ПМТФ, № 5, 1965

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ СТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С. А. Бостанджиян, А. Г. Мержанов, С. И. Худяев

(Москва)

Получено решение задач о безнапорном течении в плоской трубе, в кольцевом зазоре между двумя бесконечными цилиндрами (осевое) и между двумя вращающимися цилиндрами с учетом диссипации энергии и зависимости вязкости от температуры, даваемой соотношением Рейнольдса

$$\mu = \mu_0 \exp(-\beta T) \qquad (\mu_0, \ \beta = \mathrm{const})$$

Рассмотрены два типа граничных условий: а) на обеих поверхностях заданы постоянные (в общем случае неравные) температуры; б) на одной поверхности задана постоянная температура, а через другую отсутствует теплообмен с окружающей средой.

Исследованию неизотермического стационарного течения жидкости в простейших областях с учетом диссипации энергии и зависимости вязкости от температуры посвящен ряд работ [1–11]

$$\mu = \mu_m \frac{1}{1 + \alpha^2 (T - T_m)}$$

В большинстве работ [1–6] для зависимости вязкости от температуры взят гиперболический закон.

При такой зависимости уравнение теплопроводности является линейным относительно температуры, и интегрирование его не представляет трудности.

В работах [7, 8] рассматривается течение Куэтта в предположении, что вязкость связана с температурой соотношением Рейнольдса

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta T} \qquad (\mu_0, \ \beta = \mathrm{const}) \tag{0.1}$$

Исследование течения Куэтта в случае зависимости $\mu(T)$ общего вида проводилось в работе [9].

В работе [10] рассматривается напорное течение в плоском канале и в круглой трубе при зависимости $\mu(T)$ общего вида. В частности было показано, что при достаточно сильной зависимости вязкости от температуры возможно существование критического значения градиента давления. При градиентах давления, меньших критического, существует стационарный режим течения, а при больших — стационарный режим невозможен.

В работе [11], выполненной авторами настоящей статьи, изучалось течение Пуазейля в круглой трубе при экспоненциальной зависимости вязкости от температуры. Эту термогидродинамическую задачу удалось свести к задаче о тепловом взрыве в цилиндрической области, откуда вытекало существование критического режима. Были получены критические условия гидродинамического теплового «взрыва», поля температур и скоростей.

Ниже исследуются течение Куэтта, безнапорное осевое течение в кольцевом зазоре и течение между двумя вращающимися цилиндрами при наличии диссипации энергии и зависимости вязкости от температуры, даваемой соотношением Рейнольдса (0.1). Решение задачи о течении Куэтта выгодно отличается от решения [8], так как постоянные интегрирования находятся элементарно, в то время как нахождение их в работе [8] сопряжено с большими трудностями. На базе этой задачи получено решение двух остальных упомянутых выше задач.

§ 1. Течение между двумя параллельными пластинами. Пусть слой вязкой жидкости находится между двумя бесконечными плоскими стенками $y = -h$ и $y = h$, верхняя из которых движется с постоянной скоростью V в положительном направлении оси x. На стенках заданы постоянные температуры T_0 и T_1 $(T_0 > T_1)$.

Запишем систему уравнений движения и теплопроводности в форме

$$\frac{d}{d\eta}\left(e^{-\theta}\frac{dv}{d\eta}\right)=0, \qquad \frac{d^2\theta}{d\eta^2}+ke^{-\theta}\left(\frac{dv}{d\eta}\right)^2=0 \tag{1.1}$$

где введены следующие обозначения безразмерных величин

$$v=\frac{v_x}{V}, \qquad \theta=\beta(T-T_1), \qquad \eta=\frac{y}{h}, \qquad k=\frac{\beta\mu_0V^2}{\lambda J}\exp(-\beta T_1) \tag{1.2}$$

Здесь J — механический эквивалент тепла, λ — коэффициент теплопроводности жидкости. Граничные условия имеют вид (1.3)

$$v=1,\ \ \theta=0 \ \text{ при } \eta=1, \qquad v=0,\ \ \theta=\theta_0 \ \text{ при } \eta=-1, \quad \theta_0=\beta(T_0-T_1)$$

