^2(t)H(t) = R^2(0)H(0).$$

Для безразмерной высоты $h(t)$ из (4.8а), (4.9) получаем уравнение

$$(4.10) \quad dh/dt + \kappa_1(h^2 - 1) = \varepsilon\sqrt{h},$$

где $\kappa_1 = 4\kappa/3$; $\varepsilon = \gamma_{\text{л}}/[3\mu H_0 R(0)\sqrt{h(0)}]$. Для достаточно больших $R(0)$ величина ε мала. При $\varepsilon = 0$, когда пренебрегаем линейным натяжением, для $h(t)$ получим формулу (4.6) с заменой κ на κ_1 . При $\varepsilon \neq 0$ имеем

$$t = \int_h^{h(0)} \frac{dh}{\kappa_1(h^2 - 1) - \varepsilon\sqrt{h}}.$$

Зная толщину пленки, положение края найдем из (4.9).

Другой случай — это бесконечная пленка с дырой радиуса R . Здесь $v = B(t)/R$, и из (4.7а) следует $H = \text{const}$. Условия на краю дают

$$(4.11) \quad \rho(1 - \rho/\rho_1)gH^2/2 + 2\mu HB/R^2 = \gamma - \gamma_{\text{л}}/R.$$

Учитывая, что $dR/dt = B/R$, из (4.11) получим следующее уравнение для движения края:

$$(4.12) \quad dR/dt + \alpha R/2\mu H = -\gamma_{\text{л}}/2\mu H,$$

где $\alpha = \rho g(1 - \rho/\rho_1)H^2/2 - \gamma$. Если $\alpha > 0$, т. е. $H > H_0$, то равновесие невозможно и дыра затягивается. Динамика процесса дается решением уравнения (4.12):

$$(4.13) \quad R(t) = (R(0) + \gamma_{\text{л}}/\alpha) \exp(-\alpha t/2\mu H) - \gamma_{\text{л}}/\alpha.$$

При $\alpha = 0$, $H = H_0$ дыра также затягивается:

$$R(t) = R(0) - \gamma_{\text{л}}t/2\mu H_0.$$

В случае $\alpha < 0$, $H < H_0$ возможно состояние равновесия, при котором толщина H_* и радиус R_* связаны соотношением

$$H_*^2 = \frac{2(\gamma - \gamma_{\text{л}}/R_*)}{\rho g(1 - \rho/\rho_1)}.$$

Если $R(0)$ и $H(0)$ не удовлетворяют этому условию, то из (4.13) видно, что $\delta R = R - R_*$ будет возрастать со временем, т. е. равновесие будет неустойчивым. В частности, при $\delta R(0) > 0$ дыра будет расширяться до бесконечности.

Поступила 15 I 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамсон А. Физическая химия поверхностей. М.: Мир, 1979.
2. Langmuir I. Oil lenses on water and the nature of monomolecular expanded films.— J. Chem. Phys., 1933, vol. 1, N 11.
3. Лавдау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
4. Pilkington L. A. The float glass process.— Proc. Roy. Soc., ser. A., 1969, vol. 314, N 1516.
5. Кротов В. В., Русанов А. И. Уравнения двумерной гидродинамики и уравнения состояния неоднородных жидких пленок растворов ПАВ.— В кн.: Поверхностные явления в жидкостях. Л.: изд. ЛГУ, 1975.
6. Yeow Y. L. On the stability of extending films: a model for the film casting process.— J. Fluid Mech., 1974, vol. 66, pt 3.
7. Trouton F. T. On the coefficient of viscous traction and its relation to that of viscosity.— Proc. Roy. Soc. Lond., ser. A, 1906, vol. 77, N 519.
8. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.