ПМТФ, № 5, 1963

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ДЛЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ МНОГОСОРТНОЙ ПЛАЗМЫ

М. Я. Алиевский, В. М. Жданов

(Свердловск)

В настоящей работе система уравнений переноса, следующих из кинетического уравнения для частиц α-сорта, приводится к замкнутому виду использованием приближения «13-моментов» Грэда к функции распределения [2]. Помимо обычных уравнений непрерывности, сохранения импульса и сохранения энергии для каждой из компонент плазмы полученная система содержит уравнения для недиагональной части тензора напряжений и теплового потока частиц. Температуры компонент считаются различными.

Соотношения для известных свойств переноса в плазме следуют из общих уравнений переноса в предположении, что параметры плазмы мало меняются на длинах свободного пробега и за времена порядка времени столкновений. В работе показано, в частности, что выражения для тензора вязкости теплового потока и тока проводимости в двухтемпературном частично ионизованном газе ($T_e \geqslant T_i = T_a$) имеют при некоторых ограничениях тот же вид, что и в работе [7], если ряд входящих в них величин определить при электронной температуре T_e.

1. Уравнения переноса в приближении «13-моментов». Уравнение переноса для некоторой величины ψ_α ($\mathbf{c}_\alpha$, $\mathbf{r}$, t), отнесенной к системе координат, движущейся со средней массовой скоростью газа $\mathbf{u}$, может быть получено умножением левой и правой частей кинетического уравнения на ψ_α с последующим интегрированием по пространству скоростей частиц [1]. (Здесь $\mathbf{c}_\alpha$ — относительная скорость частицы, $\mathbf{r}$ — ее положение, t — время). Полагая в частности, $\psi_\alpha^{(0)} = m_\alpha$, $\psi_\alpha^{(1)} = m_\alpha \mathbf{c}_\alpha$ и $\psi_\alpha^{(2)} = (m_\alpha/2)\, \mathbf{c}_\alpha^2$, где m_α — масса частицы α-сорта, приходим к уравнениям непрерывности, сохранения импульса и сохранения энергии для α-компоненты плазмы, которые при наличии электрического и магнитного полей принимают вид:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho_\alpha \frac{d_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{dt} + \nabla \mathbf{P}_\alpha^* - n_\alpha e_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) = \mathbf{R}_\alpha^{(1)} \tag{1.2}$$

$$\frac{3}{2}\frac{dp_\alpha}{dt} + \frac{3}{2} p_\alpha \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{q}_\alpha + P_{\alpha ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha \mathbf{F}_\alpha = R_\alpha^{(2)} \tag{1.3}$$

(по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование).

Здесь e_α, n_α, $\mathbf{u}_\alpha$, $\mathbf{q}_\alpha$ — соответственно заряд, плотность, средняя скорость и тепловой поток частиц α-сорта; вводятся, кроме того, массовая плотность $\rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha$ и средняя относительная скорость $\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}$ частиц α-сорта. Компоненты тензора $\mathbf{P}_\alpha^*$ связаны с обычным тензором напряжений $\mathbf{P}_\alpha$ соотношением

$$P_{\alpha ik}^* = P_{\alpha ik} - \rho_\alpha w_{\alpha i} w_{\alpha k} \tag{1.4}$$

В свою очередь $\mathbf{P}_\alpha$ разбивается на две части

$$P_{\alpha ik} = p_\alpha \delta_{ik} + \pi_{\alpha ik} \tag{1.5}$$

где p_α — парциальное давление α-компоненты плазмы, а π_α может быть условно назван тензором вязких напряжений частиц α-сорта.

При записи (1.2) и (1.3) использованы сокращения (1.6)

$$\frac{d_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \nabla), \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla), \qquad \mathbf{F}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

при этом $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции.

Величины $\mathbf{R}_\alpha^{(1)}$ и $R_\alpha^{(2)}$, фигурирующие в правых частях уравнений (1.2) и (1.3), представляют собой соответственно среднее изменение импульса и энергии частиц α-сорта при столкновениях. Вычисление их требует знания динамики столкновений вида функции распределения частиц в плазме [1].

