

РАЗДЕЛИТЕЛЬНЫЙ СЛОЙ В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОТОКАХ

А. А. Бобнев

(Новосибирск)

При числах Прандтля, меньших или равных единице, в [1] было построено точное решение для высокотемпературного осесимметричного струйного течения. В данной работе показано, что это точное решение приемлемо в диапазоне чисел Прандтля от 1 до 3, но в ограниченной области изменения радиальной координаты.

1. Задача, описывающая истечение высокотемпературной струи из цилиндрического отверстия, в рамках теории пограничного слоя имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \rho \left(v \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho w) = 0, \quad \rho r = 1, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \text{Pr} \rho \left(v \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right);$$

$$(1.2) \quad \partial w / \partial r = v = \partial T / \partial r = 0 \text{ при } r = 0;$$

$$(1.3) \quad w = 0, \quad T = \varepsilon \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

где r, ζ Re — цилиндрические координаты (r, ζ — внутренние координаты в асимптотическом разложении по малому параметру Re^{-1}); $\text{Re} = \sqrt{\rho_m I_{1m} / 2\pi} / \mu_m$ — некоторый аналог числа Рейнольдса; w, v Re — осевая и радиальная составляющие скорости; T — температура; ρ — плотность; $\text{Pr} = c_{pm} \mu_m / \lambda_m$ — число Прандтля. Считаются заданными масштабы температуры T_m , плотности ρ_m , удельной теплоемкости при постоянном давлении c_{pm} , теплопроводности λ_m , динамической вязкости μ_m , полного потока импульса I_{1m} , полного потока энтальпии I_{2m} :

$$I_{1m} = 2\pi \rho_m V_m^2 L_m^2 \int_0^\infty \rho w^2 r dr, \quad I_{2m} = 2\pi c_{pm} \rho_m T_m V_m L_m^2 \int_0^\infty \rho (T - \varepsilon) w r dr.$$

В качестве масштабов скорости и длины выбраны соответственно

$$V_m = c_{pm} T_m I_{1m} / I_{2m}, \quad L_m = I_{2m} / (c_{pm} T_m \sqrt{2\pi \rho_m I_{1m}}).$$

В системе уравнений (1.1) было принято, что динамическая вязкость, теплопроводность, теплоемкость являются постоянными величинами. В задаче (1.1)–(1.3) не поставлены начальные условия при $\zeta = \zeta_0$; это связано с тем, что будут рассматриваться автомодельные решения, пригодные на больших расстояниях от устья струи (или решения для точечного источника). Задачу (1.1)–(1.3) в таком случае необходимо замкнуть интегральными условиями сохранения импульса и потока энтальпии

$$(1.4) \quad \int_0^\infty \rho w^2 r dr = 1, \quad \int_0^\infty \rho w (T - \varepsilon) r dr.$$

В задаче (1.1)–(1.4) целесообразно перейти от переменных r, ζ к переменным x, ξ , где

$$(1.5) \quad x = r / \sqrt{\xi},$$

и вместо функции v ввести s по формуле

$$(1.6) \quad s = \sqrt{\xi} v - (1/2) x w.$$

С помощью выражений (1.5), (1.6) задача (1.1)–(1.4) преобразуется к виду

$$(1.7) \quad \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \hat{\rho} \left(\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + \xi w \frac{\partial w}{\partial \xi} \right),$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x \rho s) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta \rho w) = 0, \quad \rho T = 1,$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \text{Pr} \rho \left(s \frac{\partial T}{\partial x} + \zeta w \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right);$$

$$(1.8) \quad \partial w / \partial x = s = \partial T / \partial x = 0 \text{ при } x = 0;$$

$$(1.9) \quad w = 0, \quad T = \varepsilon \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

$$(1.10) \quad \int_0^\infty \zeta \rho w^2 x dx = 1, \quad \int_0^\infty \zeta \rho w (T - \varepsilon) x dx = 1.$$

Задачу (1.7)—(1.10) будем рассматривать в случае, когда $\varepsilon \ll 1$, т. е. будем исследовать область течения, где температура на оси струи значительно больше температуры на бесконечности. При построении асимптотических разложений, формулировании пределов, постановке граничных условий будут использованы идеи и терминология теории сращиваемых асимптотических разложений (см., например, [2]). Пусть

$$(1.11) \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad x, \zeta \text{ фиксированы.}$$

Тогда можно построить следующие асимптотические разложения решений задачи (1.7)—(1.10), пригодные вблизи границы $r = 0$:

$$(1.12) \quad w(x, \zeta; \varepsilon) = w_0(x, \zeta) + v_{w1}(\varepsilon)w_1(x, \zeta) + v_{w2}(\varepsilon)w_2(x, \zeta) + \dots,$$

$$T(x, \zeta; \varepsilon) = T_0(x, \zeta) + v_{T1}(\varepsilon)T_1(x, \zeta) + \dots, \quad \rho(x, \zeta; \varepsilon) = \rho_0(x, \zeta) + \dots,$$

$$s(x, \zeta; \varepsilon) = s_0(x, \zeta) + v_{s1}(\varepsilon)s_1(x, \zeta) + \dots,$$

