УДК 517.9

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ, ЗАПИСАННЫХ В ИНВАРИАНТАХ РИМАНА

С. В. Мелешко, Е. Шульц

Математический колледж Института науки Технологического университета
им. Суранари, 30000 Накхон Ратчасима, Таиланд
E-mails: sergey@math.sut.ac.th, eckart@math.sut.ac.th

Решения одномерных уравнений газовой динамики и уравнений, описывающих поведение нелинейно-упругого материала, сводятся к решению системы однородных дифференциальных уравнений, записанных в инвариантах Римана. Показано, что решение задачи Коши для такой системы, допускающей дифференциальную связь, сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены примеры решений при определенных начальных данных.

Ключевые слова: метод дифференциальных связей, инварианты Римана, уравнения газовой динамики, уравнения нелинейной упругости.

DOI: 10.15372/PMTF20210301

Введение. При использовании практически всех методов нахождения точных частных решений уравнений в частных производных необходимо проводить анализ совместности переопределенных систем. Указанные методы различаются способом получения переопределенных систем. Например, функционально-инвариантные решения должны удовлетворять дифференциальным уравнениям первого порядка, которые являются квазилинейными уравнениями относительно производных первого порядка; решения с вырожденным годографом характеризуются соотношениями между зависимыми переменными; при групповом анализе дополнительные соотношения получаются из условия инвариантности решения или частичной инвариантности в виде отношений между инвариантами.

1. Метод дифференциальных связей. В 1964 г. Н. Н. Яненко предложил метод дифференциальных связей [1], являющийся одним из методов построения частных точных решений уравнений в частных производных [2–6].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$S_i(x,u,p) = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,s. \tag{1}$$

Предположим, что решение системы (1) удовлетворяет дополнительным дифференциальным уравнениям

$$\Phi_k(x,u,p) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,q. \tag{2}$$

Система (1), (2) является переопределенной. При использовании метода дифференциальных связей требуется, чтобы переопределенная система (1), (2) была совместной.

Форма дифференциальных связей (функций Φ_k) и некоторые уравнения исходной системы (функции S_i) могут быть неизвестны априори.

Требования совместности системы (1), (2) являются общими и содержатся практически во всех известных методах получения решений дифференциальных уравнений в частных производных. Увеличение количества требований к дифференциальным связям ограничивает общность метода, что делает его более подходящим для поиска точных частных решений. В [7–9] требовалась инволютивность расширенной системы (1), (2), что позволило развить методы построения дифференциальных связей.

Однако требование инволютивности для расширенной системы содержит большой произвол в выборе дифференциальных связей. Более сильные ограничения на дифференциальные связи предложены в работах [10, 11]: условия инволютивности для расширенной системы должны представлять собой определяющие уравнения однопараметрической группы Ли, допускаемой системой (1).

В [12] рассмотрен поставленный Н. Н. Яненко и Л. В. Овсянниковым вопрос о взаимосвязи решений, полученных методом дифференциальных связей, и частично инвариантных решений.

2. Системы дифференциальных уравнений в переменных Римана. Любая автономная гиперболическая система дифференциальных уравнений в частных производных с двумя независимыми и зависимыми переменными может быть записана в виде [2]

$$r_t + \lambda(r,s) r_x = f(r,s), \qquad s_t + \mu(r,s) s_x = g(r,s), \tag{3}$$

где r, s — инварианты Римана. Уравнения (3) рассматриваются с точностью до преобразований эквивалентности

$$\tilde{r} = h(r), \qquad \tilde{s} = q(s),$$

и

$$\tilde{r} = s, \qquad \tilde{s} = r.$$

Решения уравнений (3), характеризуемых одной автономной дифференциальной связью первого порядка

$$r_x = p(r,s), \tag{4}$$

рассмотрены в [13, 14]. Решения, характеризуемые дифференциальными связями, количество которых на одно меньше числа зависимых переменных, называются обобщенными простыми волнами [4, 12].

В данной работе на примере однородных уравнений

$$r_t + \lambda(r,s) r_x = 0, \qquad s_t + \mu(r,s) s_x = 0 \tag{5}$$

показано, что условие автономности дифференциальной связи значительно сужает класс дифференциальных уравнений (3), для которых существуют решения типа обобщенных простых волн.