Уравнения (1.1) — (1.3) не образуют, вообще говоря, замкнутой системы, поскольку помимо обычных гидродинамических переменных ρ_α, $\mathbf{u}_\alpha$, p_α в них присутствуют моменты более высокого порядка: тензор напряжений $\mathbf{P}_\alpha$ (точнее, его недиагональная часть — $\boldsymbol{\pi}_\alpha$) и вектор потока тепла $\mathbf{q}_\alpha$. Для этих величин могут быть получены свои уравнения переноса, однако в них, в свою очередь, будут фигурировать два момента более высокого порядка. Сведение этих моментов к тем переменным, для которых уже образованы уравнения переноса, возможно лишь при использовании определенного приближения и функции распределения. Ниже с этой целью используется приближение «13-моментов» Грэда [2]. Применимость этого приближения к многокомпонентной газовой смеси и к полностью ионизованной двухкомпонентной плазме обсуждалась в работах [3,4], там же приводятся соответствующие замкнутые системы уравнений переноса для этих случаев.

Выражение для f_α $(\mathbf{c}_\alpha, \mathbf{r}, t)$ в приближении 13-моментов имеет вид [3]:

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} \left[1 + \gamma_\alpha \mathbf{w}_\alpha \mathbf{c}_\alpha + \frac{\gamma_\alpha}{2p_\alpha} \pi_{\alpha ik} c_{\alpha i} c_{\alpha k} + \frac{\gamma_\alpha}{5p_\alpha} (\gamma_\alpha c_\alpha^2 - 5)\, \mathbf{h}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \right] \tag{1.7}$$

где

$$f_\alpha^{(0)} = n_\alpha \left(\frac{\gamma_\alpha}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \frac{-\gamma_\alpha c_\alpha^2}{2}, \qquad \mathbf{h}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha - \frac{5}{2} p_\alpha \mathbf{w}_\alpha, \qquad \gamma_\alpha = \frac{m_\alpha}{kT_\alpha} \tag{1.8}$$

Здесь k — постоянная Больцмана, T_α — температура частиц α-сорта (отнесенная к средней массовой скорости $\mathbf{u}$).

Умножая кинетическое уравнение для частиц α-сорта на

$$\psi_{\alpha ik}^{(2)} = m_\alpha \left(c_{\alpha i} c_{\alpha k} - \frac{1}{3} \delta_{ik} c_\alpha^2 \right), \qquad \psi_{\alpha i}^{(3)} = \frac{1}{2} m_\alpha (c_\alpha^2 - 5 / \gamma_\alpha)\, c_{\alpha i} \tag{1.9}$$

приходим в приближении 13-моментов к следующим уравнениям для величин $\pi_{\alpha ik}$ и $\mathbf{h}_\alpha$ (или $\mathbf{q}_\alpha$)

$$\frac{d\pi_{\alpha ik}}{dt} + \pi_{\alpha ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + 2 \left\{ \pi_{\alpha il} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right\} + \frac{4}{5} \left\{ \frac{\partial q_{\alpha i}}{\partial x_k} \right\} + 2 p_\alpha \varepsilon_{ik} -$$

$$- 2 \{ \rho_\alpha w_{\alpha i} F_{\alpha k} \} - 2 \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \{ (\boldsymbol{\pi}_\alpha \times \mathbf{B})_{ik} \} = R_{\alpha ik}^{(2)} \tag{1.10}$$

$$\frac{dh_{\alpha i}}{dt} + \frac{7}{5} h_{\alpha l} \frac{\partial u_i}{\partial u_l} + \frac{2}{5} h_{\alpha l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{7}{5} h_{\alpha i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{5}{3} p_\alpha w_{\alpha i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} +$$

$$+ 2 p_\alpha w_{\alpha i} \varepsilon_{il} + \frac{1}{\gamma_\alpha} \frac{\partial \pi_{\alpha il}}{\partial x_l} + \frac{7}{2\gamma_\alpha} \pi_{\alpha il} \frac{1}{T_\alpha} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_l} + \frac{5}{2\gamma_\alpha} \frac{p_\alpha}{T_\alpha} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{5}{2} n_\alpha k w_{\alpha i} \frac{dT_\alpha}{dt} - F_{\alpha l} \pi_{\alpha il} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{h}_\alpha \times \mathbf{B})_i = R_{\alpha i}^{(3)} \tag{1.11}$$

