ПМТФ, № 3, 1972

УДК 534.222:539.3

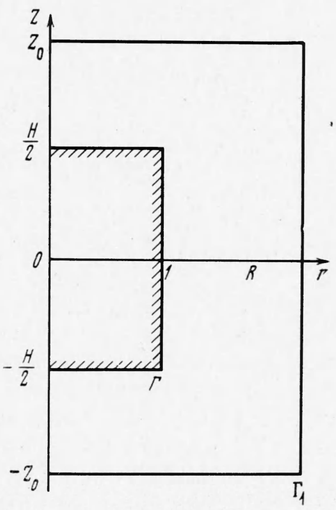
ДИФРАКЦИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ДИСКЕ

$\boxed{\text{А. М. Скобеев}}$

(Москва)

Строится численное решение осесимметричной задачи о дифракции плоской продольной волны на жестком диске (цилиндре) конечной толщины. Диск заключен в неограниченную упругую среду, на поверхности контакта касательные напряжения ограничены некоторой константой. Падающая волна движется вдоль оси цилиндра и имеет вид полубесконечной размытой ступеньки. Попутно получается решение соответствующей статической задачи. Исследовалась зависимость скорости движения цилиндра и поля напряжений от параметров задачи. В частности, показано, что условия контакта существенно влияют на поле напряжений лишь вблизи боковой поверхности. Полученные результаты могут быть полезны для оценки погрешности измерения напряжений и скоростей в упругой среде и, возможно, в некоторых других случаях.

1. В рамках динамической теории упругости рассматривается осесимметричная задача о взаимодействии продольной волны с жестким цилиндром конечных размеров. Используются цилиндрические координаты z, r, ось z совпадает с осью цилиндра, который занимает область $-H/2 \leqslant z \leqslant H/2$, $r \leqslant 1$ (фиг. 1). Область вне цилиндра заполняет упругая среда. Единицы измерения выбраны так, чтобы радиус цилиндра, плотность среды и скорость распространения продольных волн в ней равнялись единице.



Фиг. 1

Ниже будут использоваться следующие основные обозначения: ρ — плотность цилиндра, μ — модуль сдвига среды, t — время, $u(t, r, z)$, $w(t, r, z)$ — смещения по r и z, $v(t)$ — скорость, $w_0(t)$ — смещение цилиндра, σ_{zz}, $\tau = \sigma_{rz}$ — компоненты тензора напряжений, связанные со смещениями законом Гука

$$\sigma_{zz} = w_z + (1-2\mu)(u_r + u/r), \quad \tau = \mu(u_z + w_r) \qquad (1.1)$$

Кроме того, вводятся вспомогательные обозначения: Γ — контур цилиндра в координатах, r, z; Q_1, Q_2 — смещения цилиндра по нормали и касательной к Γ; $Q_1 = 0$, $Q_2 = w_0$ на боковой поверхности, $Q_1 = w_0$, $Q_2 = 0$ на основаниях; q_1, q_2 — смещения в среде на границе с цилиндром, q_1 — по нормали к Γ, q_2 — по касательной; точкой обозначается частная производная по t.

Вне цилиндра для u и w выполняются динамические уравнения теории упругости

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \mu u_{zz} + u_{rr} + (1-\mu) w_{rz} + u_2/r - u/r^2 \\ w_{tt} &= w_{zz} + \mu w_{rr} + \mu w_r/r + (1-\mu)(u_{zr} + u_z/r) \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Уравнение движения цилиндра

$$\rho \frac{H}{2} \frac{d^2 w_0}{dt^2} = \int_\Gamma r\sigma_{zz}\, dr + \tau\, dz \qquad (1.3)$$

Для уравнений (1.2), (1.3) ставится краевая задача с начальными условиями при $t = 0$ и граничными на Г.

Начальные условия описывают плоскую продольную волну, падающую из бесконечности на верхнее основание цилиндра. Перед передним фронтом волны среда покоится и не нагружена, за задним фронтом находится в состоянии одноосной деформации с $\sigma_{zz} = 1$. Эти условия имеют вид

$$w_\theta(0) = 0,\ v(0) = 0,\ u(0, r, z) = u_t(0, r, z) = 0 \qquad (1.4)$$
$$w_z(0, r, z) = w_t(0, r, z) = f((H + T - 2z) / T)$$

Здесь

$$f(\xi) = 0 \text{ при } \xi \geqslant 1,\ f(\zeta) = 1 \text{ при } \xi \leqslant -1,\ f(\zeta) = (1 + \xi^2 \operatorname{sign} \xi) / 2 - \xi$$
$$\text{при } -1 < \xi < 1 \qquad (1.5)$$

Входящий в (1.4) параметр T характеризует степень размытия волны.

На поверхности цилиндра ставились два граничных условия. Первое из них возникает из предположения о том, что цилиндр жесткий. Оно имеет вид $q_1 = Q_1$ на Г.

Второе соответствует упрощенному закону сухого трения

$$\dot{q}_2 = \dot{Q}_2, \quad \text{если} \quad |\tau| < k$$
$$\tau = k \operatorname{sign}(\dot{q}_2 - \dot{Q}_2), \quad \text{если} \quad |\tau| = k \qquad (1.6)$$

Эти условия отличаются от закона Кулона тем, что введенная в (1.6) величина k, характеризующая сцепление среды с поверхностью, не зависит от нормального напряжения.

