

4. Черняк В. Г., Калинин В. В., Суетин П. Е. К теории неизотермического движения газа в плоском канале.— ИФЖ, 1979, т. 36, № 6.
5. Черняк В. Г., Калинин В. В., Суетин П. Е. К теории термомолекулярного давления и механокалорического эффекта в цилиндрическом канале.— ИФЖ, 1979, т. 37, № 1.
6. Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ, 1961.
7. Waldmann L., Schmitt K. H. Über das bei der Gasdiffusion auftretende Druckgefälle.— Z. Naturforsch., 1961, Ser. A, Bd 16, S. 1343.
8. Тарин А. А. Исследование диффузионного разделения и проводимости газовых смесей в капилляре при их истечении в вакуум. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Свердловск: изд. УПИ, 1978.
9. Селезнев В. Д., Суетин П. Е., Смирнов Н. А. Разделение бинарной газовой смеси во всем диапазоне чисел Кнудсена.— ЖТФ, 1975, т. 45, № 7.

УДК 532.516

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО ВДУВА НА СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ И НЕПОДВИЖНЫМ ПОРИСТЫМ ДИСКАМИ

Н. В. Петровская
(Ростов-на-Дону)

Численно исследуется влияние поперечного вдува на стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, возникающее между двумя бесконечными коаксиальными дисками при вращении одного из них с угловой скоростью ω . Жидкость вдувается сквозь неподвижный диск с постоянной скоростью u . При изучении движения жидкости около одного бесконечного вращающегося диска в предположении автоматодельности течения [1] отыскание компонент скорости течения сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В случае отсутствия вдува задача хорошо изучена (см., например, [2—8]). Уже в первых работах [2, 3] были высказаны различные предположения о характере течения при больших числах Рейнольдса $Re = \omega d^2/\nu$ (d — расстояние между дисками, ν — вязкость). Согласно [2], течение имеет два пограничных слоя, прилегающих к дискам, а в ядре между ними жидкость вращается как твердое тело.

В [3] приведены доводы в пользу существования другого типа течения, характерным свойством которого является отсутствие вращения жидкости вне пограничного слоя на вращающемся диске. Далее решения задачи, обладающие указанными свойствами, будут называться решениями типа B и типа S соответственно.

Последующие исследования [4—8] показали, что существует несколько непрерывных ветвей решений, зависящих от Re . Согласно [5], только одна из них существует при всех $Re > 0$. При больших Re ее решения являются решениями типа B ; далее ее удобно называть \bar{B} -ветвью. Другая непрерывная ветвь, решения которой при больших Re являются решениями типа S , существует лишь при $Re > Re_1 \cong 217$. Профили скоростей ламинарного течения, наблюдаемого в экспериментах, при $Re < 2000$ согласуются с численными решениями, принадлежащими B -ветви [5, 7].

В данной работе изучается влияние равномерного вдува через неподвижный диск на характер течения. С этой целью для ряда значений Re выбиралось решение, принадлежащее B -ветви, которое затем непрерывно продолжалось по параметру $U = ud/\nu$ (числу Рейнольдса вдува) от $U = 0$ до $U = R$.

Эта задача уже рассматривалась для значений $Re \leq 100$ в [9, 7], где показано, что с увеличением вдува угловая и радиальная компоненты скорости течения стремятся к нулю в области вне пограничного слоя на вращающемся диске, при этом характеристики течения меняются непрерывно.

В данной работе изложены результаты вычислений в более широком диапазоне чисел Рейнольдса $0 < Re < 700$. Оказывается, качественное поведение решения при увеличении вдува существенно зависит от величины Re : при $Re > Re_* \cong 170$ непрерывность изменения характеристик течения с ростом U нарушается. Расчеты при $Re > Re_*$ показывают, что для некоторого интервала (U_1, U_2) значений U существуют три решения, принадлежащие одной непрерывной ветви. На границах этого интервала происходит ветвление: на одном из концов пара решений возникает, на другом исчезает *. Кривые зависимости характеристик течения от параметра вдува U принимают

* Бифуркационным значениям U_1 и U_2 соответствует особенность, называемая в теории катастроф складкой. Вероятно, наиболее известный пример такой бифуркации — прощелкивание упругой оболочки. Это бифуркация общего положения. Отметим, что большинство бифуркаций, рассмотренных в гидродинамической теории устойчивости (вихри Тейлора, конвективные ячейки Бенара и т. д.), связаны со специальной симметрией и не являются бифуркациями общего положения.