---

[1] Для частиц, взаимодействующих по закону $\sim r^{-5}$, эти величины могут быть вычислены и без знания конкретного вида функции распределения.

где использованы обозначения

$$\{K_i L_k\} = \frac{1}{2}(K_i L_k + K_k L_i) - \frac{1}{3} K_l L_l \delta_{ik}$$

$$\varepsilon_{ik} = \left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right\}, \qquad (\boldsymbol{\pi}_\alpha \times \mathbf{B})_{ik} = \pi_{\alpha li}\sigma_{klm}B_m$$

(σ_{klm} — перестановочный тензор).

Правые части уравнений (1.2), (1.3), (1.10), (1.11), представляющие собой линейные комбинации моментов относительно интеграла столкновений, записываются в общем виде как

$$\mathbf{R}_\alpha^{(n)} = \sum_\beta \int (\psi_\alpha'^{(n)} - \psi_\alpha^{(n)}) f_\alpha f_\beta g_{\alpha\beta} b db d\varepsilon d\mathbf{c}_\alpha d\mathbf{c}_\beta \tag{1.12}$$

Здесь $g_{\alpha\beta} = |\mathbf{c}_\alpha - \mathbf{c}_\beta|$, b — параметр столкновения частиц α- и β-сорта, ε — азимутальный угол, штрихом обозначено значение величины $\psi^{(n)}$ после столкновения.

Используя выражения для f_α, f_β в виде (1.7) и пренебрегая при вычислении $\mathbf{R}_\alpha^{(n)}$ (1.12) квадратичными по $\mathbf{w}_\alpha$, $\pi_{\alpha ik}$ и $\mathbf{h}_\alpha$ членами, приходим к следующим общим выражениям

$$\begin{aligned}
R_{\alpha i}^{(1)} &= \sum_\beta G_{\alpha\beta}^{(1)}(w_{\alpha i} - w_{\beta i}) + \sum_\beta G_{\alpha\beta}^{(2)}\gamma_{\alpha\beta}\left(\frac{h_{\alpha i}}{\gamma_\alpha p_\alpha} - \frac{h_{\beta i}}{\gamma_\beta p_\beta}\right)\\
R_\alpha^{(2)} &= \sum_\beta G_{\alpha\beta}^{(1)}\frac{3k}{m_\alpha + m_\beta}(T_\alpha - T_\beta)\\
R_{\alpha ik}^{(2)} &= \sum_\beta \frac{1}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta}\left[G_{\alpha\beta}^{(3)}\frac{\pi_{\alpha ik}}{p_\alpha} + G_{\alpha\beta}^{(4)}\frac{\pi_{\beta ik}}{p_\beta}\right]\\
R_{\alpha i}^{(3)} &= \frac{1}{\gamma_\alpha}\sum_\beta\left[G_{\alpha\beta}^{(5)}\frac{h_{\alpha i}}{p_\alpha} + G_{\alpha\beta}^{(6)}\frac{h_{\beta i}}{p_\beta} + \frac{5\gamma_{\alpha\beta}}{2\gamma_\alpha}G_{\alpha\beta}^{(7)}(w_{\alpha i} - w_{\beta i}) + 5\lambda_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}^{(1)}w_{\alpha i}\right]
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Знание динамики столкновений частиц позволяет вычислить значения $G_{\alpha\beta}^{(n)}$. Если рассматриваются лишь упругие взаимодействия частиц, то коэффициенты $G_{\alpha\beta}^{(h)}$ оказываются линейными комбинациями величин $\Omega_{\alpha\beta}^{lr}$, которые представляют собой обобщение известных интегралов Чепмена — Каулинга [1] на случай различных температур компонент. Для одинаковых температур эти коэффициенты найдены в [3]. В рассматриваемом нами случае вычисления усложняются и приводят к следующим значениям коэффициентов