Следует отметить, что если $k = 0$, то из (1.6) следует: $\tau = 0$, что соответствует условиям проскальзывания. При достаточно больших k $\dot{q}_2 = \dot{Q}_2$, что соответствует условиям прилипания. В этих важных частных случаях задача становится линейной.

Сформулированная задача естественно возникает при изучении действия ударной нагрузки на тело, содержащее жесткое цилиндрическое включение. Ясно, что в зависимости от ситуации могут понадобиться разные сведения о явлении, поэтому представляется целесообразным зафиксировать физическую интерпретацию задачи.

В дальнейшем предполагается, что цилиндр представляет собой датчик напряжений, включенный в неограниченную упругую среду. Чувствительный элемент занимает некоторую часть верхнего основания цилиндра и не влияет на поле напряжения. Предполагается, что измеряемое напряжение лежит между максимальным и минимальным нормальным напряжением, действующим на чувствительный элемент. Целью измерения, очевидно, является получение информации о напряжении в волне, основной интерес представляет отличие измеряемого напряжения от напряжения в падающей волне. Поэтому в дальнейшем основное внимание уделяется изучению влияния параметров задачи на распределение нормальных напряжений на верхнем основании цилиндра.

2. Сформулированная задача решалась численно. Уравнения движения и граничные условия заменялись конечно-разностными соотношениями и полученная система уравнений решалась на БЭСМ-3СМ. Ясно, что при этом решение может быть получено лишь в конечной области. Возмущение, вызванное движением цилиндра, для конечных t распространяется на конечную область, вне которой решение имеет вид

$$u = 0,\ w = f(t - z + H / 2) \qquad (2.1)$$

Представляется естественным вычислять решение в этой области, однако технические характеристики машины не позволили использовать этот способ. Поэтому были введены дополнительные граничные условия при $z = \pm z_0$ и $0 \leqslant r \leqslant R$, $r = R$ и $-z_0 \leqslant z \leqslant z_0$, имитирующие условия на бесконечности. Предполагалось, что на введенной границе возмущенное движение близко к одномерному. Введенная граница обозначается Γ_1 (фиг. 1). Для нормальных и касательных смещений возмущенного движения к новой границе используются прежние обозначения q_1 и q_2, нормаль к границе обозначается l. Если обозначить $C_1 = 1$, $C_2 = \sqrt{\mu}$, то на Γ_1 будут выполняться одномерные уравнения теории упругости

$$q_{\alpha tt} = C_\alpha^2 q_{\alpha ll}, \quad \alpha = 1{,}2 \tag{2.2}$$

В (2.2) нет суммирования по α, индекс l обозначает производную по нормали к Γ_1 и $q_1 = w - f(t - z + H/2)$, $q_2 = u$ на верхнем и нижнем участках границы, $q_1 = u$, $q_2 = w - f(t - z + H/2)$ на боковом участке.

Общее решение любого из уравнений (2.2) состоит из суммы двух произвольных функций, одна из которых описывает уходящую в бесконечность волну, другая — приходящую из бесконечности. Так как возмущенное движение содержит только волны первого типа, то граничные условия должны отсекать волны второго типа. Такими граничными условиями является следующий аналог принципа излучения Зоммерфельда

$$q_{\alpha t} + C_\alpha q_{\alpha l} = 0 \text{ на } \Gamma_1 \quad (\alpha = 1, 2) \tag{2.3}$$

Уравнение (1.3) при $\rho = 0$ вырождается, поэтому оно преобразуется с использованием (1.1) и (1.2) к виду

$$\rho \frac{H}{2} \frac{d^2 w_0}{dt^2} + \iint\limits_{D_1} w_{tt} r\, dr\, dz = \int\limits_{\Gamma_2} r w_z\, dr + \mu r\, w_r\, dz + (1 + \mu)(1 + h/2)(u_a - u_b) \tag{2.4}$$

Здесь h — постоянная, Γ_2 — контур, состоящий из прямых

$$-(H + h)/2 \leqslant z \leqslant (H + h)/2, \qquad r = 1 + h/2,$$

$$z = \pm (H + h)/2, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1 + h/2$$

где D_1 — область, заключенная между Γ и Γ_2, u_a и u_b — значения u в верхнем и нижнем углах Γ_2.

В цилиндрической системе координат возникают условия при $r = 0$, которые из соображений симметрии принимаются в виде

$$u = 0, \ w_r = 0$$

Начальные условия ставились не при $t = 0$, а при $t = H/2 - z_0 < 0$. Они сводятся к тому, что искомые функции и их производные равны нулю при $t = H/2 - z_0$ и $z \leqslant z_0$.

Таким образом, решается система уравнений (1.2) с граничными условиями (1.6), (2.3), (2.4) и нулевыми начальными условиями.

Как обычно, область, заключенная между Γ и Γ_1 разбивается прямыми, параллельными осям координат, на квадраты со стороной h. Все функции вычисляются лишь в узлах полученной сетки и для дискретных значений времени. Предполагается, что Γ и Γ_2 проходят через узлы сетки. Это означает, что $1/h$, H/h, z_0/h, R/h все целые.

Решение вычисляется для последовательных значений t с шагом t_0, начиная с $t = H/2 - z_0 + t_0$.

