

Номер материала	$\mu \cdot 10^{-10}$	$\lambda \cdot 10^{-10}$	$\rho \cdot 10^{-3}$	Номер материала	$\mu \cdot 10^{-10}$	$\lambda \cdot 10^{-10}$	$\rho \cdot 10^{-3}$
1	0,145	1,15	1,20	4	2,50	16,00	2,70
2	2,50	12,22	2,30	5	2,66	14,80	2,50
3	3,90	16,6	2,65	6	2,73	12,30	2,21

и второй толщины $7,6 \cdot 10^{-2}$ м из четвертого. Эффективность оптимального экрана оценивается величиной $\theta = F^{\text{opt}}/F_0$, где F^{opt} — суммарный поток вектора мощности в полупространство $z > l$ в направлении оси z при наличии оптимального экрана, F_0 — при отсутствии экрана. Для вычисленного примера $\theta = 0,268$. Если в приведенном примере сосредоточенная сила действует с частотой $\omega = 2\pi \cdot 5000$ Гц, то оптимальный экран состоит из четырех слоев: первый $1,6 \cdot 10^{-2}$ м из первого материала, второй $2,5 \cdot 10^{-2}$ м из четвертого, третий $4,4 \cdot 10^{-2}$ м из третьего, четвертый $1,5 \cdot 10^{-2}$ м из четвертого материала. Эффективность этого экрана равна $\theta = 0,099$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабе Г. Д., Гусев Е. Л. Численный метод оптимизации интерференционных фильтров // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы VIII науч. конф. — Новосибирск: Наука, 1984.
2. Бабе Г. Д., Гусев Е. Л. Математические методы оптимизации интерференционных фильтров. — Новосибирск: Наука, 1987.
3. Адамова К. С., Каниболотский М. А., Яковлева Л. П. Минимизация толщины звукозащитного слоя // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1987. — № 18, вып. 5.
4. Адамова К. С., Каниболотский М. А., Яковлева Л. П. Оптимизация структуры звукозащитной панели при наклонном падении плоской волны // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1988. — № 19, вып. 1.
5. Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. — Новосибирск: Наука, 1989.
6. Алексин В. В. Оптимизация слоистых тел при ограничении на основную частоту собственных колебаний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Спб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1984. — Вып. 66.
7. Алексин В. В., Аннин Б. Д., Колпаков А. Г. Синтез слоистых материалов и конструкций. — Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1988.
8. Алексин В. В., Аннин Б. Д. Оптимизация термоупругих слоистых тел // ПМТФ. — 1989. — № 2.
9. Бабе Г. Д., Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С. Оптимизация многослойных конструкций, подверженных периодическим температурным воздействиям // ДАН СССР. — 1983. — Т. 269, № 2.
10. Адамова К. С., Каниболотский М. А., Яковлева Л. П. Минимизация массы цилиндрически-слоистой теплозащитной оболочки // ИФЖ. — 1987. — Т. 53, № 4.
11. Аккуратов Г. В., Дмитриев В. И. Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // ЖВММФ. — 1984. — Т. 24, № 2.
12. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. — М.: Наука, 1989.
13. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
14. Срочко В. А., Хамидуллин Р. Г. Об оптимальном способе варьирования управления в методах фазовой линеаризации // Вопросы оптимального управления и исследования операций. — Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 1988.

г. Якутск

Поступила 26/IV 1990 г.

УДК 539.374

О. А. Волоховская, В. В. Подалков

О ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Известно, что особенности упругопластического поведения металлов определяют их поликристаллической структурой. Поэтому вывод уравнения деформирования поликристалла должен основываться на рассмотрении происходящих в его зернах процессов. Экспериментально установлено, что при умеренных температурах пласти-

ческая деформация осуществляется преимущественно с помощью механизма трансляционного кристаллографического скольжения. Скольжение анизотропно и приводит к упрочнению монокристалла, выражающемуся в возрастании предельного напряжения сдвига как в активных (деформационное упрочнение), так и в пассивных (скрытое упрочнение) системах. Этот факт должен учитываться выбором соответствующего закона упрочнения. Упругая и пластическая анизотропия кристаллитов и межзеренные взаимодействия в течение всей истории деформирования приводят к неоднородности полей локальных напряжений и деформаций в материале. Поэтому определение уравнения связи между макроскопическими напряжениями и деформациями должно осуществляться на основе осреднения зависимостей между соответствующими локальными полями по всему объему образца. Существует достаточное число непротиворечивых теорий, в которых при выводе определяющего уравнения, как правило, делается акцент на детальном рассмотрении одного из отмеченных выше аспектов пластического деформирования поликристаллов [1—5].