$$\begin{aligned}
&G_{\alpha\beta}^{(1)} = B_{\alpha\beta}^{(1)}, \qquad G_{\alpha\beta}^{(2)} = B_{\alpha\beta}^{(2)}\\
&G_{\alpha\beta}^{(3)} = B_{\alpha\beta}^{(3)} - (\gamma_\beta/\gamma_\alpha)\lambda_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}^{(7)}, \qquad G_{\alpha\beta}^{(4)} = B_{\alpha\beta}^{(4)} - \lambda_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}^{(7)}\\
&G_{\alpha\beta}^{(5)} = B_{\alpha\beta}^{(5)} + \tfrac{1}{2}(\gamma_\beta/\gamma_\alpha)\lambda_{\alpha\beta}[B_{\alpha\beta}^{(8)} - B_{\alpha\beta}^{(9)} - 2(\gamma_\alpha/\gamma_\beta)B_{\alpha\beta}^{(10)}] -\\
&\qquad\qquad - (\gamma_\beta/\gamma_\alpha)\lambda_{\alpha\beta}^2(B_{\alpha\beta}^{(8)} - \tfrac{1}{2}B_{\alpha\beta}^{(9)})\\
&G_{\alpha\beta}^{(6)} = B_{\alpha\beta}^{(6)} - \tfrac{1}{2}\lambda_{\alpha\beta}(B_{\alpha\beta}^{(8)} - B_{\alpha\beta}^{(9)} + 2B_{\alpha\beta}^{(10)}) + \lambda_{\alpha\beta}^2(B_{\alpha\beta}^{(8)} - \tfrac{1}{2}B_{\alpha\beta}^{(9)})\\
&G_{\alpha\beta}^{(7)} = B_{\alpha\beta}^{(2)} + \lambda_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}^{(11)} - \lambda_{\alpha\beta}^2B_{\alpha\beta}^{(12)}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где

$$B_{\alpha\beta}^{(1)} = -\tfrac{16}{3}\mu_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\Omega_{\alpha\beta}^{11}, \qquad B_{\alpha\beta}^{(2)} = -\tfrac{16}{3}\mu_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\left(\tfrac{2}{5}\Omega_{\alpha\beta}^{12} - \Omega_{\alpha\beta}^{11}\right)$$

$$B_{\alpha\beta}^{(3)} = -\tfrac{16}{5}\mu_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta[(\gamma_\beta / \gamma_\alpha)\,\Omega_{\alpha\beta}^{22} + \tfrac{10}{3}\Omega_{\alpha\beta}^{11}]$$

$$B_{\alpha\beta}^{(4)} = -\tfrac{16}{5}\mu_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\,(\Omega_{\alpha\beta}^{22} - \tfrac{10}{3}\Omega_{\alpha\beta}^{11})$$

$$B_{\alpha\beta}^{(5)} = -\tfrac{64}{15}\mu_{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\,[\Omega_{\alpha\beta}^{22} + \left(\tfrac{15}{4}\gamma_\alpha/\gamma_\beta + \tfrac{25}{8}\gamma_\beta/\gamma_\alpha\right)\Omega_{\alpha\beta}^{11} - $$
$$- \tfrac{1}{2}\gamma_\beta/\gamma_\alpha\,(5\Omega_{\alpha\beta}^{12} - \Omega_{\alpha\beta}^{13})]$$

$$B_{\alpha\beta}^{(6)} = -\tfrac{64}{15}\mu_{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\,[\Omega_{\alpha\beta}^{22} - \tfrac{55}{8}\Omega_{\alpha\beta}^{11} + \tfrac{1}{2}(5\Omega_{\alpha\beta}^{12} - \Omega_{\alpha\beta}^{13})]$$