здесь

$$(1.13) \quad \frac{v_{w, n+1}(\varepsilon)}{v_{wn}(\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \frac{v_{T, n+1}(\varepsilon)}{v_{Tn}(\varepsilon)} \rightarrow 0, \dots \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Задачу, возникшую в нулевом приближении по ε при подстановке разложений (1.12) в выражения (1.7)—(1.10), будем называть задачей горячего пограничного слоя (температура в этой области значительно выше температуры бесконечности). В этой задаче неизменными остаются система уравнений (1.7) и граничные условия (1.8), нетривиальным решением ее является [1]:

$$(1.14) \quad w_0 = \frac{3 - \text{Pr}}{4\zeta} \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right)^{2/(\text{Pr}-1)}, \quad T_0 = \frac{\text{Pr} + 1}{4\zeta} \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right)^{2\text{Pr}/(\text{Pr}-1)},$$

$$s_0 = \frac{3 - \text{Pr}}{8\zeta} \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right)^{(\text{Pr}+1)/(\text{Pr}-1)},$$

здесь $x_0 = \sqrt{8(\text{Pr} + 1)/[(3 - \text{Pr})(\text{Pr} - 1)]}$. Решения (1.14) пронормированы согласно интегральным условиям (1.10), которые для нулевого приближения асимптотического разложения (1.12) имеют вид

$$(1.15) \quad \int_0^{x_0} \zeta (w_0^2 / T_0) x dx = 1, \quad \int_0^{x_0} \zeta w_0 x dx = 1.$$

Отметим, что решения (1.14) удовлетворяют интегральным условиям (1.15) лишь при $\text{Pr} < 3$. При $\text{Pr} \leq 1$ решения (1.14) приемлемы во всем диапазоне изменения переменной x ($0 \leq x < \infty$). Поэтому следует иметь в виду, что все нижеизложенное относится к интервалу чисел Прандтля $1 < \text{Pr} < 3$.

Решения (1.14) не удовлетворяют граничным условиям (1.9), более того, асимптотическое разложение (1.12) становится неприемлемым уже вблизи поверхности $x = x_0$. В самом деле, на этой поверхности температура в нулевом приближении по ε в разложении (1.12) равна нулю, а согласно граничному условию (1.9) температура даже на бесконечности равна

ε , т. е. больше нуля, или нулевое приближение для температуры в разложении (1.12) становится меньше последующих, что противоречит принципам построения асимптотических разложений (1.13). Следовательно, если предположить, что автомодельное решение справедливо в окрестности границы $r = 0$, то вблизи поверхности $x = x_0$ необходимо построить другое асимптотическое разложение задачи (1.7)–(1.10), причем в этом разложении нулевой член для температуры по порядку величины должен быть равен ε .

2. Построим асимптотическое разложение решений задачи (1.7)–(1.10), пригодное у поверхности $x = x_0$, т. е. предположим, что вблизи поверхности $x = x_0$ существует тонкий (по сравнению с толщиной горячего пограничного слоя) слой (область резкого градиента функций). Этот слой будем в дальнейшем называть разделительным (он отделяет высокотемпературную область течения сжимаемого газа с температурой $T \sim 1$ от области течения холодного несжимаемого газа с температурой $T \sim \varepsilon$). Сформулируем предельный процесс для разделительного слоя:

$$(2.1) \quad y = (x - x_0)/\tilde{\delta}(\varepsilon), \quad \zeta \text{ фиксированы; } \tilde{\delta}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

здесь $\tilde{\delta}(\varepsilon)$ можно интерпретировать как величину, характеризующую толщину разделительного слоя. Асимптотическое разложение решений задачи (1.7)–(1.10) можно представить в виде

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w(r, \zeta; \varepsilon) &= \tilde{v}_w(\varepsilon)\tilde{w}(y, \zeta) + \tilde{v}_{w1}(\varepsilon)\tilde{w}_1(y, \zeta) + \dots, \\ T(r, \zeta; \varepsilon) &= \varepsilon\tilde{T}(y, \zeta) + \tilde{v}_{T1}(\varepsilon)\tilde{T}_1(y, \zeta) + \dots, \\ s(r, \zeta; \varepsilon) &= \tilde{v}_s\tilde{s}(y, \zeta) + \tilde{v}_{s1}(\varepsilon)\tilde{s}_1(y, \zeta) + \dots, \\ \rho(r, \zeta; \varepsilon) &= \varepsilon^{-1}\tilde{\rho}(y, \zeta) + \tilde{v}_{\rho1}(\varepsilon)\tilde{\rho}_1(y, \zeta) + \dots, \end{aligned}$$

