ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, СОВЕРШАЮЩИХ ФИНИТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

А. Н. Дюкалов (*Москва*)

В работе [1] исследовано кинетическое уравнение системы заряженных частиц в случае редких столкновений; показано, что разрыв в функции распределения, который имеет место, если пренебречь столкновениями, размывается на конечную область, при учете редких столкновений; получены выражения для потока частиц через поверхность разрыва [1]. Ниже приводится построение непрерывного решения, а также устанавливаются граничные условия для функции распределения финитных частиц.

1. В работе [1] указаны граничные условия для функции распределения пробных частиц

$$F \to f_1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to \infty, \qquad F \to f_2 \quad \text{при}\ \varepsilon \to -\infty$$

Покажем, что эти условия получаются автоматически при построении решения равномерного при $\mu \to 0$ во всей области определения функции распределения.

Построим предварительно разрывное решение. Для полевых частиц справедливо уравнение Власова, поэтому

$$F = \Phi_1 (E, v, w) \quad \text{при}\ E > -U_m', \qquad F = \Phi_2 (E, v, w) \quad \text{при}\ E < -U_m' \tag{1.1}$$

Функции Φ_1 и Φ_2 определяются заданием функции распределения на поверхности эммитера или из решения некоторого уравнения.

Равномерное решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} F &= \Phi_1 (E, v, w) + H_1 \left(\frac{E + U_m'}{\sqrt{\mu}}; v, w, x \right) \quad \text{при}\ E > -U_m' \\ F &= \Phi_2 (E, v, w) + H_2 \left(\frac{E + U_m'}{\sqrt{\mu}}; v, w, x \right) \quad \text{при}\ E < -U_m' \end{aligned} \tag{1.2}$$

Устремляя в равенствах (1.2) μ к нулю и учитывая (1.1), получим

$$H_1 (\infty, v, w, x) = 0, \qquad H_2 (-\infty, v, w, x) = 0 \tag{1.3}$$

Производя далее в уравнениях (2.2) замену переменных $E = -U_m' + \varepsilon \sqrt{\mu}$ и устремляя μ к нулю, получим

$$\begin{aligned} F (\varepsilon) &= \Phi_1 (-U_m'; v, w) + H_1 (\varepsilon, v, w, x) \quad \text{при}\ \varepsilon > 0 \\ F (\varepsilon) &= \Phi_2 (-U_m'; v, w) + H_2 (\varepsilon, v, w, x) \quad \text{при}\ \varepsilon < 0 \end{aligned}$$

Отсюда при $\varepsilon \to \infty$ и $\varepsilon \to -\infty$ с учетом (1.3) получаем (1.4)

$$F (\varepsilon) = \Phi_1 (-U_m' v, w) \quad \text{при}\ \varepsilon \to \infty, \qquad F (\varepsilon) = \Phi_2 (-U_m', v, w) \quad \text{при}\ \varepsilon \to -\infty$$

При этом равномерное решение запишется в виде (1.5)

$$F = \Phi_1 (E, v, w) - \Phi_1 (-U_m', v, w) + F' (\varepsilon, v, w, x) \quad \text{при}\ E > -U_m' \ (\varepsilon > 0)$$

$$F = \Phi_2 (E, v, w) - \Phi_2 (-U_m', v, w) + F' (\varepsilon, v, w, x) \quad \text{при}\ E < -U_m' \ (\varepsilon < 0)$$

Здесь F' —решение уравнений (12) работы [1] с граничными условиями (1.4).

Если составить выражение для потока частиц в направлении оси x (см. уравнение (14) [1]), а затем подставить в него равномерное решение, определяемое формулами (1.5), то, используя уравнение (12) работы [1], получим выражение для потока частиц через поверхность разрыва (см. уравнение (15) [1]).

2. Уравнение (15) работы [1] позволяет установить граничные условия для функции распределения финитных частиц. Предположим, что распределение потенциала имеет вид, приведенный на фиг. 1 работы [1]. Обозначим точки, в которых $-U_m'$ достигает максимального значения, через x_m' и x_m''. Между точками x_m' и x_m'' имеется потенциальная яма для электронов. Функции распределения электронов, находящихся в яме, удовлетворяют уравнению типа уравнения, полученного Г. И. Будкером

[1] Отметим, что в работе [1] имеется ряд опечаток: в уравнении (3) перед третьим членом и во вторых уравнениях систем (8), (10), (12), (13) перед вторым членом должен стоять знак равно (=) вместо знака плюс (+); в правой части второго из уравнений (12) и (13) «равно нулю» следует убрать. Перед вторым членом уравнения (11) и перед правой частью уравнения (15) должен стоять знак минус (—). В уравнениях (8), (16), (18), (19) знак минус (—) перед правой частью следует заменить на плюс (+).