В дальнейшем аргументы у функций не выписываются, решение для момента времени t называется средним, для $t - t_0$ — нижним, для $t + t_0$ — верхним слоем. Для аппроксимации производных во внутренних точках области на среднем слое вводятся центральные разностные операторы δ_z, δ_{zz}, δ_{zr} по формулам

$$\delta_z f_{ij} = (f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) / 2h \quad \delta_{zz} f_{ij} = (f_{j,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1} / h^2 \quad \delta_{zr} f_{ij} = = (f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j-1} - f_{i,j+1} - f_{i-1,j} / 4h^2 \tag{2.5}$$

Здесь $f(r, z)$ — произвольная функция r и z. Аналогично вводятся операторы δ_r, δ_{rr}, δ_l, δ_{ll}, δ_t, δ_{tt}, только в выражения для двух последних операторов вместо h войдет t_0. Так введенные операторы дают для соответствующих производных аппроксимацию второго порядка.

Так как уравнения (1.2) определены только во внутренних точках области, то для них сразу можно написать разностные аналоги

$$\delta_{tt} u = \mu \delta_{zz} u + \delta_{rr} u + (1 - \mu) \delta_{rz} w + \delta_r u / (hi) - u / (hi)^2 \tag{2.6}$$
$$\delta_{tt} w = \delta_{zz} w + \mu \delta_{rr} w + \mu \delta_r w / (hi) + (1 - \mu) \delta_{rz} u + (1 - \mu) \delta_z u / (hi)$$

Полученные выражения описывают трехслойную явную схему второго порядка точности для системы уравнений (1.2). Для устойчивости схемы необходимо, чтобы выполнялся критерий Куранта [1], поэтому в дальнейшем полагается $t_0 = h / 2$.

Начальные условия для системы уравнений (2.6) сводятся к тому, что все функции равны нулю при $t = H / 2 - z_0 - t_0$ и $t = H / 2 - z_0$.

Граничные условия имеют более сложный характер. Для условий на внешней границе можно использовать центральные разностные отношения, введенные в (2.5). Разностный аналог условий (2.3) имеет вид (суммирования по α нет, l — нормаль к Γ_1)

$$\delta_t q_\alpha + C_\alpha \delta_l q_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_1 \quad (\alpha = 1, 2) \tag{2.7}$$

Так как в (2.7) используются центральные разностные отношения, то в (2.7) входит точка, лежащая вне области. Чтобы исключить эту точку, воспользуемся тем, что q_α на границе удовлетворяют также уравнениям (2.2). Разностная аппроксимация этих уравнений $\delta_{tt} q_\alpha = C_\alpha^2 \delta_{ll} q_\alpha$ содержит ту же лежащую вне рассматриваемой области точку, что и (2.7). Это позволяет исключить эту точку и получить аппроксимацию граничных условий в виде (q_α берутся на среднем слое)

$$2C_\alpha (\delta_t q_\alpha + C_\alpha \delta_l q_\alpha) / h + \delta_{tt} q_\alpha - C_\alpha^2 \delta_{ll} q_\alpha = 0 \tag{2.8}$$

Граничное условие (2.4) аппроксимировалось также с использованием центральных разностных отношений. Входящий в левую часть интеграл имеет порядок h и его можно преобразовать

$$\iint\limits_{D_1} w_{tt} r \, dr \, dz = \frac{h}{2} \frac{d^2 w_0}{dt^2} + \frac{h}{2} \int\limits_{\Gamma_3} w_{tt} \, dz + O(h^2) \tag{2.9}$$

Здесь Γ_3 отрезок $r = 1, -H / 2 < z < H / 2$.

Интегралы по Γ_2 и Γ_3 вычислялись методом трапеций, значения подынтегральных функций брались в точках пересечения Γ_2 и Γ_3 с прямыми сетками. Для соответствующих интегральных сумм употребляется символ Σ. Так как Γ_2 не проходит через узлы сетки, то для аппроксимации первых производных использовались операторы $\delta_z^{1/2}$ и $\delta_r^{1/2}$, аналогичные введенным в (2.5), но с шагом $h / 2$.

Разностный аналог (2.4) имеет вид

$$\frac{\rho(H+h)}{2}\,\delta_{tt}w_0 = \sum_{\Gamma_2} r\,(\delta_z^{1/2}w + \mu\delta_r^{1/2}w) + \frac{h}{2}\sum_{\Gamma_3}\delta_{tt}w +$$

$$+ (1-\mu)\left(1+\frac{h}{2}\right)\frac{u(t,1+h,h+H/2) - u(t,1+h,-h-H/2)}{2} + O(h^2) \tag{2.10}$$

Здесь $\delta_{tt}w$ вычисляются на нижнем слое. При получении (2.10) использовано то обстоятельство, что u_a, u_b и левая часть (2.9) имеют порядок h и для них пригодна аппроксимация первого порядка.

Для остальных граничных условий потребуются односторонние операторы второго порядка, определенные на верхнем слое

$$\delta_z{}^1 f = (4f(z+h) - f(z+2h) - 3f(z))\,/\,2h \tag{2.11}$$

и аналогичные операторы $\delta_r{}^1$, $\delta_l{}^1$ и $\delta_t{}^1$, только в последний вместо h войдет t_0.