S -образную форму. По известным соображениям теории бифуркаций верхней и нижней части кривой соответствуют течения, устойчивые, по крайней мере, в классе вращательно-симметричных возмущений, а средней — неустойчивые.

Когда U , возрастая от нуля, проходит через точку U_2 , происходит скачкообразная перестройка течения. При этом исчезает пограничный слой, прилегающий к неподвижному диску, и течение вне пограничного слоя на вращающемся диске приближается к чисто осевому.

Аналогичное явление наблюдается, когда U убывает от значения $U = Re$. В интервале (U_1, Re) решения характеризуются единственным пограничным слоем на вращающемся диске и отсутствием вращения вне его. При переходе через точку U_1 скачком возникают пограничный слой на неподвижном диске и вращение в ядре течения.

1. Постановка задачи. Воспользуемся цилиндрическими координатами (r, θ, z) . Пусть диски расположены в плоскостях $z = 0$ и $z = d$; первый вращается с постоянной угловой скоростью ω , второй неподвижен и сквозь него вдувается жидкость с постоянной скоростью u .

Будем разыскивать вращательно-симметричные течения уравнений Навье-Стокса в слое $0 \leq z \leq d$ с полем скорости $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ вида

$$v_r = r\omega F(z_1), v_\theta = r\omega G(z_1), v_z = \nu d^{-1} H(z_1),$$

где $z_1 = z/d$; ν — коэффициент кинематической вязкости. Функции F, G, H удовлетворяют уравнениям

$$(1.1) \quad \begin{aligned} F'' &= HF' + \operatorname{Re}(F^2 - G^2) + S, G'' = \\ &= HG' + 2 \operatorname{Re} FG, H' = -2 \operatorname{Re} F \end{aligned}$$

и граничным условиям

$$(1.2) \quad \begin{aligned} F(0) &= 0, G(0) = 1, H(0) = 0, \\ F(1) &= 0, G(1) = 0, H(1) = -U, \end{aligned}$$

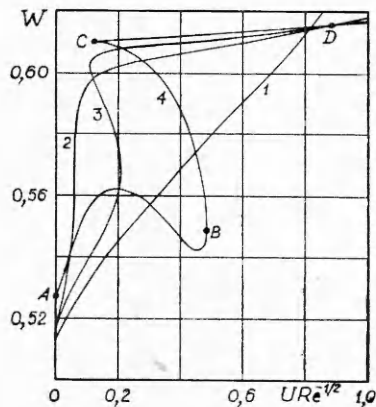
где $\operatorname{Re} = \omega d^2/\nu$ — число Рейнольдса; $U = ud/\nu$ — число Рейнольдса вдува; S — неизвестная константа. Если краевая задача (1.1), (1.2) решена, то давление p находится из соотношения

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\nu^2}{d^2} \left(\frac{H'}{2} - \frac{1}{2} \frac{H^2}{2} \right) + \frac{\omega \nu}{2d^2} S r^2,$$

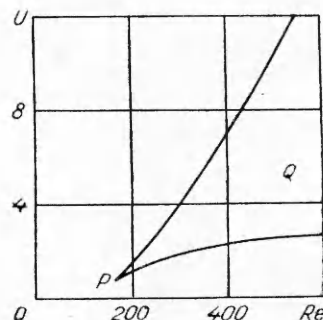
где ρ — плотность жидкости.

2. Результаты вычислений. Для решения краевой задачи (1.1), (1.2) применен метод пристрелки в сочетании с продолжением по параметру вдува U при фиксированном $\operatorname{Re} \in (0, 700)$. Параметр U изменялся от нулевого значения, которому соответствовало решение, принадлежащее B -ветви, до значений порядка Re .