В данной работе предложена относительно простая схема получения уравнения, описывающего упругопластическое поведение материала при произвольной программе нагружения. В отличие от общепринятых теорий сделана попытка сочетания экспериментально обоснованного закона локального упрочнения с концепцией множественности скольжения и достаточно простой процедурой осреднения по пространству ориентаций зерен агрегата. Для одноосного растяжения подобная схема предложена в [5].

1. Пластические деформации в зернах поликристалла. Рассмотрим одно из зерен поликристалла, находящееся в состоянии пластического течения. Пусть оно имеет n действующих систем скольжения. Тогда внутри зерна должны быть выполнены соотношения [2]

$$(1.1) \quad t_{ij}^{\alpha} s_{ij} = \tau^{\alpha}, \quad \varepsilon_{ij} = 2t_{ij}^{\alpha} \lambda_{\alpha}.$$

Здесь s_{ij} , ε_{ij} — девиаторы локальных напряжений и пластических деформаций, заданные в лабораторной системе координат, связанной с образцом; τ^{α} , λ_{α} — действующие в системе α касательное напряжение и пластический сдвиг. Тензор коэффициентов Шмидта t_{ij}^{α} определяется выражением

$$(1.2) \quad t_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{2} [l_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} + l_j^{(\alpha)} n_i^{(\alpha)}]$$

($l^{(\alpha)}$, $n^{(\alpha)}$ — единичные векторы направления скольжения и нормали к плоскости скольжения системы α). Суммирование по индексам в скобках не проводится.

Закон упрочнения монокристалла может быть принят в виде

$$\tau^{\alpha} = \tau_0 + \int H_{\alpha\beta} d\lambda_{\beta},$$

где $H_{\alpha\beta}$ — коэффициенты матрицы упрочнения, учитывающие активное и скрытое упрочнение в системах скольжения и зависящие от истории деформирования материала; τ_0 — разрешающее касательное напряжение первоначального сдвига. Экспериментально обнаружена зависимость $H_{\alpha\beta}$ и τ_0 от упругих свойств материала и его микроструктуры [6].

В [7, 8] показано, что величина τ_0 может быть вычислена с помощью эмпирического уравнения Холла — Петча для макроскопического предела упругости поликристалла. Она определяется типом кристаллической решетки и средним размером зерен материала, но мало чувствительна к дисперсии распределения кристаллитов по размерам. Параметры $H_{\alpha\beta}$ характеризуют упрочнение монокристалла в упруго-пластической среде и должны быть найдены из экспериментов с поликристаллическими образцами.

Используем закон изотропного упрочнения [1], в соответствии с которым

$$(1.3) \quad \tau^{\alpha} = \tau_0 + \int H \sum_{\beta=1}^n d\lambda_{\beta}.$$

Отсюда следует, что напряжение течения во всех активных системах одинаково. Предположим, что при множественном скольжении в кристалле с достаточной степенью точности выполнено допущение [5]

$$(1.4) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda,$$

которое позволяет на каждом этапе истории деформирования ввести понятие эффективной системы скольжения пластического зерна с интегральным сдвигом $\Lambda = n\lambda$ и тензором коэффициентов Шмидта [5]:

$$(1.5) \quad t_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n t_{ij}^{\alpha}.$$

В (1.5) t_{ij} зависит от типа и числа действующих систем скольжения кристалла и его ориентации относительно осей нагружения.

С учетом (1.3)—(1.5) из (1.1), переходя от конечных величин к их приращениям, получим

$$(1.6) \quad t_{ij} \dot{s}_{ij} = H \dot{\Lambda}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = 2t_{ij} \dot{\Lambda}.$$

Здесь и далее принято $\dot{a} = da$.