Условие при $r = 0$ имеет вид

$$u = 0,\ \delta_r{}^1 w = 0$$

Условие на границе цилиндра $q_1 = Q_1$ остается без изменений, а условие (1.6) принимает вид (l — нормаль к Г, $k_1 = k\,/\,\mu$)

$$\begin{aligned}\delta_t{}^1(q_2 - Q_2) &= 0, \quad \text{если} \quad |\delta_l{}^1 q_2| < k_1 \\ \delta_l{}^1 q_2 &= k_1 \operatorname{sign}\delta_t{}^1(q_2 - Q_2), \quad \text{если} \quad |\delta_l{}^1 q_2| = k_1\end{aligned} \tag{2.12}$$

Полученные условия представляют собой систему нелинейных уравнений для определения q_2 на Г. В каждое из уравнений входит только одна неизвестная, поэтому эта система легко решается. Решение единственно и имеет вид

$$\begin{aligned}q_2 &= -y_1, \quad \text{если} \quad |y_1 + y_2| < k_2 \\ q_2 - y_2 &- k_2 \operatorname{sign}(y_1 + y_2), \quad \text{если} \quad |y_1 + y_2| \geqslant k_2\end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь

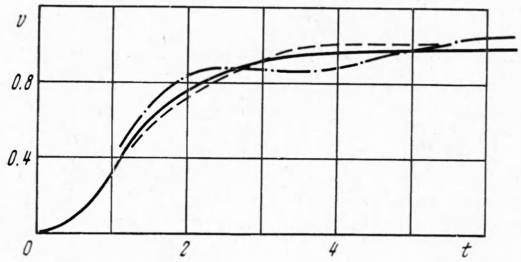
$$k_2 = 2hk_1\,/\,\mu, \quad y_1 = 2h\delta_t{}^1(q_2 - Q_2)\,/\,3 - q_2, \quad y_2 = 2h\delta_l{}^1 q_2\,/\,3 + q_2$$

y_1, y_2 не содержат q_2 на Г.

Таким образом, решение на верхнем слое полностью определено. Переходя от слоя к слою, можно построить решение для любых t.

3. Изложенная схема была реализована в виде программы с несущественными изменениями. Расчет проводился до выхода на статический режим и занимал от 20 до 60 минут, при этом H менялось от 0.5 до 2.0, μ — от 0.1 до 0.5, k — от 0 до 1.0, ρ — от 0.5 до 4.0, T — от 0.5 до 1.0, z_0 — от 2.5 до 5.0, R — от 3.0 до 6.0, h — от 0.1 до 0.2. Таким образом, остался неисследованным только случай больших H. Этот пробел объясняется тем, что при фиксированном шаге по h и r для больших H требуется слишком много точек сетки.

В результате расчетов выяснилось, что наиболее стабильной характеристикой процесса является скорость цилиндра $v(t)$, которая практически не зависит от μ и k и слабо зависит от ρ и H. На фиг. 2 изображена сплошной линией зависимость v от t для $\mu = 0.1$, $k = 0$ и $H = 2.0$, $\rho = 1.0$, $T = 0.25$, $h = 0.2$, $z_0 = 2.5$, $R = 8.0$. Пунктирная кривая соответствует $\mu = 0.5$, $k = 1.0$, штрих-пунктирная — $\mu = 0.5$, $k = 0$, остальные параметры те же. Расчеты проводились для промежуточных случаев ($\mu = 0.2, 0.3, 0.4$ и $k = 0$), различие получилось еще меньшим. Аналогичные результаты получились и для $H = 0.5, 0.8, 1.0, 1.6$. Так как в теории упругости $\mu \leqslant 0.5$ [2], а при $k = 1.0$ проскальзывания не наблюдалось, то можно считать, что для $H \leqslant 2.0$ и ρ — 1.0 скорость движения цилиндра практически не зависит от μ и k.

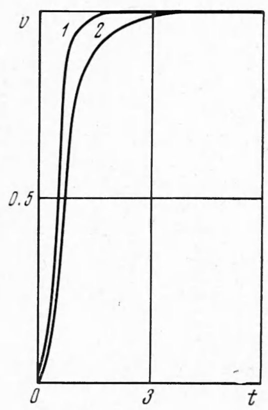


Фиг. 2

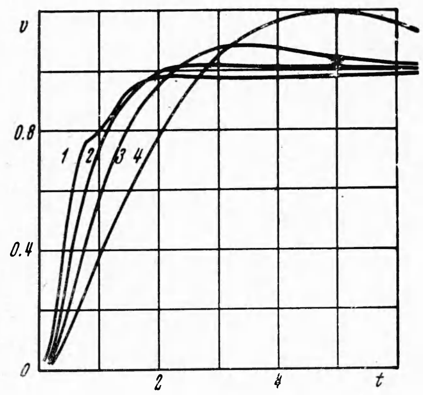
На фиг. 3 и фиг. 4 показана зависимость $v(t)$ от H и ρ. На фиг. 3 кривые *1*, *2* соответствуют $H = 0.5, 1.0$ и $\rho = 0.3$, $\rho = 1.0$, $k = 0$, $T = 0.5$, на фиг. 4 кривые 1, 2, 3, 4, соответствуют $\rho = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0$ и $H = 1.0$. $\mu = 0.3$, $k = 0$, $T = 0.5$.

Видно, что зависимость скорости от H и ρ проявляется отчетливо и соответствует интуитивным представлениям.