Заметим, что для инволютивности переопределенной системы (5), (4) должны выполняться условия [13]

$$p_s(\lambda - \mu) + p\lambda_s = 0, \qquad p\lambda_r = 0.$$

Следовательно, при $\lambda_r \neq 0$ получаем $p = 0$. Таким образом, единственным решением (5), удовлетворяющим одной дифференциальной связи первого порядка (4), является волна Римана $r = \mathrm{const}$. В настоящей работе построены решения уравнений (5) типа обобщенных простых волн, которые отличаются от волн Римана.

3. Обобщенная простая волна. Рассмотрим случай связи более общего вида, чем связь (4):

$$r_x = p(t, x, r, s).$$

3.1. *Условия, допускающие решения типа обобщенной простой волны.* Поскольку случай $p = 0$ соответствует волне Римана, этот случай исключен из данного исследования. Переопределенная система (5), (4) инволютивна тогда и только тогда, когда

$$p_t + \lambda p_x + p^2 \lambda_r = 0, \qquad p_s(\lambda - \mu) + p\lambda_s = 0. \tag{6}$$

Заметим, что если $\lambda = \mu$, то якобиан

$$\frac{\partial(r, s)}{\partial(t, x)} = 0$$

и система (5) вырождается, сводясь к одному уравнению

$$s_t + \mu(R(s), s)s_x = 0,$$

где $r = R(s)$ — произвольная функция. Если $\lambda_s = 0$, то система (5) также вырождается. В этом случае первое уравнение (5) отделяется от системы.

Рассмотрим невырожденный случай $\lambda_s(\lambda - \mu) \neq 0$. Решая уравнения (6) относительно p_t, p_s и сравнивая смешанные производные $(p_t)_s = (p_s)_t$, находим

$$p_x + gp^2 = 0, \tag{7}$$

где

$$g = \frac{\lambda_{rs}}{\lambda_s} - \frac{\lambda_r}{\lambda - \mu}. \tag{8}$$

При $p \neq 0$ общее решение уравнения (7) представляется в виде

$$p = (xg - \tilde{h})^{-1},$$

где $\tilde{h}(t, r, s)$ — произвольная функция. Подставляя p в уравнения (6) и решая их, получаем

$$p = [t(\lambda_r - \lambda g) + xg - \hat{h}]^{-1},$$

где функции $\hat{h}(r, s)$ и $g(r, s)$ должны удовлетворять условиям

$$\hat{h}_s = \frac{\lambda_s}{\lambda - \mu}\,\hat{h}; \tag{9}$$

$$g_s = \frac{\lambda_s}{\lambda - \mu}\,g. \tag{10}$$

Подставляя $g(r, s)$ из (8) в (10), находим соотношения для коэффициентов $\lambda(r, s)$ и $\mu(r, s)$, гарантирующие существование решений типа обобщенной простой волны. Далее предполагается, что эти соотношения выполнены.

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial s}\,(\lambda_r - \lambda g) = \frac{\lambda_s}{\lambda - \mu}\,(\lambda_r - \lambda g),$$

можно сделать вывод, что функция

$$h = \hat{h} - t_0(\lambda_r - \lambda g) - x_0 g$$

также удовлетворяет уравнению (9), где t_0, x_0 — некоторые константы. Следовательно, функцию p можно записать в виде

$$p = [(t - t_0)(\lambda_r - \lambda g) + (x - x_0)g - h]^{-1}, \tag{11}$$

где $h = h(r, s)$ удовлетворяет уравнению (9):

$$h_s = \frac{\lambda_s}{\lambda - \mu}\, h. \tag{12}$$

Поскольку функция h, входящая в (11), удовлетворяет соотношению (12), переопределенная система уравнений (5), (4) обладает преобразованием эквивалентности, соответствующим сдвигам относительно t и x.

Замечание 1. Если $g \neq 0$, то из соотношения (10) следует $g_s \neq 0$. Тогда существуют функции $H(r)$ и $F(r)$, такие что

$$\lambda_r - \lambda g = F(r) g, \qquad h = H(r) g.$$

Так как

$$g = \frac{1}{\lambda_s}\Big(\lambda_{rs} - \frac{\lambda_r \lambda_s}{\lambda - \mu}\Big),$$

то функция $F(r)$ не произвольна. Таким образом, если $g \neq 0$, то

$$p(t, x, r, s) = [((t - t_0)F(r) + (x - x_0) - H(r))g(r, s)]^{-1}.$$

Замечание 2. Переопределенная система уравнений (5), (4) обладает одним семейством характеристик $dx/dt = \phi$.