$$B_{\alpha\beta}^{(7)} = -\tfrac{16}{5}\mu_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\,[\Omega_{\alpha\beta}^{22} - \tfrac{4}{3}\Omega_{\alpha\beta}^{12}]$$

$$B_{\alpha\beta}^{(8)} = -\tfrac{64}{15}\mu_{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\,[5\Omega_{\alpha\beta}^{12} - 2\Omega_{\alpha\beta}^{13}]$$

$$B_{\alpha\beta}^{(9)} = -\tfrac{64}{15}\mu_{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\,[5\Omega_{\alpha\beta}^{22} - 2\Omega_{\alpha\beta}^{23}] \qquad (1.15)$$

$$B_{\alpha\beta}^{(10)} = -\tfrac{64}{15}\mu_{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\,[\Omega_{\alpha\beta}^{22} - \tfrac{11}{2}\Omega_{\alpha\beta}^{12} + \tfrac{25}{4}\Omega_{\alpha\beta}^{11}]$$

$$B_{\alpha\beta}^{(11)} = -\tfrac{64}{15}\mu_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\,[\Omega_{\alpha\beta}^{22} - \Omega_{\alpha\beta}^{12} - \tfrac{5}{2}\Omega_{\alpha\beta}^{11}]$$

$$B_{\alpha\beta}^{(12)} = -\tfrac{64}{15}\mu_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\,[\Omega_{\alpha\beta}^{22} - 2\Omega_{\alpha\beta}^{12}]$$

Здесь

$$\Omega_{\alpha\beta}^{lr} = \sqrt{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \zeta^{2r+2}e^{-\zeta^2}g_{\alpha\beta}(1 - \cos^l\chi_{\alpha\beta})\,bdbd\zeta \qquad \left(\zeta = g_{\alpha\beta}(\gamma_{\alpha\beta}/2)^{1/2}\right)$$

где $\chi_{\alpha\beta}$ — угол рассеяния в системе центра масс сталкивающихся молекул.

Величины $\mu_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\lambda_{\alpha\beta}$ определены выражениями:

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, \qquad \varkappa_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta}, \qquad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_\alpha\gamma_\beta}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta}, \qquad \lambda_{\alpha\beta} = \frac{1 - T_\beta / T_\alpha}{1 + m_\beta / m_\alpha}$$

Для случая одинаковых температур ($T_\alpha = T_\beta = T$)

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{kT}, \qquad \varkappa_{\alpha\beta} = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta}, \qquad \lambda_{\alpha\beta} = 0$$

и коэффициенты (1.14), (1.15) совпадают с найденными в работе [3].

2. Соотношения для свойств переноса в плазме. Уравнения (1.1—1.3) и (1.10—1.11) вместе с найденными выше выражениями для $\mathbf{R}_\alpha^{(n)}$ образуют замкнутую систему квазилинейных дифференциальных уравнений относительно переменных ρ_α, $\mathbf{u}_\alpha$, p_α, $\pi_{\alpha ik}$ и $\mathbf{h}_\alpha$. Суммирование первых трех из них по α приводит к обычным уравнениям непрерывности, движения и энергии для плазмы в целом

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{u} = 0, \qquad \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p + \operatorname{div}\pi = \mathbf{j}\times\mathbf{B} \qquad (2.1)$$

$$\frac{3}{2}\frac{dp}{dt} + \frac{5}{2}p\operatorname{div}\mathbf{u} + \operatorname{div}\mathbf{q} + \pi_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \mathbf{j}\mathbf{E}' \qquad (2.2)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}$$

При этом ρ — массовая плотность, p — давление, π — тензор вязких напряжений, $\mathbf{q}$ — тепловой поток для плазмы в целом, получаемые простым суммированием соответствующих величин для компонент; использованы, кроме того, условие квазинейтральности плазмы и выражение для плотности тока проводимости

$$\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha = 0, \qquad \mathbf{j} = \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha \mathbf{w}_\alpha \tag{2.3}$$