Зависимость поля напряжений от параметров задачи проявляется значительно более отчетливо. Существенный интерес в задаче представляет

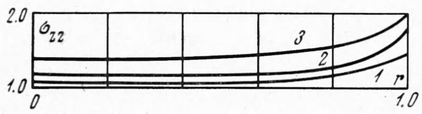


Фиг. 3

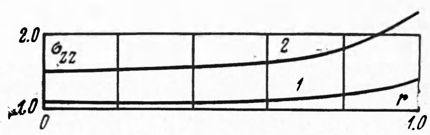


Фиг. 4

σ_{zz} на поверхности цилиндра. На фиг. 5 изображено $\sigma_{zz}(t_1, r, H/2)$, причем t_1 выбрано так, чтобы наступил статический режим. Кривая *1* на этой



Фиг. 5



Фиг. 6

фигуре изображает σ_{zz} как функцию r для $H = 0.5$, кривая *2* — для $H = 1.0$, кривая *3* — для $H = 2.0$, остальные параметры

$$\mu = 0.3, \ \rho = 1.0, \ k = 0$$

На фиг. 6 кривая *1* изображает σ_{zz} для $\mu = 0.1$, кривая *2* — для $\mu = 0.5$, остальные параметры

$$H = 2.0, \ \rho = 1.0, \ k = 0$$

В качестве важного обстоятельства следует отметить, что σ_{zz} на основании цилиндра практически не зависит от k, в то время как σ_{zz} сильно зависит от k на боковой поверхности. Зависимость σ_{zz} в центре верхнего основания цилиндра от k для $\mu = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5$ и $H = 2.0$, $t = \infty$ изображена в табл. 1.

На фиг. 7 изображена зависимость σ_{zz} от z на боковой поверхности цилиндра для $k = 0.1,\ 0.3$ и $H = 2.0$, $\mu = 0.3$.

Зависимость σ_{zz} в центре верхнего основания цилиндра от μ и H для $k = 0.0$, $\rho = 1.0$, $t = \infty$ изображена в табл. 2.

На фиг. 8 приводится зависимость $\sigma_{zz}(t)$ в центре верхнего основания цилиндра для $\mu = 0.1,\ 0.5$ и $H = 2.0$, $\rho = 1.0$, $T = 0.25$.

На фиг. 9—12 представлены распределения напряжения $\sigma_{zz}(r, z, t)$ для фиксированных моментов времени $t = 1.0,\ 1.5,\ 2.0,\ 5.0$ и следующей комбинации параметров:

$$\mu = 0.3,\ k = 1.0,\ \rho = 1.0,\ H = 1.0,\ T = 0.5$$

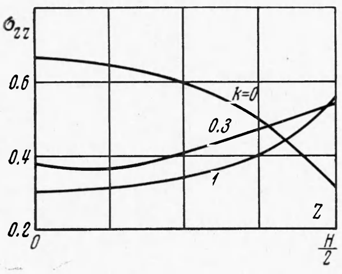
Таблица 1

k	μ				
	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0.0	1.14	1.27	1.36	1.44	1.51
1.0	1.14	1.25	1.34	1.42	1.48

Таблица 2

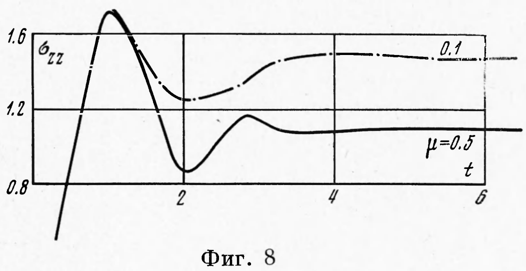
H	μ				
	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0.5	1.03	1.08	1.10	1.12	1.14
0.8	1.03	1.09	1.13	1.16	1.22
1.0	1.05	1.09	1.15	1.21	1.25
1.6	1.10	1.20	1.29	1.35	1.41
2.0	1.14	1.27	1.36	1.44	1.51

Эти фигуры были получены при помощи специальной программы, в которой использовался вывод на АЦПУ-128. По оси ординат отложена координата z, по оси абсцисс — r. Контур цилиндра отмечен штриховкой, причем на фигурах изображена лишь область $|z| \leqslant (H/2 + z_0)/2$, $0.5 \leqslant r \leqslant 1.5$, хотя на АЦПУ выводилась вся область $|z| \leqslant z_0$, $0 \leqslant r \leqslant R$. Цифрами 1, 2, 3, ... отмечены зоны пониженных, а буквами — зоны повышенных напряжений по сравнению с напряжениями в падающей волне. Белые поля, за исключением белого поля перед символом 9 перед фронтом падающей волны на фиг. 9, соответствуют напряжению в падающей волне.