Рассмотрим материалы, обладающие регулярным упрочнением [9] в области активизации систем скольжения в их зернах. Диаграммы деформирования таких материалов в этой области характеризуются монотонно убывающим модулем упрочнения. К ним относятся многие металлы и сплавы.

Введем модуль локального упрочнения H соотношением

$$(1.7) \quad H = 2ht_{kl}t_{kl}$$

($h = \text{const}$ и зависит от типа материала).

Параметр h в (1.7) представляет собой дискретную функцию числа активных систем скольжения монокристалла, убывающую с ростом n . Его значение для каждого n зависит от типа макроскопического напряженно-деформированного состояния среды и ориентации зерна по отношению к осям нагружения. Представление H в виде (1.7) моделирует особенности регулярного упрочнения среды на уровне микроструктуры. Например, для ГЦК-кристалла, имеющего 24 системы с четырьмя плоскостями скольжения $\{111\}$ и шестью направляющими скольжения $[110]$, величина модуля упрочнения изменяется в пределах $H = h(1,0 \div 0,534)$. При этом левая граница интервала соответствует точной верхней грани H для $n = 1$, а правая — его точной нижней грани для $n = 5$.

2. Связь между локальными и макроскопическими напряжениями и деформациями.

В пластически деформированном поликристалле можно выделить три структурные фазы, образованные зернами на различной стадии пластического деформирования. Первую из них ($q = 1$) образуют кристаллы, находящиеся в состоянии полной пластичности. Для них число активных систем скольжения равно максимально возможному числу независимых систем ($n = N \leq 5$). Вторую фазу ($q = 2$) составляют кристаллиты в состоянии неполной пластичности ($n < N$) и третью ($q = 3$) — упругие зерна ($n = 0$). Пространственная структура такого поликристалла может быть описана набором индикаторных случайных функций координат $\kappa_q(\mathbf{r})$ ($q = 1, 2, 3$), каждая из которых равна единице на множестве точек q -й фазы и нулю вне этого множества. Пусть v_1, v_2, v_3 — объемные концентрации соответствующих кристаллитов в материале, зависящие от его макроскопического напряженно-деформированного состояния.

Для определения связи между локальным и макроскопическим напряженно-деформированным состояниями среды могут быть использованы различные модели межзеренного взаимодействия [1—5, 7]. Следуя требованию наибольшей простоты итогового реологического уравнения, воспользуемся результатами [2]. Имеем

$$(2.1) \quad \dot{s}_{ij}^{(q)} = \dot{\eta}_{ij} - b \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (q = 1, 2, \text{ пластические зерна}),$$

$$\dot{s}_{ij}^{(3)} = \dot{\eta}_{ij} \quad (q = 3, \text{ упругие зерна}).$$

Объединяя соотношения (2.1) с помощью индикаторных функций, найдем

$$(2.2) \quad \dot{s}_{ij} = \dot{\eta}_{ij} - b \dot{\varepsilon}_{ij} \kappa(\mathbf{r}) \quad (\kappa(\mathbf{r}) = \kappa_1(\mathbf{r}) + \kappa_2(\mathbf{r})).$$

Здесь

$$(2.3) \quad \dot{\eta}_{ij} = \beta \langle \dot{s}_{ij} \rangle + b \langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle, \quad b = 2\mu(1 - \beta), \quad \beta = 2(4 - 5\nu)/15(1 - \nu)$$

(μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — девиатор тензора полных локальных деформаций, $\langle a \rangle$ — математическое ожидание a).

В дальнейшем в предположении о статистической однородности и эргодичности случайных полей $\varepsilon_{ij}, e_{ij}, s_{ij}, t_{ij}, \kappa_q$ их математические ожидания заменяются средними по объемам фаз V_q и полному объему V величинами, совпадающими со средними по множеству ориентаций кристаллитов в фазе и среде, т. е.

$$\langle a \rangle = \frac{1}{V} \int_V a(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \langle a \rangle_q = \frac{1}{V_q} \int_{V_q} a(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

$$(q = 1, 2, 3, V = V_1 + V_2 + V_3).$$

При этом, очевидно, справедливо равенство $v_q = \langle \kappa_q(\mathbf{r}) \rangle = V_q V^{-1}$.