Для определения величин $\mathbf{w}_\alpha$, $\boldsymbol{\pi}_\alpha$ и $\mathbf{h}_\alpha$ (или $\mathbf{q}_\alpha$) можно воспользоваться уравнениями (1.2), (1.10) и (1.11). Последние заметно упрощаются, если предположить, что макроскопические параметры плазмы слабо меняются на расстояниях порядка эффективной длины свободного пробега и за время порядка времени столкновений частиц в плазме. Легко показать [3-4], что при соблюдении этих условий можно пренебречь производными $d\mathbf{w}_\alpha / dt$, $d\pi_{\alpha ik} / dt$, $dh_{\alpha i} / dt$ и нелинейными членами в левых частях уравнений (1.2) и (1.10) — (1.11), благодаря чему выражения для векторных и тензорных свойств переноса в плазме будут определяться решением систем линейных алгебраических уравнений, при этом $d\mathbf{u} / dt$ в левой части (1.2) должна быть заменена из уравнения движения (2.1). Тогда уравнение сохранения импульса для α-компоненты плазмы примет вид:

$$n_\alpha \sum_\beta \mu_{\alpha\beta}\, \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left[\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta + \frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta} A_{\alpha\beta}^{(2)} \left(\frac{\mathbf{h}_\alpha}{p_\alpha} - \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\beta} \frac{\mathbf{h}_\beta}{p_\beta} \right) \right] =$$
$$= -\left(\triangle p_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \triangle p \right) - \left(\operatorname{div} \boldsymbol{\pi}_\alpha - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\pi} \right) + n_\alpha e_\alpha (\mathbf{E}' + \mathbf{w}_\alpha \times \mathbf{B}) - \frac{\rho_\alpha}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \tag{2.4}$$

Получающиеся в рассматриваемом приближении уравнения для тензоров $\boldsymbol{\pi}_\gamma$ и векторов $\mathbf{h}_\gamma$ удобно представить в виде

$$\pi_{\alpha ik} + \sum_{\beta \neq \alpha} a_{\alpha\beta} \pi_{\beta ik} = -2\eta_\alpha \varepsilon_{\alpha ik} + \frac{4}{3} \{\pi_{\alpha li} \sigma_{klm} \omega_{\alpha m} \tau_\alpha\} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{h}_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} b_{\alpha\beta} \mathbf{h}_\beta = -\lambda_\alpha \mathbf{R}_\alpha + (\mathbf{h}_\alpha \times \boldsymbol{\omega}_\alpha \tau^*_\alpha) \tag{2.6}$$

Здесь

$$\eta_\alpha = \frac{2}{3} p_\alpha \tau_\alpha, \qquad \lambda_\alpha = \frac{5k}{2m_\alpha} p_\alpha \tau_\alpha^*, \qquad \boldsymbol{\omega}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{B} \tag{2.7}$$

$$a_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \left(1 + \frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha} \right)^{-1} \frac{p_\alpha}{p_\beta} \tau_\alpha \tau_{\alpha\beta}^{-1} A_{\alpha\beta}^{(4)}, \qquad b_{\alpha\beta} = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \frac{p_\alpha}{p_\beta} \tau_\alpha^* \tau_{\alpha\beta}^{-1} A_{\alpha\beta}^{(6)}$$

$$\tau_\alpha^{-1} = \frac{1}{6} (A_{\alpha\alpha}^{(3)} + A_{\alpha\alpha}^{(4)}) \tau_{\alpha\alpha}^{-1} + \frac{2}{3} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \left(1 + \frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha} \right)^{-1} A_{\alpha\beta}^{(3)} \tau_{\alpha\beta}^{-1}$$

$$(\tau_\alpha^*)^{-1} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\alpha}^{(5)} + A_{\alpha\alpha}^{(6)}) \tau_{\alpha\alpha}^{-1} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} A_{\alpha\beta}^{(5)} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \tag{2.8}$$