где $\tilde{v}_{wn}(\varepsilon)$, $\tilde{v}_{Tn}(\varepsilon)$, $\tilde{v}_{sn}(\varepsilon)$, $\tilde{v}_{\rho n}(\varepsilon)$ удовлетворяют соотношениям, аналогичным (1.13), а нулевой индекс у нулевых членов опущен. Функции малого параметра \tilde{v}_w , \tilde{v}_s , $\tilde{\delta}$ в выражениях (2.2), (2.1) определим из условия сращения асимптотического разложения для разделительного слоя с разложением для горячего пограничного слоя (1.12). Для этого сформулируем предел, промежуточный между пределом горячего пограничного слоя (1.11) и пределом разделительного слоя (2.1). Пусть

$$(2.3) \quad \kappa \rightarrow 0, \quad \varepsilon/\kappa \rightarrow 0, \quad \tilde{\delta}(\varepsilon)/\tilde{\delta}(\kappa) \rightarrow 0, \quad y_\kappa = (x - x_0)/\tilde{\delta}(\kappa), \quad \zeta \text{ фиксированы} \\ \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

здесь $y_\kappa < 0$. Тогда, сращивая (2.2) и (1.11) на промежуточном пределе (2.3), имеем

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{3 - \text{Pr}}{4\zeta} \left(\frac{2}{x_0}\right)^a [-y_\kappa \tilde{\delta}(\kappa)]^a + O[\tilde{\delta}^{a+1}(\kappa)] &= \tilde{v}_w(\varepsilon) \tilde{w} \left(\frac{y_\kappa \tilde{\delta}(\kappa)}{\tilde{\delta}(\varepsilon)}, \zeta \right) + \\ &+ O[\tilde{v}_{w1}(\varepsilon)], \\ \frac{\text{Pr} + 1}{4\zeta} \left(\frac{2}{x_0}\right)^{a+2} [-y_\kappa \tilde{\delta}(\kappa)]^{a+2} + O[\tilde{\delta}^{a+3}(\kappa)] &= \varepsilon \tilde{T} \left(\frac{y_\kappa \tilde{\delta}(\kappa)}{\tilde{\delta}(\varepsilon)}, \zeta \right) + \\ &+ O[\tilde{v}_{T1}(\varepsilon)], \\ -\frac{3 - \text{Pr}}{2} \frac{x_0}{\zeta} \left(\frac{2}{x_0}\right)^{a+1} [-y_\kappa \tilde{\delta}(\kappa)]^{a+1} + O[\tilde{\delta}^{a+2}(\kappa)] &= \\ &= \tilde{v}_s(\varepsilon) \tilde{s} \left(\frac{y_\kappa \tilde{\delta}(\kappa)}{\tilde{\delta}(\varepsilon)}, \zeta \right) + O[\tilde{v}_{s1}(\varepsilon)], \end{aligned}$$

где $a = 2/(\text{Pr} - 1)$. Откуда последовательно можно получить

$$(2.5) \quad \tilde{\delta} = \varepsilon^{(\text{Pr}-1)/(2\text{Pr})}, \quad \tilde{v}_w = \varepsilon^{1/\text{Pr}}, \quad \tilde{v}_s = \varepsilon^{(\text{Pr}+1)/(2\text{Pr})}.$$

Отметим, что величины w и v , как следует из формулы (1.6), в нулевом приближении по ε в разложении (2.2) одного порядка малости $v \sim w \sim \varepsilon^{1/Pr}$, а функция $s \sim \varepsilon^{(Pr+1)/(2Pr)}$, т. е. s убывает быстрее, чем v и w при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому, если бы при построении асимптотических разложений в качестве исходной была рассмотрена задача (1.1)–(1.4), то для осуществления успешной процедуры сращивания недостаточно было бы использовать только нулевые члены разложений. Преобразование же (1.6), (1.5) устранило эту трудность.

Подставив ряды (2.2) в задачу (1.7)–(1.9) и имея в виду выражения (2.1), (2.5), получим в нулевом приближении по ε систему уравнений разделительного слоя

$$(2.6) \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} = \tilde{\rho} \left(\tilde{s} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \zeta \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{\rho} \tilde{s}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta \tilde{\rho} \tilde{w}) = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y^2} = \text{Pr} \tilde{\rho} \left(\tilde{s} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \zeta \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} \right), \quad \tilde{\rho} \tilde{T} = i.$$

Граничные условия для системы уравнений (2.6) получаются из условия сращивания (2.2) и (1.11) на промежуточном пределе (2.3) (см. (2.4)):

$$(2.7) \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} [(-y)^{-a} \tilde{w}(y, \zeta)] = \frac{3 - \text{Pr}}{4\zeta} \left(\frac{2}{x_0} \right)^a,$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} [(-y)^{-a-2} \tilde{T}(y, \zeta)] = \frac{1 + \text{Pr}}{4\zeta} \left(\frac{2}{x_0} \right)^{a+2}, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} [(-y)^{-a-1} \tilde{s}(y, \zeta)] =$$

$$= -\frac{3 - \text{Pr}}{\zeta} \left(\frac{2}{x_0} \right)^a,$$

а при $y \rightarrow +\infty$ — из условий (1.9):

$$(2.8) \quad \tilde{w} = 0, \quad \tilde{T} = 1 \quad \text{при } y \rightarrow +\infty.$$