Присоединяя к уравнениям (2.2) закон Гука для локальных и макроскопических напряжений и деформаций

$$(2.4) \quad \dot{s}_{ij} = 2\mu(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij} \kappa(\mathbf{r})), \quad \langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle = 2\mu(\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle - \langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle),$$

получим полную систему соотношений, устанавливающих связь между локальным и макроскопическим напряженно-деформированным состояниями среды.

3. Уравнение пластичности поликристалла. Рассмотрим монокристаллы в состоянии полной пластичности ($q = 1$). Из (1.6) и (1.7) найдем

$$(3.1) \quad t_{ij} \left[\dot{s}_{ij}^{(1)} - h \dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)} \right] = 0.$$

При полной пластичности зерна исчезает его пластическая анизотропия, поэтому условие (3.1) должно выполняться для любого кристаллографического направления. Следовательно, справедливо уравнение

$$(3.2) \quad \dot{s}_{ij}^{(1)} - h \dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)} = 0.$$

Из (2.1) и (3.2) определим локальные деформации в первой фазе поликристалла

$$(3.3) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)} = \dot{\eta}_{ij} / (2\mu(1 - \beta + \theta)).$$

Для кристаллов второй фазы, находящихся в состоянии неполной пластичности, из (1.6), (1.7) и (2.1) получим величину интегрального сдвига

$$(3.4) \quad \dot{\Lambda}^{(2)} = \dot{\eta}_{ij} t_{ij} / (t_{kl} t_{kl} 2\mu(1 - \beta + \theta)).$$

Из (1.6) и (3.4) имеем локальные пластические деформации в зернах второй фазы

$$(3.5) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)} = \dot{\eta}_{kl} t_{kl} t_{ij} / (t_{pq} t_{pq} 2\mu(1 - \beta + \theta)).$$

Далее, осредняя уравнение (2.2) по всему объему материала с учетом (3.3) и (3.5) в соответствии с правилом механического смешивания фаз, найдем макроскопические напряжения в среде

$$(3.6) \quad \langle \dot{s}_{ij} \rangle = \dot{\eta}_{ij} - b(\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle_1 + \langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle_2) = (1 - v_1 \varphi) \dot{\eta}_{ij} - v_2 \varphi \Psi_{ijkl} \dot{\eta}_{kl},$$

$$\varphi = (1 - \beta) / (1 - \beta + \theta), \quad \Psi_{ijkl} = \langle t_{ij} t_{kl} / t_{pq} t_{pq} \rangle_2.$$

Выражая в (3.6) $\dot{\eta}_{ij}$ из соотношения (2.3), макроскопическое уравнение пластического деформирования материала представим в виде

$$(3.7) \quad \langle \dot{s}_{ij} \rangle = \chi_{ijkl} \langle \dot{\varepsilon}_{kl} \rangle,$$

$$\chi_{ijkl} = 2\mu_* [I_{ijmn} + c(v_1) v_2 \bar{\Psi}_{ijmn}]^{-1} [I_{mnkl} - d(v_1) v_2 \Psi_{mnkl}],$$

$$\mu_* = \mu a(v_1), \quad a(v_1) = [1 - \beta + \theta - (1 - \beta) v_1] [1 - \beta + \theta - \beta v_1]^{-1},$$

$$c(v_1) = \beta [1 - \beta + \theta + \beta v_1]^{-1}, \quad d(v_1) = (1 - \beta) [1 - \beta + \theta - (1 - \beta) v_1]^{-1},$$

$$I_{ijkl} = (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) / 2.$$

Здесь тензор упругопластических модулей среды χ_{ijkl} зависит от распределения активных систем скольжения в зернах с неполной пластичностью и от концентраций v_1 и v_2 обеих пластических фаз. В связи с этим его значение на каждом этапе нагружения определяется всей предысторией деформирования материала.