3.2. *Задача Коши.* Рассмотрим начальные данные при $t = t_0$, $r = r_0(x)$ и $s = s_0(x)$, удовлетворяющие обыкновенному дифференциальному уравнению

$$r_0'(x) = [x g(r_0(x), s_0(x)) - h(r_0(x), s_0(x))]^{-1}. \tag{13}$$

В [4] доказано, что решение задачи Коши системы (5) с начальными данными при $t = t_0$

$$r(t_0, x) = r_0(x), \qquad s(t_0, x) = s_0(x)$$

должно удовлетворять дифференциальной связи

$$r_x = [(t - t_0)(\lambda_r - \lambda g) + xg - h]^{-1}$$

также при $t > t_0$. Решение этой задачи можно найти, интегрируя систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mu, \qquad \frac{dr}{dt} = -\frac{\lambda - \mu}{(t - t_0)(\lambda_r - \lambda g) + xg - h}, \qquad \frac{ds}{dt} = 0 \tag{14}$$

с начальными данными при $t = t_0$:

$$x = \xi, \qquad r = r_0(\xi), \qquad s = s_0(\xi) = r_0(\xi) - 2\psi(\varepsilon_0),$$

где ξ — параметр. Система (14) соответствует условиям на характеристике $dx/dt = \mu$.

Замечание 3. В частности, если $s_0(x) = \text{const}$, то инвариант Римана $s(t, x) = \text{const}$, что соответствует волне Римана.

Следует отметить, что систему обыкновенных дифференциальных уравнений (14) можно записать также в виде системы линейных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dr} = -\mu\, \frac{(t - t_0)(\lambda_r - \lambda g) + xg - h}{\lambda - \mu}, \\ \frac{dt}{dr} = -\frac{(t - t_0)(\lambda_r - \lambda g) + xg - h}{\lambda - \mu}, \qquad \frac{ds}{dr} = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Линейность системы (15) является следствием линеаризуемости системы (5) преобразованием годографа [15].

Рассмотрим случай $g \neq 0$. Можно показать, что решение любой задачи Коши для системы (5) с $r_0' \neq 0$ сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (14). Действительно, система (15) имеет форму

$$\frac{dx}{dt} = \mu, \qquad \frac{dr}{dt} = -\frac{\lambda - \mu}{((t-t_0)F + x - H)g}, \qquad \frac{ds}{dt} = 0. \tag{16}$$

Заметим, что функции $g(r,s)$ и $F(r)$ определены коэффициентами $\lambda(r,s)$ и $\mu(r,s)$. Функцию $H(r)$ можно найти, используя начальные данные. Действительно, поскольку $r_0'(\xi) \neq 0$, можно найти $\xi = X_0(r)$, такое что

$$X_0(r_0(\xi)) = \xi.$$

Уравнение (13) принимает вид

$$X_0'(r) = (X_0(r) - H(r))g(r, S_0(r)),$$

где $S_0(r) = s_0(X_0(r))$. Из последнего уравнения определяется функция

$$H(r) = X_0(r) - X_0'(r)/g(r, S_0(r)).$$

4. Одномерные уравнения газовой динамики. Одномерное движение изоэнтропических течений газа описывается уравнениями, записанными в инвариантах Римана (5) [2], где

$$r = v + \varphi(\rho), \quad s = v - \varphi(\rho), \quad \lambda = v + c(\rho), \quad \mu = v - c(\rho), \quad c(\rho) = \rho\varphi'(\rho),$$

ρ — плотность; v — скорость; $c > 0$ — скорость звука. Производные заменяются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{\varphi'}\frac{\partial}{\partial \rho}\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{\varphi'}\frac{\partial}{\partial \rho}\Big).$$

Заметим, что $\lambda_s = 0$, только если $c = \sqrt{3q}\rho$, где q — постоянная. Этот случай соответствует уравнению состояния $p = q\rho^3$. Тогда уравнения (5) распадаются на независимые уравнения. В данной работе этот случай не рассматривается.