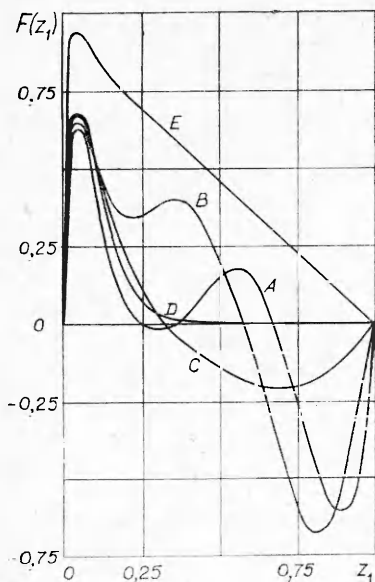
В качестве характеристики течения была выбрана величина $W = -G'(0) \operatorname{Re}^{-1/2}$. Ее зависимость от U для $\operatorname{Re} = 36; 169; 289$ и 529 приведена на фиг. 1 (кривые 1—4 соответственно), где по осям отложены величины $U \operatorname{Re}^{-1/2}$ и W .



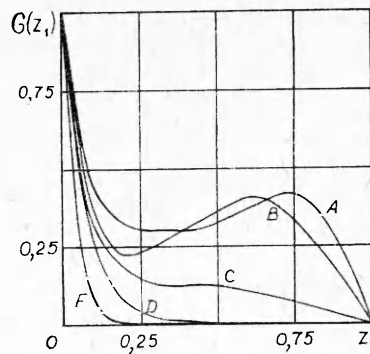
Ф и г . 1



Ф и г . 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

При малых Re эта зависимость близка к линейной (кривая 1 на фиг. 1). Однако с ростом Re ее характер сильно меняется. При $Re > Re_* \cong 170$ кривые приобретают характерную S-образную форму (кривые 3, 4 на фиг. 1). При каждом $Re > Re_*$ существует интервал (U_1, U_2) значений U такой, что для $U \in (U_1, U_2)$ задача (1.1), (1.2) имеет три решения, принадлежащие одной непрерывной ветви, а при $U \notin [U_1, U_2]$ только одно. Границы интервала являются точками ветвления решений задачи (1.1), (1.2): при $U = U_1$ пара решений возникает, а при $U = U_2$ исчезает (с возрастанием U).

Точки плоскости (Re, U) , для которых задача имеет три решения (из рассматриваемого семейства), образуют область Q , которая изображена на фиг. 2. В угловой точке $P(Re_*, U_*)$, $U_* \cong 0,80$, границы области имеют касание порядка $3/2$.

Зафиксируем $Re > Re_*$ и рассмотрим, как изменяется вид течения при движении по непрерывной ветви, зависящей от параметра U (для $Re < Re_*$ это сделано в [9]). На кривой 4 фиг. 1 ($Re = 529$) отмечены точки A, B, C и D . Соответствующие им профили $F(z_1)$ и $G(z_1)$ изображены на фиг. 3, 4.

Нижней части кривой 4 (между точками A и B) отвечают решения типа B с двумя пограничными слоями, прилегающими к дискам. При отсутствии вдува (точка A) пограничные слои разделены ядром, в котором жидкость вращается как твердое тело. При движении вдоль кривой 4 от точки A к точке B ($0 \leq U \leq U_2$) возрастает толщина пограничного слоя, прилегающего к неподвижному диску. Точке B соответствует смыкание пограничных слоев. При движении от точки B к точке C ($U_1 \leq U \leq U_2$) исчезает пограничный слой вблизи неподвижного диска.

Верхней части кривой 4 отвечают решения типа S с одним пограничным слоем, прилегающим к вращающемуся диску. При движении вдоль кривой 4 от точки C к точке D течение в области вне пограничного слоя приближается к чисто осевому. Точке D соответствует решение задачи Кармана о течении жидкости около свободного бесконечного вращающегося диска.