Равенство в круглых скобках на 19 строке стр. 82 следует читать ($U / x^\circ = e^2 n x^\circ$) вместо ($U / x^\circ - e^2 n / x^\circ$), на стр. 81 во втором абзаце снизу вместо «кривая α — α» должно быть «кривая β — β» и наоборот.

и С. Т. Беляевым [2]. Для решения этого уравнения надо задать граничные условия для функции распределения финитных частиц на границе финитных движений ($E = - U_m'$). Так как $E = {}^1/_2 u^2 - U_m'$, то следует иметь в виду, что плоскость Ex на фиг. 1 работы [1] имеется в двух экземплярах, соответствующих $u > 0$ и $u < 0$. Рассмотрим сначала тот экземпляр плоскости Ex, который соответствует $u > 0$.

Введем вместо F и g_{ik}° (см. [1]) новые функции χ и G_{ik} посредством

$$F = \frac{\Phi_1^{\circ} + \Phi_2^{\circ}}{2} + \chi\, \frac{\Phi_1^{\circ} - \Phi_2^{\circ}}{2}, \qquad g_{ik}^{\circ} = \frac{\Phi_1^{\circ} - \Phi_2^{\circ}}{2} G_{ik} \tag{2.1}$$

$$(\Phi_1^{\circ} = \Phi_1(-U_m', v, w), \qquad \Phi_2^{\circ} = \Phi_2(-U_m', v, w))$$

Подставим (2.1) в уравнения (12) работы [1]. Тогда для определения χ и G имеем:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{e^2 n}{m} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int \frac{d}{dx} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} G(XX')\, dX'$$

$$(D_1^{\circ} + D_2^{*})\, G_{12} = \frac{e^2}{m} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \sqrt{2(U_1' - U_m')}\, F_2 \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon} +$$

$$+ \frac{e^2 n}{m} \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon} \sqrt{2(U_1' - U_m')} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|} g_{2j} dX_j + m_2 \int \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j|} G_{1j} dX_j \tag{2.2}$$

с граничными условиями $\chi(\infty) = 1, \quad \chi(-\infty) = -1$.

Введем вместо x новую переменную $\zeta = x - x_m'$. Обозначая через F^* функцию распределения финитных частиц при $E = - U_m'$, а через f_1 — функцию распределения инфинитных частиц с $u > 0$ при $E = - U_m'$, для потока частиц через границу финитных движений получим

$$J_1 = - \frac{e^2 n}{m} \frac{f_1 - F^*}{2} \int_0^{\Delta x} \left[\int \frac{d}{d\zeta'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} G'(XX')\, dX' \right]_{\varepsilon = 0} d\zeta', \qquad \Delta x = x_m'' - x_m' \tag{2.3}$$

где через G_{ik}' обозначено $G_{ik}(\zeta', \ldots)$.

Аналогично, рассматривая частицы с $u < 0$, получим выражения для потока J_2 частиц границу финитных движений. Полный поток через поверхность $E = - U_m'$ равен $J = J_1 + J_2$, или (2.4)

$$J = (F^* - f_1) A + (F^* - f_2) B,$$

$$A = \frac{e^2 n}{2m} \int_0^{\Delta x} \left[\int \frac{d}{d\zeta'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} G'(X, X')\, dX' \right]_{\varepsilon = 0} d\zeta'$$

$$B = \frac{e^2 n}{2m} \int_0^{\Delta x} \left[\int \frac{d}{d\zeta''} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} G''(X, X')\, dX' \right]_{\varepsilon = 0} d\zeta''$$

Здесь f_2 — функция распределения инфинитных частиц с $u < 0$,

$$G_{ik}'' = G_{ik}(\zeta'', \ldots), \qquad \zeta'' = x_m'' - x$$

Уравнения (2.4) будут искомыми граничными условиями для функции распределения финитных частиц. Рассмотрим два частных случая:

а) Если потенциал $U(x)$ симметричен относительно точки ${}^1/_2 (x_m' - x_m'')$ по крайней мере между точками x_m' и x_m'', то $G_{ik}' = G_{ik}''$, а следовательно, $A = B$, но тогда

$$J = (2F^* - f_1 - f_2) A \tag{2.5}$$

б) Если $f_1 = f_2 = f$, то для полного потока получим

$$J = (F^* - f)(A + B) \tag{2.6}$$

В тех случаях, когда в потенциальной яме отсутствуют стоки и источники, поток частиц в яму должен быть равен нулю. В этом случае из уравнения (2.6) следует: $F^* = f$, т. е. сопряжение функции распределения на границе финитных движений присходит непрерывным образом.

Поступила 21 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюкалов А. Н. Исследование кинетического уравнения системы заряженных частиц в случае редких столкновений. ПМТФ, 1963, № 2.

2. Будкер Г. Н., Беляев С. Т. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Изд. АН СССР, 1958.