Из уравнений (10), (8) следует

$$2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2 - 4k\varphi'^{5/2}\varphi'' = 0.$$

Общее решение последнего уравнения зависит от трех констант. Из общего решения получаем следующие зависимости $c(\rho)$:

1) $c = k\rho/(\rho+q)^2$;
2) $c = k\rho/(\rho+q)^{2/3}$;
3) $\sqrt{\rho/c} + k \operatorname{arctg}(k\sqrt{c/\rho}) = q_0(\rho+q)$;
4) $2k\sqrt{\rho/c} + \ln[(\sqrt{c/\rho} - k)/(\sqrt{c/\rho} + k)] = q_0(\rho+q)$.

Здесь k, q_0, q — постоянные.

Замечание 4. Одна из моделей в гемодинамике имеет вид [16–18]

$$A_t + (vA)_x = 0, \qquad v_t + vv_x + \rho^{-1}p_x = 0,$$

где ρ — постоянная; $A = A(p)$. При использовании функции $p = p(A)$, которая является обратной к $A(p)$, последние уравнения совпадают с одномерными уравнениями газовой динамики, в которых A нужно заменить на ρ.

5. Нелинейно-упругий материал. Рассмотрим уравнения одномерного движения нелинейно-упругого материала.

5.1. *Условия для уравнения состояния, допускающего дифференциальную связь.* Одномерное движение нелинейно-упругого материала описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных

$$\varepsilon_t = v_x, \qquad \rho v_t = \sigma_x, \tag{17}$$

где ε — деформация; v — скорость; σ — напряжение; ρ — плотность материала, которая считается постоянной. Предполагается, что $\rho = 1$ и $\sigma = \varphi(\varepsilon)$, причем $\varphi'(\varepsilon) = \phi^2(\varepsilon) > 0$. Для нелинейно-упругого материала $\phi'(\varepsilon) \neq 0$. Предполагается, что $\phi(\varepsilon) > 0$. Случай $\phi(\varepsilon) < 0$ рассматривается аналогично.

Замечание 5. Используя потенциал $\mu(t,x)$, такой что $v(t,x) = \mu_t(t,x)$ и $\varepsilon(t,x) = \mu_x(t,x)$, уравнения (17) можно записать в вариационной форме с лагранжианом $\mathcal{L} = \mu_t^2/2 - \sigma(\mu_x)$. Симметрии и законы сохранения уравнения Эйлера — Лагранжа, соответствующие этому лагранжиану, изучены в [19].

Пусть функция $\psi(\varepsilon)$ такова, что $\psi'(\varepsilon) = \phi(\varepsilon)$. Уравнения (17) можно записать в виде (5), полагая

$$r = v + \psi(\varepsilon), \quad s = v - \psi(\varepsilon), \quad \lambda = -\phi(\varepsilon), \quad \mu = \phi(\varepsilon). \tag{18}$$

Заметим, что $\lambda_s = 0$ только в линейном случае $\phi' = 0$. Из соотношений (18) следует

$$\psi(\varepsilon) = (r-s)/2, \qquad v = (r+s)/2.$$

Таким образом, при замене переменных r, s на ε, v производные заменяются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{\phi}\,\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{\phi}\,\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big).$$

Тогда

$$g = \frac{1}{4\phi'}\Big(2\Big(\frac{\phi'}{\phi}\Big)' - \Big(\frac{\phi'}{\phi}\Big)^2\Big).$$

Это означает, что $g = g(\varepsilon)$, и уравнение (10) принимает вид

$$g' = \frac{\phi'}{2\phi}\, g.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид $g = k\sqrt{\phi}$, где k — некоторая константа. Из условия (8) следует уравнение

$$2\Big(\frac{\phi'}{\phi}\Big)' - \Big(\frac{\phi'}{\phi}\Big)^2 = 4k\phi'\sqrt{\phi}\,. \tag{19}$$

Решение уравнения (19) можно найти в неявной форме. При введении функции $G(\phi)$, такой что $\phi' = \phi G(\phi)$, уравнение (19) становится линейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2\phi G' - G = 4k\phi^{3/2}.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид $G = \phi^{1/2}(2k\phi + \tilde{q})$, где $\tilde{q}$ — постоянная. Следовательно,

$$\frac{d\phi}{d\varepsilon} = \phi^{3/2}(2k\phi + \tilde{q}); \tag{20}$$

$$\frac{d\psi}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{\phi}\,(2k\phi + \tilde{q})}, \qquad \frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{\sqrt{\phi}}{2k\phi + \tilde{q}}.$$

Заметим, что в этом случае

$$\lambda_r - \lambda g = -(\tilde{q}/2)\sqrt{\phi}\,.$$

В частности, если $k \neq 0$, то $F(r) = -\tilde{q}/(2k)$.