Из первого уравнения системы (1.1) имеем

$$e^{-\theta}dv\,/\,d\eta=c \tag{1.4}$$

где c — постоянная интегрирования. Исключая производную скорости из (1.1) и (1.4), получим

$$d^2\theta\,/\,d\eta^2+kc^2e^\theta=0 \tag{1.5}$$

Это уравнение встречается при рассмотрении задачи о тепловом взрыве в плоском слое [12]. Решение его записывается в форме

$$\theta=\ln\frac{a}{\operatorname{ch}^2(b\pm\sqrt{{}^1/_2akc^2}\eta)} \tag{1.6}$$

где a и b — постоянные интегрирования. В силу четности гиперболического косинуса и наличия двух знаков перед корнем можно считать $b>0$. Тогда в формуле (1.6) перед корнем следует брать знак плюс, чтобы можно было удовлетворить граничным условиям (1.3). С учетом этого перепишем формулу (1.6) в виде

$$\theta=\ln a-2\ln\operatorname{ch}(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2}\eta) \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.4), получим уравнение для определения скорости

$$\frac{dv}{d\eta}=\frac{ac}{\operatorname{ch}^2(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2}\eta)}$$

Интегрируя это уравнение и удовлетворяя первому граничному условию (1.3), получим

$$v=1-\sqrt{2a/k}\,[\operatorname{th}(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2})-\operatorname{th}(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2}\eta)] \tag{1.8}$$

В (1.7) и (1.8) удовлетворим остальным трем граничным условиям (1.3)

$$\begin{gathered}\operatorname{ch}^2(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2})=a, \qquad \operatorname{ch}^2(b-\sqrt{{}^1/_2akc^2})=ae^{-\theta_0}\\ \operatorname{th}(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2})-\operatorname{th}(b-\sqrt{{}^1/_2akc^2})=\sqrt{{}^1/_2k/a}\end{gathered} \tag{1.9}$$

Из этой системы трех трансцендентных уравнений определяются постоянные интегрирования a, b, c. Из первых двух уравнений (1.9) имеем

$$\operatorname{th}^2(b+\sqrt{{}^1/_2akc^2})=(a-1)/a, \quad \operatorname{th}^2(b-\sqrt{{}^1/_2akc^2})=(ae^{-\theta_0}-1)/ae^{-\theta_0}$$

Учитывая эти соотношения, из третьего уравнения (1.9) получаем

$$a=1+{}^1/_2k^{-1}({}^1/_2k+e^{\theta_0}-1)^2 \tag{1.10}$$

Из (1.10) видно, что при изменении k от 0 до ∞ величина a монотонно убывает до своего минимального значения $a_0=\exp\theta_0$, достигаемого при $k_0=2(\exp\theta_0-1)$, затем монотонно возрастает до ∞.

Из двух первых уравнений (1.9) имеем

$$b + \sqrt{{}^1/_2 akc^2} = \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}),$$
$$b - \sqrt{{}^1/_2 akc^2} = \pm \ln(\sqrt{ae^{-\theta_0}} + \sqrt{ae^{-\theta_0}-1}) \qquad (1.11)$$

Во втором уравнении при переходе k через k_0 логарифм меняет свой знак и обращается в нуль при $k = k_0$.

Разрешая систему (1.11), получим

$$b = {}^1/_2 [\ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) \pm \ln(\sqrt{ae^{-\theta_0}} + \sqrt{ae^{-\theta_0}-1})] \qquad (1.12)$$
$$c = {}^1/_2 \sqrt{2/ak} [\ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) \mp \ln(\sqrt{ae^{-\theta_0}} + \sqrt{ae^{-\theta_0}-1})] \qquad (1.13)$$

Верхний знак берется при $k < k_0$, нижний — при $k > k_0$. Таким образом, все константы интегрирования определены. Выпишем выражения для констант для двух частных случаев.

а) Обе пластины имеют одинаковую температуру, $\theta_0 = 0$

$$a = 1 + k/8, \qquad b = 0, \qquad c = \sqrt{2/ak} \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) \qquad (1.14)$$

б) Нижняя пластина теплоизолирована $d\theta / d\eta = 0$ при $\eta = -1$.