Макроскопические пластические деформации среды находятся из (2.4) и (3.7):

$$(3.8) \quad \langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle = \Theta_{ijkl} \langle \dot{\varepsilon}_{kl} \rangle,$$

$$\Theta_{ijkl} = I_{ijkl} - a(v_1) [I_{ijmn} - c(v_1) v_2 \bar{\Psi}_{ijmn}] [I_{mnkl} - d(v_1) v_2 \Psi_{mnkl}].$$

Соотношения (3.7) и (3.8) полностью определяют макроскопическое напряженно-деформированное состояние среды. На отдельных этапах нагружения уравнение (3.7) поддается упрощению. При упругом деформировании пластические фазы отсутствуют ($v_1 = v_2 = 0$) и реологическое уравнение совпадает с законом Гука $\langle \dot{s}_{ij} \rangle = 2\mu \langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle$.

В области регулярного упрочнения в материале в равной степени присутствуют все три фазы ($v_1 \neq v_2 \neq v_3 \neq 0$). При этом уравнение деформирования имеет вид (3.7). При дальнейшем монотонном нагружении в поликристалле начинают преобладать зерна в состоянии полной пластичности ($v_1 \sim 1$, а v_2 и v_3 малы). Раскладывая χ_{ijkl} в ряд по $v_2 \ll 1$ и удерживая слагаемые порядка не выше v_2 , получим приближенное равенство

$$(3.9) \quad \chi_{ijkl} = 2\mu_* [I_{ijkl} - v_2 f(v_1) \Psi_{ijkl}], \quad f(v_1) = c(v_1) + d(v_1),$$

справедливое в конце переходной области.

После завершения зоны регулярного упрочнения материал достигает состояния полной пластичности $v_1 = 1$, $v_2 = 0$. При этом из (3.7) и (3.9) находим

$$(3.10) \quad \langle \dot{s}_{ij} \rangle = 2\mu \theta (1 + \theta)^{-1} \langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle,$$

откуда следует, что при $\theta = 0$ $\langle \dot{s}_{ij} \rangle = 0$ — на стадии полной пластичности материал

с неупрочняющимися зернами ведет себя как идеально пластический. При неограниченном возрастании ϕ поведение среды близко к упругому. Наконец, при $0 < \phi < \infty$ при полной пластичности поликристалл обнаруживает линейное упрочнение с модулем $\mu\phi(1 + \phi)^{-1}$.

Для узкого класса материалов, где скорость изотропного упрочнения потенциально активных систем скольжения превышает скорость приращения разрешающих касательных напряжений за счет роста внешних напряжений, состояние полной пластичности недостижимо и асимптотические формулы (3.9) и (3.10) несправедливы.

4. Частные виды нагружения. Параметр ϕ . Рассмотрим растяжение поликристаллического образца напряжениями $\langle \sigma_{11} \rangle \neq 0$. Из соотношения (3.6) получим

$$(4.1) \quad \langle \dot{s}_{11} \rangle = (1 - v_1\phi)\dot{\eta}_{11} - v_2\phi\Psi_{11kl}\dot{\eta}_{kl},$$

где $\dot{\eta}_{22} = \dot{\eta}_{33} = -\dot{\eta}_{11}/2$; $\dot{\eta}_{ij} = 0$ ($i \neq j$).

Принимая во внимание, что $\dot{\Psi}_{11pp} = 0$, из (4.1) имеем

$$(4.2) \quad \langle \dot{s}_{11} \rangle = [1 - \phi(v_1 + v_2\psi_p)]\dot{\eta}_{11} \quad (\psi_p = 3\Psi_{1111}/2).$$

Для данного напряженно-деформированного состояния справедливы соотношения

$$(4.3) \quad \langle \dot{s}_{11} \rangle = 2\langle \dot{\sigma}_{11} \rangle/3, \quad \langle \dot{e}_{11} \rangle = 2(1 + \nu)\langle \dot{\gamma}_{11} \rangle/3$$

($\langle \dot{\gamma}_{11} \rangle$ — компонента тензора полных макродеформаций). Из (4.2) с учетом (2.3) и (4.3) получим

$$(4.4) \quad \langle \dot{\sigma}_{11} \rangle = E_K \langle \dot{\gamma}_{11} \rangle, \quad E_K = E\delta(v_1, v_2, \psi_p),$$

$$\delta(v_1, v_2, \psi_p) = [\phi + (1 - \beta)(1 - v_1 - v_2\psi_p)][1 + \phi - \beta(1 - v_1 - v_2\psi_p)]^{-1}$$

(E — модуль Юнга).