Так как $\phi' \neq 0$, то $k^2+\tilde{q}^2>0$. Решение уравнения (20) зависит от констант k и $\tilde{q}$:

$$k=0:\quad \phi=\frac{q^2}{(\varepsilon+k_1)^2},\quad q=-\frac{2}{\tilde{q}},\qquad \tilde{q}=0:\quad \phi=\frac{q^2}{(\varepsilon+k_1)^{2/3}},\quad k=-\frac{1}{3q^3},$$

$$k\tilde{q}\neq 0:\qquad \operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{\phi}}{q}\Big)+\frac{q}{\sqrt{\phi}}=k_0(\varepsilon+k_1),\quad \tilde{q}=2kq^2,\quad k_0=kq^3,$$

$$k\tilde{q}\neq 0:\qquad \ln\Big(\frac{\sqrt{\phi}-q}{\sqrt{\phi}+q}\Big)+\frac{2q}{\sqrt{\phi}}=2k_0(\varepsilon+k_1),\quad \tilde{q}=-2kq^2,\quad k_0=kq^3,$$

где k_1 — постоянная. Функции $\psi(\varepsilon)$ и $\varphi(\varepsilon)$ можно представить через функцию $\phi(\varepsilon)$. В частности, для $k\tilde{q}\neq 0$

$$\tilde{q}=-2kq^2,\ k_0=kq^3:\qquad \psi=q^2\Big(\varepsilon-\frac{q}{k_0\sqrt{\phi}}\Big)+\psi_0,\qquad \varphi=q^3\Big(q\varepsilon+\frac{\phi-q^2}{k_0\sqrt{\phi}}\Big)+\varphi_0,$$

$$\tilde{q}=2kq^2,\ k_0=kq^3:\qquad \psi=-q^2\Big(\varepsilon+\frac{q}{k_0\sqrt{\phi}}\Big)+\psi_0,\qquad \varphi=q^3\Big(q\varepsilon+\frac{\phi+q^2}{k_0\sqrt{\phi}}\Big)+\varphi_0,$$

где ψ_0, φ_0 — постоянные.

5.2. *Решения частных задач Коши.* Исследуется случай $\tilde{q}=-2kq^2$, $k_0=kq^3$. Рассмотрим задачу с начальными данными при $t_0=0$, такими что $\varepsilon=\varepsilon_0=\mathrm{const}$, в случае линейной функции $r_0(\xi)$. Предположим, что

$$r_0(\xi)=\alpha^{-1}(\xi+\beta),\qquad \alpha\neq 0.$$

Тогда

$$v=\alpha^{-1}(\xi+\beta)-\psi(\varepsilon_0),\qquad s_0(\xi)=\alpha^{-1}(\xi+\beta)-2\psi(\varepsilon_0).$$

В этом случае $X_0(r)=\alpha r-\beta$. Так как $F(r)=q^2$ и $g=(k_0/q^3)\sqrt{\phi}$, то

$$H(r)=\alpha r-\beta-\alpha q^3/(k_0\sqrt{\phi(\varepsilon_0)}\,).$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (16) принимает вид

$$\frac{dx}{dt}=\phi,\quad \frac{dr}{dt}=\frac{2q^3\sqrt{\phi}}{k_0h_m},\quad \frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{q^3}{k_0\sqrt{\phi}\,h_m},\quad \frac{d\phi}{dt}=\frac{2\phi(\phi-q^2)}{h_m},\tag{21}$$

где $h_m=q^2t+x-H$. Последнее уравнение добавлено в (21), так как функция $\phi(\varepsilon)$ представлена в неявном виде. Заметим, что

$$h_m\big|_{t=0}=\frac{\alpha}{k\sqrt{\phi(\varepsilon_0)}},\qquad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}=A,\qquad \frac{d^3\varepsilon}{dt^3}=AB,$$

где

$$A=\frac{2q^3(\alpha q^3-k_0\sqrt{\phi}\,h_m)}{k_0^2h_m^3},\qquad B=\frac{q^3(5\phi-3q^2)+3k_0\sqrt{\phi}\,h_m^2A}{q^3h_m}.$$