Задача (2.6)–(2.8) допускает автомодельное решение. Введем новые функции и новые переменные по формулам

$$(2.9) \quad \tilde{w}(y, \zeta) = \zeta^{\tilde{\alpha}_w} \tilde{u}(\eta), \quad \tilde{T}(y, \zeta) = \zeta^{\tilde{\alpha}_T} \tilde{\theta}(\eta), \quad \tilde{s}(y, \zeta) = \zeta^{\tilde{\alpha}_s} \tilde{f}(\eta), \quad y = \eta \zeta^{\tilde{\alpha}}.$$

Из пограничного условия (2.8) для температуры следует, что

$$(2.10) \quad \tilde{\alpha}_T = 0,$$

а из граничных условий (2.7) можно получить три уравнения

$$(2.11) \quad -1 = -(a+2)\tilde{\alpha}, \quad -1 = \tilde{\alpha}_w - a\tilde{\alpha}, \quad -1 = \tilde{\alpha}_s - (a+1)\tilde{\alpha}.$$

Отметим, что из системы уравнений (2.6) можно получить условия автомодельности $\tilde{\alpha}_w = -2\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}_s = \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}_w$, однако эти условия являются следствием системы уравнений (2.11). Из уравнений (2.11) можно найти

$$(2.12) \quad \tilde{\alpha} = (\text{Pr} - 1)/(2\text{Pr}), \quad \tilde{\alpha}_w = -(\text{Pr} - 1)/\text{Pr}, \quad \tilde{\alpha}_s = -(\text{Pr} - 1)/(2\text{Pr}).$$

Подставив выражения (2.9) в задачу (2.6)–(2.8) и имея в виду (2.10)–(2.12), получим систему уравнений

$$(2.13) \quad \tilde{u}'' = \tilde{g}\tilde{u}' + \tilde{\alpha}_w \tilde{u}^2/\tilde{\theta}, \quad \tilde{g}' = -\tilde{\gamma}\tilde{u}/\tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta}'' = \text{Pr} \tilde{g}\tilde{\theta}'$$

с граничными условиями

$$(2.14) \quad \lim_{\eta \rightarrow -\infty} [(-\eta)^{-a} \tilde{u}] = \frac{3 - \text{Pr}}{4} \left(\frac{2}{x_0} \right)^a, \quad \lim_{\eta \rightarrow -\infty} [(-\eta)^{-a-2} \tilde{\theta}] = \frac{1 + \text{Pr}}{4} \left(\frac{2}{x_0} \right)^{a+2},$$

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} [(-\eta) \tilde{g}] = -(\text{Pr} + 1)/[\text{Pr}(\text{Pr} - 1)]; \quad \tilde{u} = 0, \quad \tilde{\theta} = 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow +\infty,$$

здесь штрих означает производную по η , $\tilde{g}(\eta) = \tilde{f} - \tilde{\alpha}\tilde{u}\tilde{f}$, $\tilde{\gamma} = (\text{Pr} + 1)/(2\text{Pr})$. Система уравнений (2.13) допускает степенные решения вида

$$(2.15) \quad \tilde{u} = A(B\eta)^{\tilde{a}}, \quad \tilde{\theta} = \frac{A \text{Pr} \tilde{\gamma}}{\tilde{a} + 1} (B\eta)^{\tilde{a} + 2}, \quad \tilde{g} = \frac{\tilde{a} + 1}{\text{Pr} \eta},$$

где A, B — произвольные постоянные, а величина \tilde{a} является одним из корней кубического уравнения

$$(2.16) \quad (\text{Pr} - 1) \tilde{\gamma} \tilde{a}^3 + [(\text{Pr} - 3) \tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}_w] \tilde{a}^2 - [2\tilde{\gamma}(\text{Pr} + 1) - 3\tilde{\alpha}_w] \tilde{a} - 2\tilde{\alpha}_w = 0.$$

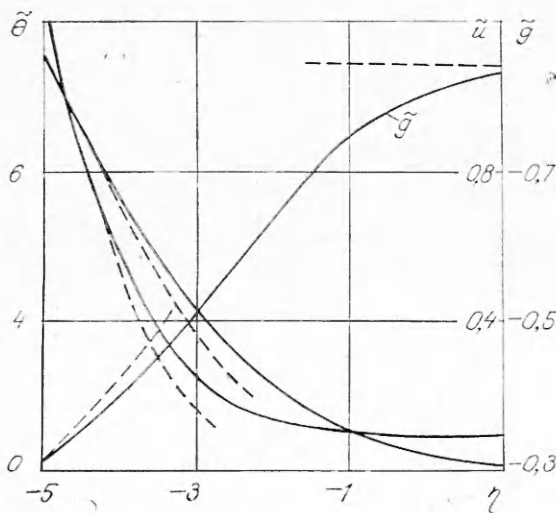
Можно показать, что при $\tilde{a} = a = 2/(\text{Pr} + 1)$ уравнение (2.16) обращается в тождество, т. е. уравнение (2.16) относительно неизвестных $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\alpha}_w$ становится линейно зависимым от первых двух уравнений системы (2.11). Следовательно, решения (2.15) при $\tilde{a} = a$, выбрав соответствующим образом постоянные A и B , можно интерпретировать как асимптотические решения задачи (2.13), (2.14) при $\eta \rightarrow -\infty$.