При чистом сдвиге ($\langle \sigma_{12} \rangle \neq 0$) путем аналогичных рассуждений найдем

$$(4.5) \quad \langle \dot{\sigma}_{12} \rangle = 2\mu_K \langle \dot{\gamma}_{12} \rangle, \quad \mu_K = \mu\delta(v_1, v_2, \psi_c), \quad \psi_c = 2\Psi_{1212}.$$

Для материалов, в которых достижимо состояние полной пластичности, соотношения (4.4) и (4.5) позволяют определить величину безразмерного параметра упрочнения ϕ по экспериментальным диаграммам растяжения или кручения поликристаллического образца. Например, для растяжения, полагая в (4.4) $v_1 = 1$, $v_2 = 0$, имеем

$$(4.6) \quad E_K = E\phi(1 + \phi)^{-1}.$$

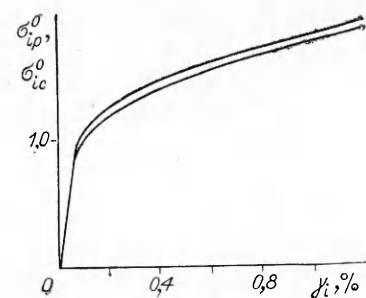
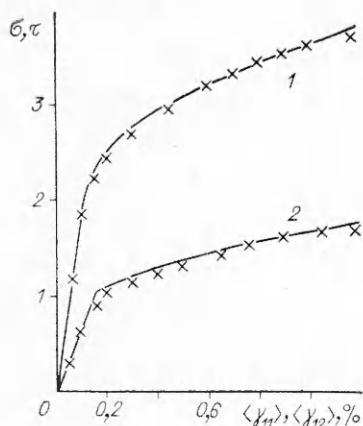
Для экспериментальной диаграммы деформирования $E_K = d\langle \sigma_{11} \rangle/d\langle \gamma_{11} \rangle$ — касательный модуль кривой за пределами переходного участка. Из (4.6) заключаем, что $\phi = \omega(1 - \omega)^{-1}$ ($\omega = E_K E^{-1}$).

Сопоставим полученные аналитические зависимости при растяжении и кручении (4.4) и (4.5) (линии) с экспериментальными данными (крестики) для алюминиевого сплава с ГЦК-кристаллической решеткой, заимствованными из [10] (рис. 1). Предел упругости материала при растяжении в соответствии с [10] $\sigma_s = 0,372$ Н/м², модуль Юнга $E = 7,07 \cdot 10^2$ Н/м², модуль сдвига $\mu = 2,65 \cdot 10^2$ Н/м². Величина касательного напряжения первоначального сдвига с учетом (1.1) принималась $\tau_0 = \sigma_s/2 = \tau_s$ (τ_s — предел упругости материала при сдвиге). По осям координат откладывались величины: $\sigma = \langle \sigma_{11} \rangle/\tau_0$, $\langle \gamma_{11} \rangle$ — кривая 1 (растяжение) и $\tau = \langle \sigma_{12} \rangle/\tau_0$, $2\langle \gamma_{12} \rangle$ — кривая 2 (чистый сдвиг). Параметр ω , определенный по экспериментальной кривой растяжения, составил 0,044, чему соответствует $\phi = 0,046$. При расчете диаграммы одноосного растяжения по формуле (4.4) параметр ψ_p определялся путем осреднения по множеству ориентаций $m = 91$ в пределах первого кристаллографического треугольника [2].

Для расчета диаграммы чистого сдвига по формуле (4.5) число ориентаций кристаллов при вычислении ψ_c определялось как $M = m \times p = 280$ ($m = 28$ — число точек в пределах кристаллографического треугольника, $p = 10$ — число ориентаций кристаллов около фиксированной оси). Кривые на рис. 1 показывают достаточно хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных для обоих рассмотренных случаев.