Подставляя начальные данные в выражение для A, получаем $A|_{t=0}=0$. Таким образом, находим

$$\frac{d^n\varepsilon}{dt^n}=0\qquad \forall n>1.$$

Значит,

$$\varepsilon=at+\varepsilon_0,$$

где $a(\xi)$ — некоторая функция. Подставляя последнее выражение в производную $d\varepsilon/dt$ и рассматривая его при $t=0$, получаем $a=\alpha^{-1}$. Поэтому $\varepsilon=\alpha^{-1}t+\varepsilon_0$. Таким образом, $v_t=0$, $v_x=\alpha^{-1}$ и $v=\alpha^{-1}(x+\beta)-\psi(\varepsilon_0)$.

Следовательно, если начальные данные таковы, что $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $v(0, x)$ является линейной функцией, то решение имеет вид

$$\varepsilon = \alpha^{-1} t + \varepsilon_0, \qquad v = \alpha^{-1}(x + \beta) - \psi(\varepsilon_0).$$

В случае логарифмической функции $r_0(\xi)$ при $r_0(\xi) = \beta^{-1} \ln(\alpha^{-1}\xi)$, $\beta\alpha \neq 0$ получаем

$$H(r) = \beta\Big(1 - \frac{q^3}{\beta k_0 \sqrt{\phi(\varepsilon_0)}}\Big)\, \mathrm{e}^{\alpha r}.$$

Следовательно, для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (21) начальные данные при $t_0 = 0$ имеют вид

$$x = \xi, \quad r = r_0(\xi), \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \phi = \phi(\varepsilon_0).$$

Для решения этой задачи Коши использовался метод Рунге — Кутты шестого порядка. Найденные функции зависят от параметра $\xi \in [0{,}1; 25{,}0]$ и представлены на рис. 1–3 ($q = 1{,}1$, $k_0 = -10$, $\alpha = 10$, $\beta = -10$, $\varepsilon_0 = 0{,}5$, $\phi_0 = 1{,}5$, $\psi_0 = 1$, $\varphi = 1$). На рис. 1 представлены зависимости скорости v и деформации ε от ξ, t, где $(t, \xi) \in [0, 15] \times [0{,}1; 25{,}0]$, на рис. 2 — зависимости скорости v и деформации ε от ξ в различные моменты времени t, на рис. 3 — зависимости скорости v и деформации ε от переменных x, t, где $x \in [22{,}689; 24{,}900]$. Эти зависимости построены с помощью кубического сплайна на основе найденного решения задачи Коши $v(\xi, t)$, $\varepsilon(\xi, t)$. На рис. 4 приведена зависимость $\sigma = \varphi(\varepsilon)$, представляющая собой уравнение состояния, которое использовалось при решении задачи.