Решения задачи (2.13), (2.14) при $\eta \rightarrow +\infty$ устремляются к асимптотике

$$(2.17) \quad \tilde{u} = C_1 \exp(\tilde{g}_\infty \eta), \quad \tilde{\theta} = 1 + C_2 \exp(\tilde{g}_\infty \eta), \quad g = \tilde{g}_\infty = \text{const} < 0,$$

где C_1, C_2 — некоторые постоянные.

Задача (2.13), (2.14) была решена численно для разных чисел Прандтля. На фиг. 1 изображены кривые $\tilde{u}(\eta), \tilde{\theta}(\eta), \tilde{g}(\eta)$ при $\text{Pr} = 2$. При численном интегрировании краевые условия ставились на некотором большом, но конечном расстоянии. Варьируя это расстояние, можно было судить о точности расчета при замене сингулярных краевых условий на краевые условия на конечном интервале. Проверочные расчеты позволяют надеяться, что расчетная точность нанесенных на фиг. 1 кривых не ниже, чем точность их графического построения. Отметим, что задача (2.13), (2.14) инвариантна к замене переменной $\eta \rightarrow \eta - \eta_0$, где η_0 — произвольная постоянная (аналогичное замечание можно сделать и для задачи (2.6)–(2.8)). Величину η_0 можно определить из условий сращивания последующих членов разложений (1.12) и (2.2). Для кривых фиг. 1 величину η_0 выбрали из условия $\tilde{u}(0) = 0,05$. Из фиг. 1 видно, что при $\eta \rightarrow +\infty$ кривые весьма удовлетворительно стремятся к асимптотикам, описываемые формулами (2.15), (2.17) (асимптоты нанесены штриховыми линиями). Отметим, что величина радиальной скорости претерпевает в разделительном слое любопытные изменения. Так, на внутренней границе разделительного слоя ($y \rightarrow -\infty$) $v \sim w \sim \varepsilon^{1/\text{Pr}}$, а на внешней ($y \rightarrow +\infty$) $v \sim w \sim \varepsilon^{(\text{Pr}+1)/2\text{Pr}}$ (см. формулы (1.6), (2.2), (2.5), (2.17)), т. е. с уменьшением величины ε радиальная скорость на внешней границе разделительного слоя убывает значительно быстрее, чем на внутренней.



Ф и г. 1

3. Поскольку задача (1.1)–(1.4) цилиндрически-симметричная, то можно ожидать, что решения для w, v будут затухать при $r \rightarrow \infty$ (ζ фиксировано). Однако из решения задачи для разделительного слоя следует, что радиальная скорость вне этого слоя ($y \rightarrow +\infty$) не зависит от y (необходимо помнить, что \tilde{w} убывает при $y \rightarrow +\infty$ экспоненциально, а также обратиться к определению функции $g(\eta)$). В связи с этим для области $x > x_0$ целесообразно сформулировать предельный процесс в виде

$$(3.1) \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad x, \zeta \text{ фиксированы,}$$

и построить соответствующие асимптотические разложения решений задачи (1.7)—(1.10) по малому параметру ε , которые имеют вид

$$(3.2) \quad \begin{aligned} w(x, \zeta; \varepsilon) &= \bar{v}_w(\varepsilon)\bar{w}(x, \zeta) + \bar{v}_{w1}(\varepsilon)\bar{w}_1(x, \zeta) + \dots, \\ T(x, \zeta; \varepsilon) &= \varepsilon + \bar{v}_{T1}(\varepsilon)\bar{T}_1(x, \zeta) + \dots, \\ s(x, \zeta; \varepsilon) &= \varepsilon^{(Pr+1)/2Pr}\bar{s}(x, \zeta) + \bar{v}_{s1}(\varepsilon)\bar{s}_1(x, \zeta) + \dots, \\ \rho(x, \zeta; \varepsilon) &= \varepsilon^{-1} + \bar{v}_{\rho1}(\varepsilon)\bar{\rho}_1(x, \zeta) + \dots, \end{aligned}$$

где $\bar{v}_w(\varepsilon) = O(\bar{v}_s(\varepsilon))$, а нулевой индекс у нулевых членов опущен.