Наконец,

$$\varepsilon_{\alpha ik} = \varepsilon_{ik} - \frac{e_\alpha}{kT_\alpha} \{w_{\alpha i} E_k'\} \tag{2.9}$$

$$R_{\alpha i} = \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} + \frac{2}{5} \frac{T_\alpha}{p_\alpha} \frac{\partial \pi_{\alpha ik}}{\partial x_k} - \frac{2}{5} \frac{e_\alpha}{kp_\alpha} \pi_{\alpha il} E_l' +$$
$$+ \frac{1}{k} \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} \left[\frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta} A_{\alpha\beta}^{(7)} (w_{\alpha i} - w_{\beta i}) + 2\lambda_{\alpha\beta} w_{\alpha i} \right] \tag{2.10}$$

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{16}{3} n_\beta \Omega_{\alpha\beta}^{(11)}, \qquad A_{\alpha\beta}^{(n)} = G_{\alpha\beta}^{(n)} / G_{\alpha\beta}^{(1)} \tag{2.11}$$

При этом $\tau_{\alpha\beta}$ имеет порядок величины времени столкновений частиц α- и β-сорта, а $A_{\alpha\beta}^{(n)}$ зависит лишь от отношений масс и температур частиц, а также от отношений различных типов поперечных сечений для данного вида столкновений. Для электрон-нейтральных столкновений, если $\gamma_e \ll \gamma_a$, τ_{ea}^{-1} фактически совпадает с обычно используемой в кинетике плазмы эффективной частотой столкновений электрона [5]

$$\tau_{ea}^{-1} = \nu_{\text{эфф}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \gamma_e^{5/2} \int_0^\infty \nu\ (v)\, v^4 \exp\left(-\frac{\gamma_e v^2}{2}\right) dv \tag{2.12}$$

$$\nu\ (v) = n_a v \int q\ (v, \chi)\ (1 - \cos\chi)\ d\Omega, \quad d\Omega = \sin\chi d\chi d\varepsilon$$

Здесь ν—частота столкновений с передачей импульса, $q\ (v, \chi)$—дифференциальное эффективное сечение упругого рассеяния электрона (индексы e и a относятся соответственно к электрону и нейтралу).

Для столкновений тяжелых частиц в плазме (ионов с нейтралами и нейтралов между собой) можно связать $\tau_{\alpha\beta}$ с бинарным коэффициентом диффузии $[D_{\alpha\beta}]_1$ (первое приближение Чепмена — Каулинга [1])

$$\gamma_{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta}^{-1} = n_\beta / n\ [D_{\alpha\beta}]_1 \tag{2.13}$$

В случае кулоновских взаимодействий в выражениях для $\Omega_{\alpha\beta}^{lr}$ возникает, вообще говоря, расходимость, которая может быть формально устранена обрезанием параметра столкновений на расстояниях порядка экранирующей дебаевской длины λ_D. Тогда

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{16\sqrt{\pi}}{3} n_\beta \left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2}\right)^{3/2} \left(\frac{e_\alpha e_\beta}{\mu_{\alpha\beta}}\right)^2 \ln\Lambda_{\alpha\beta} \qquad \left(\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{\gamma_{\alpha\beta}} \frac{3\lambda_D}{|e_\alpha e_\beta|}\right) \tag{2.14}$$

Переходя к анализу системы уравнений (2.4) — (2.6), заметим предварительно, что члены, зависящие от электрического поля $\mathbf{E}'$ в (2.9) и (2.10), оказываются существенными лишь в очень сильных полях [1] (см. [4,6]) и поэтому в дальнейшем могут быть опущены. Тогда структура выражений для тензора вязкости и теплового потока частиц в многосортной плазме при отсутствии магнитного поля мало чем отличается от соответствующих выражений в случае многокомпонентной газовой смеси [3], специфичным является лишь наличие кулоновских взаимодействий частиц и то, что каждой компоненте смеси может соответствовать своя кинетическая температура T_α. Наличие магнитного поля заметно усложняет результаты, однако и в этом случае система уравнений допускает решение в самом общем виде. При этом уравнения диффузии (2.3) могут быть использованы для вывода обобщенного закона Ома в многосортной плазме, связывающего плотность тока проводимости $\mathbf{j}$ с напряженностями электрического и магнитного полей, а также с градиентами давления и температуры.