На рис. 2 представлены диаграммы, полученные пересчетом теоретических кривых на рис. 1 в пространство интенсивностей напряжений и деформаций по формулам

$$(4.7) \quad \sigma_i = \frac{1}{3} \sqrt{\langle \sigma_{11} \rangle - \langle \sigma_{22} \rangle)^2 + (\langle \sigma_{11} \rangle - \langle \sigma_{33} \rangle)^2 + (\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{33} \rangle)^2 + 6(\langle \sigma_{12} \rangle^2 + \langle \sigma_{13} \rangle^2 + \langle \sigma_{23} \rangle^2)},$$



Р и с. 1

Р и с. 2

$$\gamma_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\langle \gamma_{11} \rangle - \langle \gamma_{22} \rangle)^2 + (\langle \gamma_{11} \rangle - \langle \gamma_{33} \rangle)^2 + (\langle \gamma_{22} \rangle - \langle \gamma_{33} \rangle)^2 + 6(\langle \gamma_{12} \rangle^2 + \langle \gamma_{13} \rangle^2 + \langle \gamma_{23} \rangle^2)}$$

При этом по оси абсцисс откладывалась величина γ_i , по оси ординат $\bar{\sigma}_i^0 = \sigma_i / \tau_0$.

Из (4.4), (4.5) и (4.7) имеем $\dot{\sigma}_{iD} = E_{iD} \dot{\gamma}_{iD}$, $E_{iD} = 2\mu\delta(v_1, v_2, \psi_D)$, $\dot{\sigma}_{iC} = E_{iC} \dot{\gamma}_{iC}$, $E_{iC} = 2\mu\delta(v_1, v_2, \psi_C)$.

Аналитическая кривая 1 на рис. 2, соответствующая чистому сдвигу, находится несколько ниже, чем диаграмма 2 для одноосного растяжения, при этом на стадии полной пластичности ($v_1 = 1, v_2 = 0$) $E_{iD} = E_{iC} = \mu\phi(1 + \phi)^{-1}$.

Таким образом, для предложенной математической модели поликристаллической среды не выполняется условие независимости связи $\sigma_i^0 - \gamma_i$ от вида напряженно-деформированного состояния, расчеты дают отклонение от этого условия в ту же сторону, что и эксперименты, проведенные над многими материалами [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. I. Plastic strain in metals // J. Inst. Metals.— 1938.— V. 62, N 1.
2. Будянский Б., Ву Т. Т. Теоретическое предсказание пластических деформаций в поликристаллах // Механика: Сб. пер.— М., 1964.— № 6.
3. Hill R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals // J. Mech. and Phys. Solids.— 1965.— V. 13, N 2.
4. Лип Т. Н. Физическая теория пластичности // Проблемы теории пластичности.— М.: Мир, 1976.— Вып. 7.
5. Цзан, Вэн. Переход от пластических свойств монокристаллов к пластическому поведению поликристалла при чистом растяжении и эффект множественного скольжения // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Теорет. основы инж. расчетов.— 1984.— Т. 106, № 4.
6. Хонникомб Р. Пластическая деформация металлов.— М.: Мир, 1972.
7. Волоховская О. А., Подалков В. В. Об упругопластическом поведении материала с учетом микронесоднородности // ПМТФ.— 1981.— № 6.
8. Волоховская О. А., Подалков В. В. Микронапряжения и начальная граница пластичности в поликристаллическом материале // Изв. вузов. Машиностроение.— 1977.— № 10.
9. Мохель А. Н., Солганик Р. Л., Христианович С. А. Теоретическое описание запаздывания пластического деформирования сталей // Пластичность и разрушение твердых тел.— М.: Наука, 1988.
10. Кудряшов Н. Н., Рычков Б. А., Швайко Ю. Н. Теоретическое и экспериментальное исследование законов деформирования алюминиевого сплава АК-6 при сложном нагружении // Изв. АН КиргССР.— 1970.— № 1.
11. Митрохин Н. Н., Яги Ю. И. О систематическом характере отклонений от законов пластичности // ДАН СССР.— 1960.— Т. 135, № 4.

г. Москва

Поступила 10/XI 1989 г.,
в окончательном варианте — 5/VI 1990 г.