При построении разложений (3.2), которые в дальнейшем будем называть разложениями холодного пограничного слоя, для определения вида нулевых членов $\bar{v}_w(\varepsilon)$, $\bar{v}_T(\varepsilon)$, $\bar{v}_s(\varepsilon)$ были использованы следующие рассуждения. Из разложения задачи (1.7)—(1.10) для разделительного слоя (2.2), формул (2.5) и поведения этих решений при $y \rightarrow +\infty$ следует, что температура и функция s становятся постоянными (не зависящими от y) величинами, равными соответственно ε и $\varepsilon^{(Pr+1)/2Pr}\zeta^{-(Pr-1)/2Pr}\tilde{g}_\infty$, где \tilde{g}_∞ — некоторая постоянная, известная из решения задачи (2.13), (2.14). Следовательно, для успешной реализации процедуры сращивания необходимо положить $\bar{v}_T(\varepsilon) = \varepsilon$, $\bar{v}_s(\varepsilon) = \varepsilon^{(Pr+1)/2Pr}$, причем физическая интуиция подсказывает, что температура является монотонной функцией r или x (отсутствие источников и стоков тепла); значит, для области $x > x_0$ $\bar{T}(x, \zeta) = 1$, что не противоречит уравнению сохранения энергии. Величину $\bar{v}_w(\varepsilon)$ следует положить малой по сравнению с $\bar{v}_s(\varepsilon)$, так как в случае $\bar{v}_w = \bar{v}_s$ получим в нулевом приближении по ε систему уравнений

$$(3.3) \quad \bar{s} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \zeta \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x \bar{s}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta \bar{w}) = 0.$$

Можно показать, что для системы (3.3) существуют решения, удовлетворяющие условиям сращивания и убывающие при $x \rightarrow \infty$. Однако эти решения убывают недостаточно быстро, и интеграл $\int_{x_0}^{\infty} \bar{w}^2 dx$ не существует.

Таким образом, асимптотическое разложение для осевой скорости в холодном пограничном слое должно начинаться с члена, меньшего порядка малости, чем $\varepsilon^{(Pr+1)/2Pr}$. Функция $\bar{v}_w(\varepsilon)$ определится, по-видимому, при сращивании последующих членов разложений для разделительного и холодного пограничного слоев.

Подставив асимптотические разложения (3.2) в систему уравнений (1.7) и имея в виду определение предельного процесса в форме (3.1), получим в нулевом приближении по ε уравнение для \bar{s}

$$(3.4) \quad \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x \bar{s}) = 0.$$

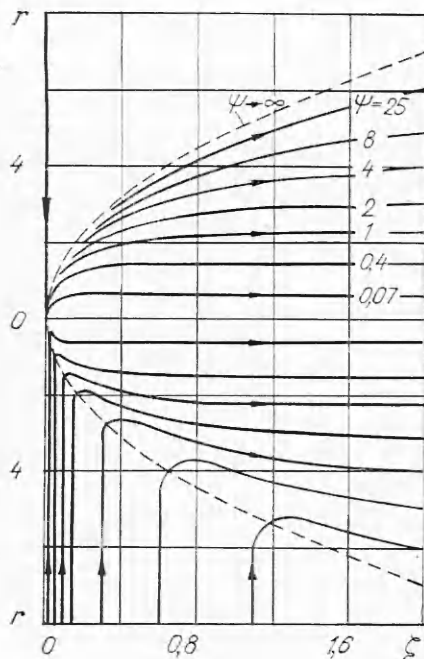
Граничное условие для уравнения (3.4) можно получить при сращивании разложений функции s для холодного пограничного слоя с разложениями для разделительного слоя

$$(3.5) \quad \bar{s}|_{x=x_0} = \tilde{g}_\infty \zeta^{\tilde{\alpha}_s},$$

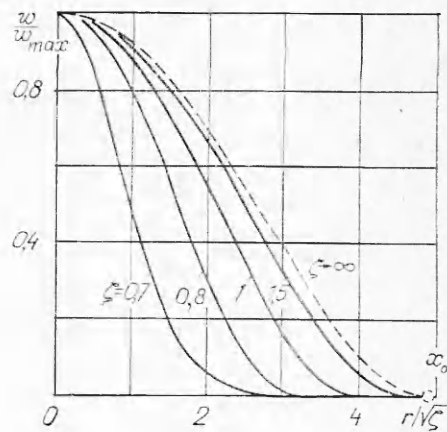
здесь величина \tilde{g}_∞ считается известной из решения задачи (2.13), (2.14). Решение задачи (3.4), (3.5) очевидно

$$(3.6) \quad \bar{s} = \tilde{g}_\infty \zeta^{\tilde{\alpha}_s} x_0/x.$$

В связи с тем, что $\bar{v}_w(\varepsilon) = o(\bar{v}_s(\varepsilon))$, функцию \bar{s} для холодного пограничного слоя можно отождествлять с $\sqrt{\zeta v}$ (см. формулу (1.6)), т. е. в холодном



Ф и г. 2



Ф и г. 3

пограничном слое течение газа, как следует из формулы (3.6), реализуется лишь вдоль радиуса. Таким образом, задача (1.7)—(1.11) в нулевом приближении по ϵ решена.