Решение уравнений (2.4) — (2.6) может быть несколько упрощено благодаря наличию в них малого параметра — отношения массы электрона m_e к массе тяжелых частиц в плазме m_β $(\beta \neq e)$.

В частности, если выполнено условие $\gamma_e \ll \gamma_\beta$ или

$$\frac{m_e T_\beta}{m_\beta T_e} \ll 1 \tag{2.15}$$

[1] Под термином «сильное электрическое поле» здесь подразумевается поле, в котором заряженные частицы за время между столкновениями ускоряются до энергий, сравнимых с энергией их теплового хаотического движения.

то в уравнении диффузии (2.4), записанном для электронной компоненты плазмы ($\alpha = e$), можно пренебречь членами с тепловыми потоками тяжелых компонент $\mathbf{h}_\beta$. Оценивая при тех же условиях порядок величины коэффициентов $a_{e\beta}$ и $b_{e\beta}$ в уравнениях (2.5), (2.6), находим

$$a_{e\beta} \sim \frac{n_e m_e}{n_\beta m_\beta} \frac{\tau_e}{\tau_{e\beta}} \ll 1, \quad b_{e\beta} \sim \frac{n_e m_e}{n_\beta m_\beta} \frac{\tau_e^*}{\tau_{e\beta}} \ll 1 \qquad (\beta \neq e)$$

Таким образом, тензор вязкости и тепловой поток электронов могут быть определены независимо от уравнений для других компонент. В свою очередь, в уравнениях для ионов и атомов можно по тем же соображениям пренебречь величинами $\boldsymbol{\pi}_e$ и $\mathbf{h}_e$. Приближенные решения соответствуют выполнению условий

$$\frac{m_e}{m_\beta} T_e \ll T_\beta \leqslant T_e \qquad (\beta \neq e) \tag{2.16}$$

Заметим, что получающиеся при этом выражения для тензора вязкости и теплового потока электронов имеют тот же вид, что и в работе [7], где рассматривался случай трехкомпонентной плазмы с одинаковыми температурами компонент. Отличие заключается в том, что все зависящие от температуры величины должны быть определены при электронной температуре T_e и суммирование по β в выражениях для τ_e^{-1}, $(\tau_e^*)^{-1}$ и $\mathbf{R}_e$ распространено на все компоненты многосортной плазмы.

Решения системы уравнений для тензоров вязкости и тепловых потоков тяжелых компонент в общем случае могут быть записаны в форме определителей; в частном случае трехкомпонентной плазмы с $T_i = T_a$ соответствующие выражения можно взять из работы [7].

Аналогичные замечания можно сделать и в отношении вывода обобщенного закона Ома в трехкомпонентной плазме с температурой электронов, отличной от температур ионов и атомов. При выполнении условий (2.16) для него остается справедливым соотношение (4.10) в работе [7], где все величины, за исключением τ_{ia}, определены при электронной температуре T_e.

Поступила 9 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. ИЛ, 1960.
2. Grad H., On the kinetic theory of ratefied gases. Comm. Pure and Appl. Math., 1949, vol. 2, p. 331. (Русск. пер. в Сб. «Механика», 1952, 4 (14), стр. 71 и 5 (15), стр. 61).
3. Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А. Влияние вязкого переноса импульса на диффузию в газовых смесях. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 42, вып. 3.
4. Herdan R., Liley B. S. Dynamical equations and transport relationships for a thermal plasma. Rev. Mod. Phys., 1960, vol. 32, p. 731.
5. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Физматгиз, 1960.
6. Елеонский В. М., Жданов В. М. О гидродинамическом приближении для ионизованного газа в сильном электрическом поле, ПМТФ, 1963, № 1.
7. Жданов В. М. Явления переноса в частично ионизованном газе. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.