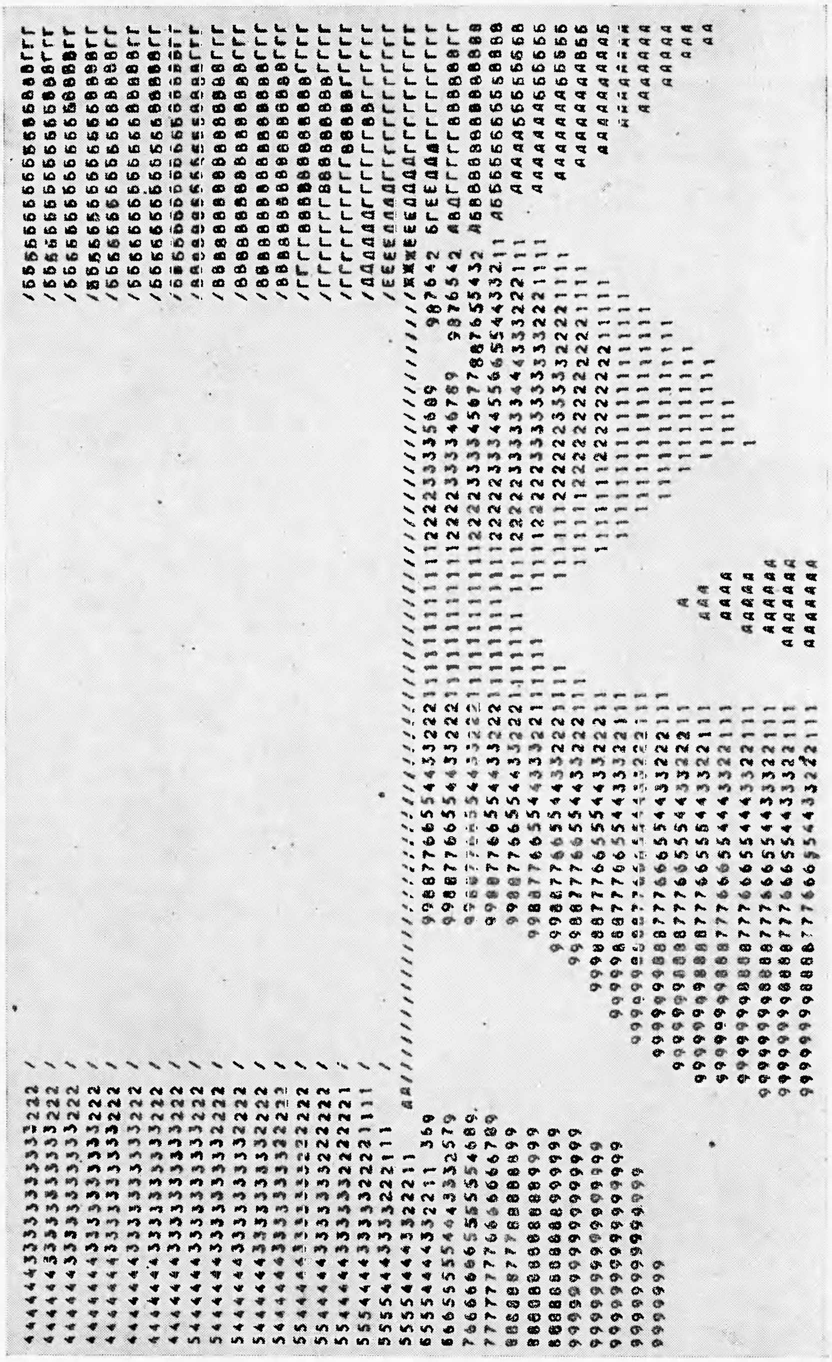


Фиг. 7

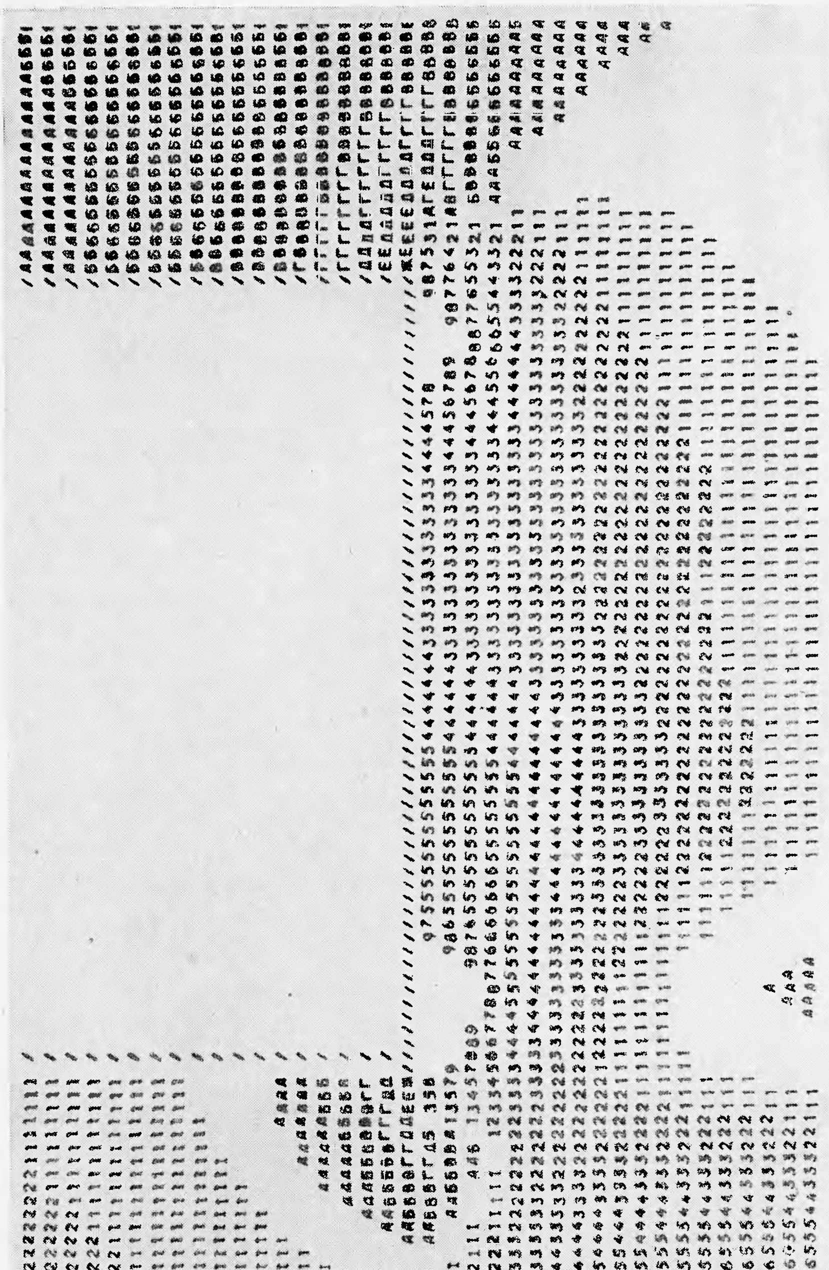
Переход к следующему символу соответствует изменению σ_{zz} на 0.05. В частности, отсутствие символа означает $\sigma_{zz} = 1.0 \pm 0.025$, символ 1 — $\sigma_{zz} = 0.95 \pm 0.025$, символ A — $\sigma_{zz} = 1.05 \pm 0.025$. На фиг. 9 передняя граница фронта волны находится на уровне нижнего основания цилиндра. На центральной части верхнего основания напряжение составляет $\sigma_{zz} = 1.10 \pm 0.025$, которое при $r > 0.5$ с приближением к угловой точке возрастает. Под нижним основанием в центральной части напряжение составляет $\sigma_{zz} = 0.90 \pm 0.025$. В районе угловой точки заметно появление зоны концентрации напряжений (символы A). По боковой поверхности цилиндра ясно заметен неустановившийся характер распределения напряжений. В целом напряжения здесь возрастают от краев к середине боковой поверхности, где $\sigma_{zz} = 0.95 \pm 0.025$.