Для иллюстрации течения в высокотемпературной струе введем функцию тока

$$(3.7) \quad \psi = \int_0^r \rho w r dr.$$

Тогда для линии тока можно получить в области $r < x_0 \sqrt{\xi}$ выражение

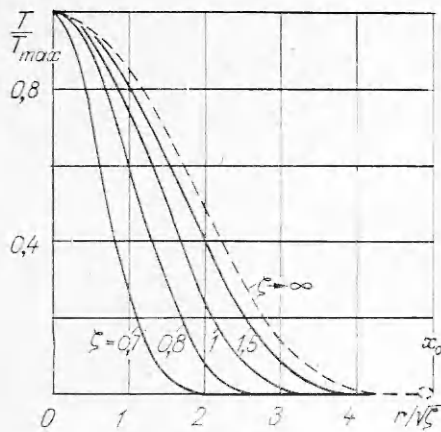
$$(3.8) \quad r^2 = -\frac{2(\text{Pr} + 1)}{3 - \text{Pr}} \frac{4\psi\xi}{4\xi + (\text{Pr} - 1)\psi}.$$

Из формулы (3.8) следует, что при $\xi \rightarrow \infty$ линии тока становятся параллельными оси ξ ($r^2 = 2(\text{Pr} + 1)\psi/(3 - \text{Pr})$), а при $\psi \rightarrow \infty$ течение осуществляется вдоль поверхности раздела $r = x_0 \sqrt{\xi}$, т. е. течение газа вне этой поверхности отсутствует.

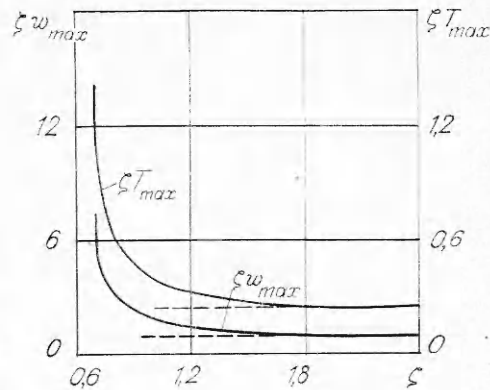
Картина линий тока, определяемая по формуле (3.8), изображена на верхней части фиг. 2. Отметим, что линии тока будут иметь такой вид лишь при $\epsilon \rightarrow 0$. При малых, но конечных величинах ϵ картина линий тока будет иной. Формула (3.8) вблизи поверхности $r = x_0 \sqrt{\xi}$ становится неприемлемой. Для нахождения функции тока в этом случае в формулу (3.7) необходимо подставлять значения соответствующих функций для разделительного слоя (вблизи поверхности $r = x_0 \sqrt{\xi}$) или холодного пограничного слоя (вне поверхности $r = x_0 \sqrt{\xi}$). Картина линий тока при малом, но конечном значении схематично изображена на нижней части фиг. 2. В этом случае линии тока на расстояниях от оси струи, чуть больших, чем толщина горячего пограничного слоя, становятся параллельными координатному направлению r , т. е. холодный газ из бесконечности вовлекается в движение вдоль радиуса, нагрев его и изменение направления движения происходят лишь в области разделительного слоя. Отметим, что по мере уменьшения ϵ линии тока вне поверхности $r = x_0 \sqrt{\xi}$ будут сплющиваться вдоль плоскости $\xi = 0$ и при $\epsilon \rightarrow 0$ все линии тока (при $r > x_0 \sqrt{\xi}$) сольются в одну $\xi = 0$, как это изображено на верхней части фиг. 2.

С целью проверки правильности полученного решения был проведен численный эксперимент. Задача (1.1)—(1.3) была дополнена условием

$$(3.9) \quad w = w^0(r), \quad T = T^0(r) \quad \text{при} \quad \xi = \xi_0$$



Ф и г. 4



Ф и г. 5

и решена численно при разных значениях ε , числа Прандтля и разных вариантах задания начальных условий (3.9). На фиг. 3, 4 изображены относительные профили осевой скорости и температуры (w_{\max} , T_{\max} — значения соответственно скорости и температуры на оси струи) при разных значениях ζ (эти значения помечены цифрами у соответствующих кривых), а на фиг. 5 нанесены значения произведения продольной координаты ζ и скорости (температуры) на оси как функции ζ . Из поведения кривых фиг. 3—5 видно, что профили скорости и температуры при увеличении ζ весьма быстро становятся автомодельными. Расчет этих кривых производился при начальных условиях (3.9) в виде

$$w = 2 \exp(-r^2), \quad T = 10,6 \exp(-1,935r^2) + 3,45 \cdot 10^{-5} \quad \text{при } \zeta = 0,7$$

и при $\text{Pr} = 2$, $\varepsilon = 3,45 \cdot 10^{-5}$. В связи с инвариантностью решений задачи по отношению к замене переменных $\zeta \rightarrow \zeta - \zeta_0$ (ζ_0 — произвольная постоянная) величина ζ_0 ($\zeta_0 = 0,7$) подбиралась из условия минимума разности решений задачи (1.1)—(1.3), (3.9) и автомодельного решения (1.14).