Дальнейшее возрастание вдува приводит к возникновению радиального оттока жидкости от оси во всей области вне пограничного слоя вращающегося диска. При значениях U порядка $Re^{1/2}$ распределение радиальной скорости в этой области становится линейным. Вращение наблюдается только в пограничном слое (кривые E на фиг. 3, 4).

Итак, случай больших чисел Рейнольдса ($Re > 170$) характеризуется следующими двумя особенностями. Во-первых, небольшой вдув ($0 < U < U_2$) приводит не к затуханию радиальной и угловой компонент скорости вблизи неподвижного диска (как в случае $Re \leq 100$, рассмотренном в [9, 7]), а к увеличению толщины пограничного слоя на неподвижном

диске и росту интенсивности течения в нем. Во-вторых, при монотонном изменении параметра вдува наблюдается скачкообразная перестройка течения и явление гистерезиса.

Автор благодарит В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе и Ф. С. Березовскую за полезные обсуждения.

Поступила 27 VIII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Kármán T. V. Über laminare und turbulente Reibung.— Z. angew. Math. und Mech., 1924, N 1.
2. Batchelor G. K. Note on a class of solutions of the Navier — Stokes equations.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1951 vol. 4, N 29.
3. Stewartson K. On the flow between two rotating coaxial disks.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, vol. 49, N 2.
4. Lance G. N., Rogers M. H. The axially symmetric flow of a viscous fluid between two infinite rotating disks.— Proc. Roy. Soc., 1962, vol. A266, N 1324.
5. Mellor G. L., Chapple P. J., Stokes V. K. On the flow between a rotating and a stationary disk.— J. Fluid Mech., 1968, vol. 31, N 1.
6. Rasmussen H. High Reynolds number flow between two infinite rotating disks.— J. Austral. Math. Soc., 1971, vol. 12, N 4.
7. Nguyen N. D., Ribault J. P., Florent P. Multiple solutions for flow between coaxial disks.— J. Fluid Mech., 1975, vol. 68, N 2.
8. Roberts S. M., Shipman J. S. Computation of the flow between a rotating and a stationary disk.— J. Fluid Mech., 1976, vol. 73, N 1.
9. Дорфман Л. А. Течения вязкой жидкости между неподвижным и обдуваемым вращающимся дисками.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2.

УДК 532.526

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ

А. А. Бобнев

(Новосибирск)

В современной технологии широко используются высокотемпературные струи газа (плазмы), при этом струйное течение часто оказывается ламинарным (см., например, [1]). Преобразование Дородницына, применяемое при исследовании неизоэтермических струй [2], пригодно для плоских течений при определенных ограничениях, накладываемых на теплофизические свойства газа, кроме того, затруднен переход от переменных Дородницына к физическим координатам. В данной работе в приближении пограничного слоя построено точное автомодельное решение для неизоэтермического осесимметричного течения в области, где температура на оси струи значительно выше температуры на бесконечности.

Задачу, описывающую истечение неизоэтермической струи из цилиндрического отверстия в приближении пограничного слоя, можно записать в безразмерном виде

$$(1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial w}{\partial r} = \rho \left(v \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho v + \frac{\partial}{\partial z} \rho w = 0, \quad \rho T = 1, \quad \frac{1}{r} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} = \text{Pr} \rho \left(v \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right);$$

$$(2) \quad v = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0;$$

$$(3) \quad T = \varepsilon, \quad w = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Здесь r, z — цилиндрические координаты (r, z — внутренние координаты в асимптотическом разложении по малому параметру Re^{-1}); $\text{Re} = \sqrt{\rho_m I_{1m} / 2\pi} / \mu_m$ — некоторый аналог числа Рейнольдса; $v \text{Re}^{-1}, w$ — продольная и поперечная составляющие скорости; $\text{Pr} = c_{pm} \mu_m / \lambda_m$ — число Прандтля; ε — значение температуры на бесконечности; обозначение остальных величин общепринятое. При безраз-