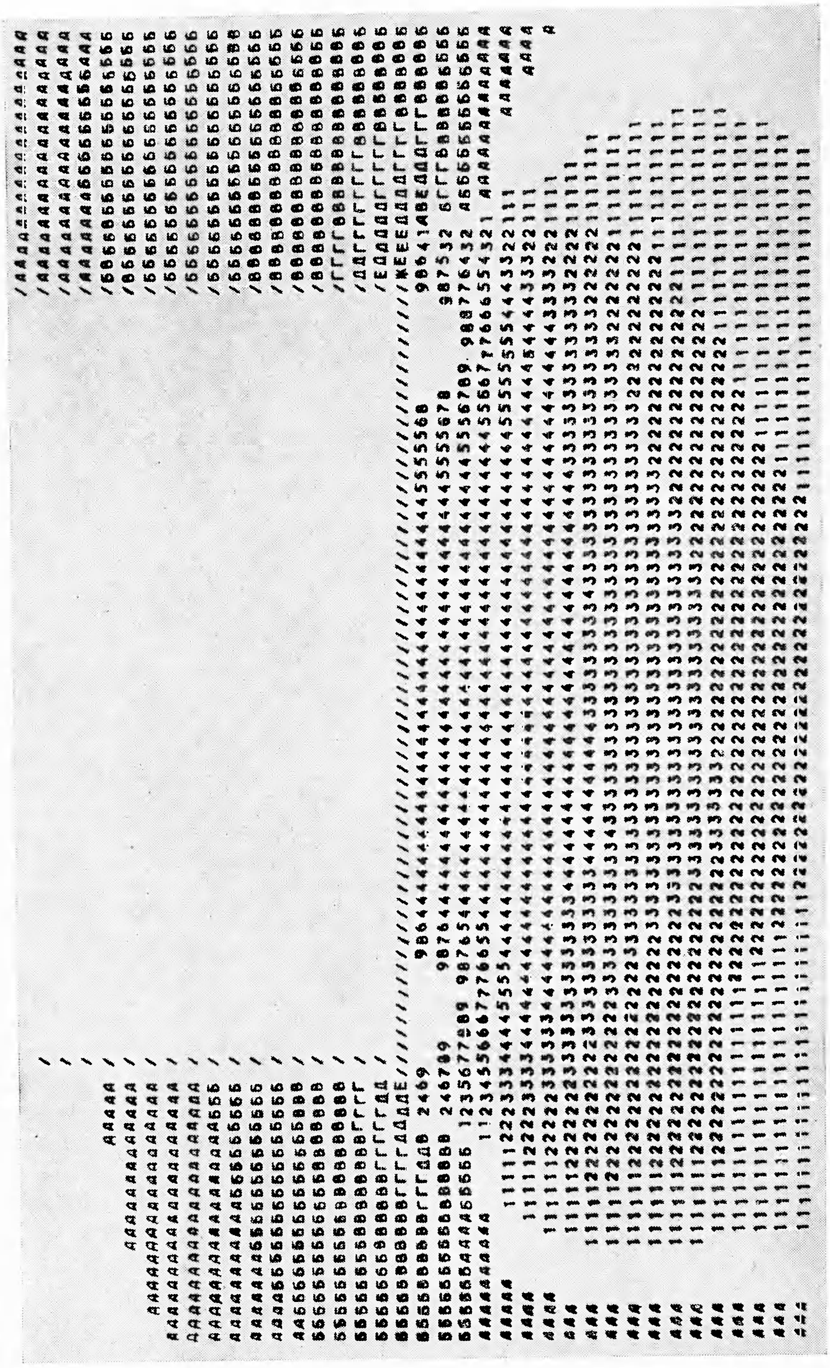
Фиг. 8



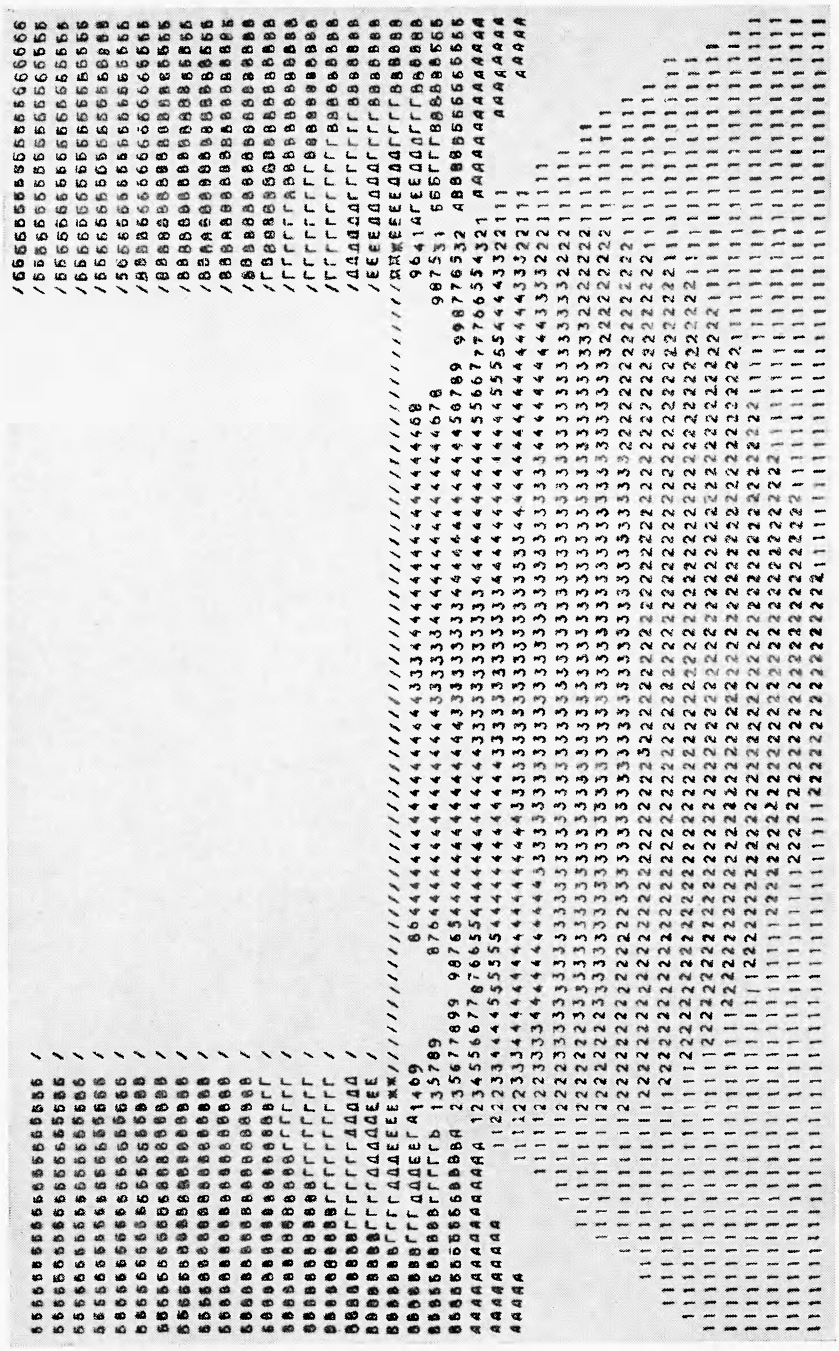
Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12

На фиг. 10 распределение напряжений по боковой поверхности становится более симметричным, однако характер распределения напряжений — возрастание их от краев к центру — сохраняется. В районе угловых точек над верхним и под нижним основаниями цилиндра заметен рост зон концентрации напряжений. Напряжения в центральной части нижнего основания возрастают ($\sigma_{zz} = 0.95 \pm 0.025$).

На фиг. 11 распределение напряжений непосредственно по боковой поверхности близко к установившемуся режиму. Над верхним и под нижним основаниями происходит увеличение зон концентрации напряжений.

Фиг. 12 соответствует установившемуся квазистатическому режиму. Концентрация напряжений по верхнему и нижнему основаниям одинакова и составляет при $0 \leqslant r \leqslant 0.5 \div 0.6$ величину $\sigma_{zz} = 1.10 \pm 0.025$.

Интересно отметить, что в период неустановившегося движения (фиг. 9, 10, 11) эффекты концентрации напряжений в средней части верхнего и нижнего оснований цилиндра меньше ($\sigma_{zz} = 1.05 \pm 0.025$), чем после установления квазистатического состояния (фиг. 12). Это различие, однако, невелико и находится в пределах 0.05 ± 0.025.

Поступила 7 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1961.