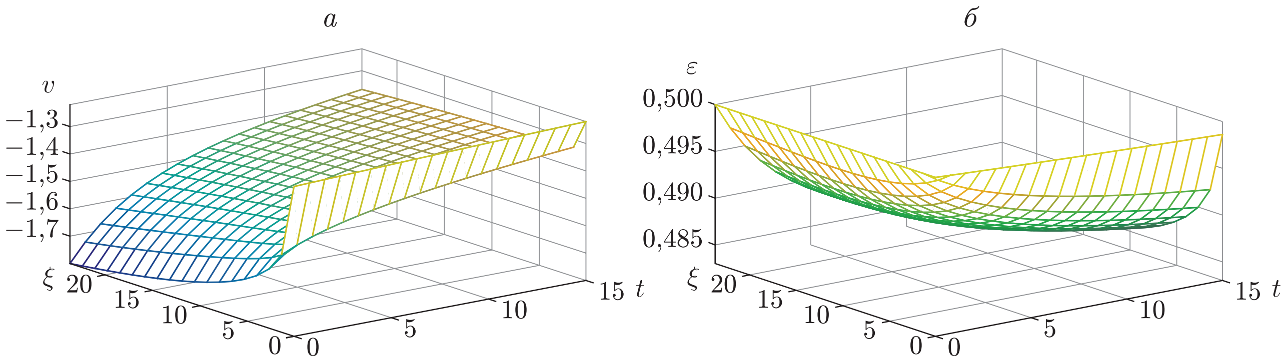

Рис. 1. Зависимости скорости v (a) и деформации ε ($б$) от переменных ξ, t

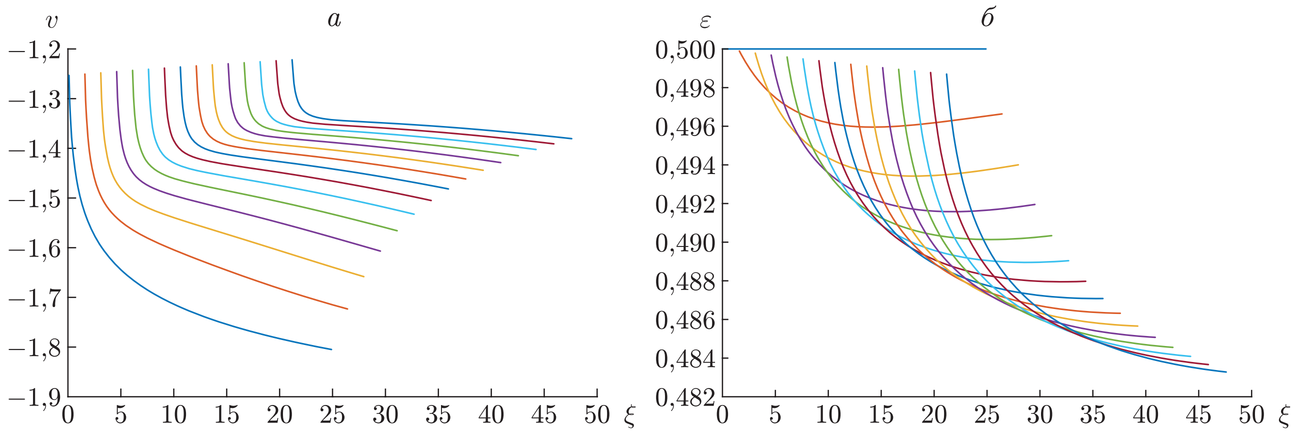

Рис. 2. Зависимости скорости v (a) и деформации ε ($б$) от переменной ξ в различные моменты времени t