В заключение необходимо высказать некоторые соображения о терминологии, применяемой в данной работе. Строго говоря, для задачи (1.7)—(1.10) при $\varepsilon \rightarrow 0$ не возникает пограничного слоя (ни холодного, ни горячего). Область неравномерной пригодности асимптотических разложений решений этой задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ локализуется не вблизи границы (пограничный слой), а внутри промежутка интегрирования $0 \leq r < \infty$. Обычно такая ситуация возникает при рассмотрении неравномерностей типа внутреннего пограничного слоя [3]. Однако для подобного рода неравномерностей характерно, что внутренний пограничный слой определяется: 1) для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, причем под сингулярными возмущениями обычно понимают повышение порядка возмущенной системы; 2) для краевых задач, граничные условия которых заданы на конечном интервале. Для задачи в частных производных (1.7)—(1.10) отличный от нуля параметр ε не вносит в задачу возмущений, которые обычно называют сингулярными. Источником неравномерности разложений (1.12) решений задачи (1.7)—(1.10) является наличие бесконечной границы. Для сингулярных краевых задач нельзя произвольным образом задавать граничные условия. Условия на бесконечно удаленной границе должны удовлетворять системе уравнений (1.7). В случае же постановки граничных условий вида

$$3.10) \quad w \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

в системе уравнений (1.7) возникает неопределенность типа 0/0. Напротив, при $\text{Pr} < 1$ асимптотическими решениями задачи (1.7)—(1.10) при

$x \rightarrow \infty$ будут

$$w = \frac{3 - \text{Pr}}{4\zeta} \left[\frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(\text{Pr} + 1)} x^2 \right]^{-2/(1 - \text{Pr})}, \quad T = \frac{\text{Pr} + 1}{4\zeta} \left[\frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(\text{Pr} + 1)} x^2 \right]^{-2\text{Pr}/(1 - \text{Pr})},$$

т. е. при $\text{Pr} < 1$ в системе уравнений (1.7) возможна подстановка условий (3.10), а вот при $\text{Pr} > 1$ условия (3.10) будут непригодны. Необходимо помнить также, что рассмотренная задача (1.7) — (1.10) сама является нулевым приближением в асимптотическом разложении по малому параметру Re^{-1} , и поэтому область неравномерности разложений (1.12) располагается в пограничном слое. Поэтому обнаруженная область неравномерности, на наш взгляд, относится к новому классу, и названа разделительным слоем.

При численных расчетах для задачи (2.13), (2.14) использовался метод прогонки с итерациями, для задачи (1.4) — (1.3), (3.9) — метод [4]. Точность расчета кривых не ниже точности их графического изображения.

• Автор выражает благодарность М. А. Гольдштику, В. В. Пухначеву, В. Н. Штерну за участие в обсуждении результатов работы.

Поступила 26 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобнев А. А. Точное решение высокотемпературного струйного течения. — ПМТФ, 1982, 5.
2. Коул Дж. Методы возмущения в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
3. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
4. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1962.

УДК 532.135 + 532.522 + 532.52

О СОУДАРЕНИИ ПЛОСКИХ СТРУЙ ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

М. В. РУБЦОВ

(Новосибирск)

Экспериментальные исследования явления плоской кумуляции показывают, что теория процесса, основанная на модели идеальной жидкости [1, 2], нуждается в усовершенствовании. Используемая в [3] модель ньютоновской жидкости, качественно объясняя некоторые экспериментальные закономерности, при описании процесса в целом сталкивается с затруднениями [4]. Эти затруднения связаны, с одной стороны, с тем, что рассчитанные по модели вязкой жидкости (с постоянной вязкостью) скорость кумулятивной струи и форма меченой линии в пластинах совпадают в одном и том же опыте с соответствующими экспериментальными характеристиками при существенно различных числах Рейнольдса: в кумулятивной струе совпадение достигается при $\text{Re} \approx 350$, в соударяющихся пластинах $\text{Re} \approx 25$. Таким образом, эффективная вязкость в струе и пластинах оказывается различной, что противоречит первоначальному предположению о постоянной вязкости. С другой стороны, в заданном режиме соударения (заданы скорость, толщина, плотность пластин) вязкость не может быть определена до опыта; она определяется в опытах совпадением расчетных и экспериментальных характеристик и, вообще говоря, изменяется в зависимости от условий эксперимента. Следовательно, эффективная вязкость не является объективной характеристикой материала. Выбор такого объективного параметра был бы весьма желательным. Для преодоления затруднений надо использовать более сложные реологические законы.

В данной работе предлагается описывать реальный процесс на основе модели степенной псевдопластической жидкости, параметры которой подбираются из независимых измерений динамической пластичности металлов.

1. Выбор реологического соотношения $\sigma = \sigma(\epsilon, T)$. Как показано в [4], эффективные числа Рейнольдса в кумулятивной струе Re^0 и в пестовой струе Re_* отличаются примерно на порядок: $\text{Re}^0 \approx 350$, $\text{Re}_* \approx 25$. Естественно попытаться поэтому найти другую характеристику, которая меняется в одном и том же процессе незначительно. С этой целью оценим характерные сдвиговые напряжения в струе и песте по соотношению $\sigma = 2\mu\epsilon$.