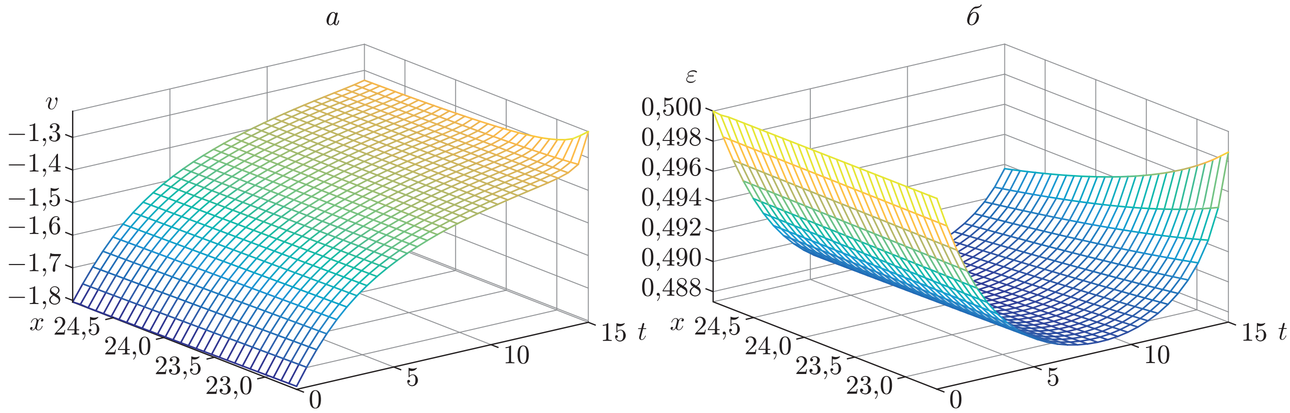

Рис. 3. Зависимости скорости v (a) и деформации ε ($б$) от переменных x, t

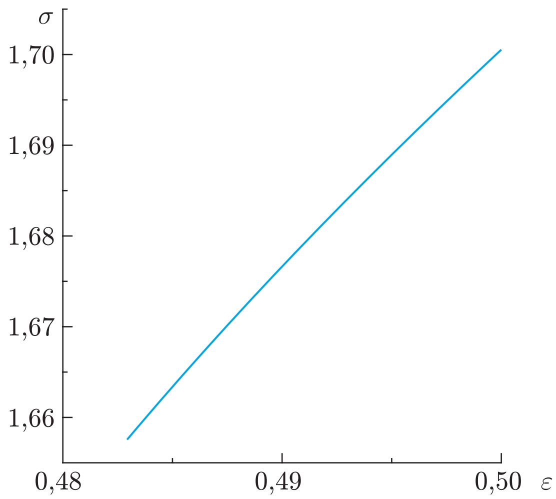

Рис. 4. Зависимость $\sigma = \varphi(\varepsilon)$

Заключение. В работе показано, что если система уравнений, записанная в инвариантах Римана, допускает дифференциальную связь, то решение любой задачи Коши для уравнений в частных производных сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая представляет собой условия вдоль характеристик переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Получены общие решения этих уравнений для уравнений газовой динамики и уравнений, описывающих поведение нелинейной упругой среды. Наличие в этих решениях произвольных констант позволяет предположить, что их можно использовать для аппроксимации экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Яненко Н. Н.** Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных // Тр. 4-го Всесоюз. съезда по математике, Ленинград, 3–12 июля 1961 г. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1964. С. 247–252.
2. **Рождественский Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. М.: Наука, 1978.

3. **Сидоров А. Ф.** Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике / А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
4. **Meleshko S. V.** Methods for constructing exact solutions of partial differential equations. N. Y.: Springer, 2005. (Mathematical and analytical techniques with applications to engineering).
5. **Chaiyasena A., Worapitpong W., Meleshko S. V.** Generalized Riemann waves and their adjoinment through a shock wave // Math. Modell. Natural Phenomena. 2018. V. 13. P. 1–13.
6. **Curro C., Grifo G., Manganaro N.** Solutions via double wave ansatz to the 1-d non-homogeneous gas-dynamics equations // Intern. J. Non-Linear Mech. 2020. V. 123. 103492.
7. **Фомин В. М., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.** Применение метода дифференциальных связей к построению замкнутых математических моделей, описывающих одномерные динамические процессы в сплошной среде // Численные методы механики сплошной среды. 1973. Т. 4, № 3. С. 39–47.
8. **Шапеев В. П.** Приложение метода дифференциальных связей к одномерным уравнениям механики сплошной среды: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1974.
9. **Распопов В. Е., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.** Метод дифференциальных связей для одномерных уравнений газовой динамики // Численные методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8, № 2. С. 100–105.
10. **Kaptsov O. V.** Determining equations and differential constraints // J. Nonlinear Math. Phys. 1995. V. 2, N 3/4. P. 283–291.
11. **Андреев В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1994.
12. **Meleshko S. V., Shapeev V. P.** Nonisentropic solutions of simple wave type of the gas dynamics equations // J. Nonlinear Math. Phys. 2011. V. 18, N 1. P. 195–212.
13. **Manganaro N., Meleshko S. V.** Reduction procedure and generalized simple waves for systems written in the Riemann variables // Nonlinear Dynamics. 2002. V. 30, N 1. P. 87–102.
14. **Curro C., Manganaro N.** Generalized Riemann problems and exact solutions for p-systems with relaxation // Ricerche Mat. 2016. V. 65. P. 549–562.
15. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
16. **Secomb T. W.** Hemodynamics // Comprehensive Physiology. 2016. V. 6, N 2. P. 975–1003.
17. **Mozokhina A. S., Mukhin S. I.** Some exact solutions to the problem of a liquid flow in a contracting elastic vessel // Math. Models Comput. Simulat. 2019. V. 11, N 6. P. 894–904.
18. **Meleshko S. V., Moyo S., Sukhinin S. V.** Sedov type solution of the equations of hydraulic longitudinal waves // Intern. J. Non-Linear Mech. 2021. V. 131. 103674. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103674.
19. **Kaptsov E. I., Meleshko S. V.** Analysis of the one-dimensional Euler — Lagrange equation of continuum mechanics with a Lagrangian of a special form // Appl. Math. Modell. 2020. V. 77. P. 1497–1511. DOI: 10.1016/j.apm.2019.09.014.

Поступила в редакцию 25/II 2021 г.,
после доработки — 25/II 2021 г.
Принята к публикации 1/III 2021 г.