Удовлетворяя (1.7) этому граничному условию, получим

$$b - \sqrt{{}^1/_2 akc^2} = 0$$

Из (1.11) видно, что это условие удовлетворяется при $\theta_0 = \ln a$. Константы при этом выражаются формулами

$$a = 1 + {}^1/_2 k, \quad b = {}^1/_2 \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}), \quad c = {}^1/_2 \sqrt{2/ak} \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) \qquad (1.15)$$

В обоих случаях максимальная температура $\theta = \ln a$. В первом случае она находится на средней плоскости, во втором — на нижней теплоизолированной плоскости.

При $\theta_0 = 0$, переходя в формулах (1.7) и (1.8) к пределу при $k \to 0$ ($\lambda \to \infty$), получим

$$\theta \equiv 0, \quad v = {}^1/_2 (1 + \eta) \qquad (1.16)$$

т. е. решение задачи Куэтта в изотермической постановке.

§ 2. Осевое течение в кольцевом зазоре между двумя цилиндрами. Пусть вязкая жидкость находится между двумя соосными бесконечными цилиндрами, внутренний из которых движется в положительном направлении оси z с постоянной скоростью V, а внешний неподвижен. Радиус и температура внутреннего цилиндра R_0 и T_0; для внешнего цилиндра имеем соответственно R_1 и T_1. Систему уравнений движения и теплопроводности в безразмерной форме можно записать так:

$$\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\theta}\xi \frac{dv}{d\xi}\right) = 0, \quad \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + ke^{-\theta}\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 = 0, \quad \left(v = \frac{v_z}{V}, \quad \xi = \frac{r}{R_1}\right) \qquad (2.1)$$

где θ и k такие же, как и в первой задаче.

Граничные условия имеют вид

$$v = 0, \quad \theta = 0 \text{ при } \xi = 1, \qquad v = 1, \quad \theta = \theta_0 \text{ при } \xi = d \quad (d = R_0/R_1) \qquad (2.2)$$

Эту задачу сведем к предыдущей. Из первого уравнения (2.1) имеем

$$e^{-\theta}\xi dv/d\xi = c_1 \qquad (2.3)$$

При помощи (2.3) преобразуем второе уравнение (2.1)

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \frac{kc_1^2}{\xi^2}e^{\theta} = 0. \qquad (2.4)$$

Сделаем замену

$$\eta = 1 - 2 \ln \xi / \ln d, w = 1 - v;$$

Уравнения (2.3) и (2.4) примут вид

$$e^{-\theta} \frac{dw}{d\eta} = c, \qquad \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + kc^2e^{\theta} = 0 \qquad \left(c = -\frac{c_1 \ln d}{2}\right) \tag{2.5}$$

Граничные условия (2.2) при этом запишутся так:

$$w = 1, \quad \theta = 0 \text{ при } \eta = 1, \qquad w = 0, \quad \theta = \theta_0 \text{ при } \eta = -1 \tag{2.6}$$

Преобразованные уравнения (2.5) и граничные условия (2.6) полностью совпадают с соответствующими уравнениями (1.4), (1.5) и граничными условиями (1.3) в задаче о куэттовском течении.

Теперь нетрудно написать выражения для профилей температур и скоростей для задачи об осевом безнапорном течении в кольцевом зазоре

$$\theta = \ln a - 2 \ln \operatorname{ch} (b - c_1 \sqrt{{}^1/{}_2 ak} \ln \sqrt{d} / \xi) \tag{2.7}$$

$$v = \sqrt{2a / k} [\operatorname{th} (b - {}^1/{}_2 c_1 \ln d \sqrt{{}^1/{}_2 ak}) - \operatorname{th} (b - c_1 \sqrt{{}^1/{}_2 ak} \ln \sqrt{d} / \xi)] \tag{2.8}$$

Постоянные a и b определяются по формулам (1.10) и (1.12), а $c_1 = -2c / \ln d$, где c вычисляется по формуле (1.13).

Частные случаи.

а) Оба цилиндра имеют одинаковую температуру, $\theta_0 = 0$. Постоянные a, b и c вычисляются согласно (1.14). Максимальная температура, равная $\ln a$, достигается при $\eta = 0$ или $\xi = \sqrt{d}$.

б) Внутренний цилиндр теплоизолирован $d\theta / d\xi = 0$ при $\xi = d$. Постоянные a, b, c вычисляются по формулам (1.15).

При $\theta_0 = 0$ в пределе при $k \to 0$, согласно (1.16), имеем $\theta \equiv 0$, $w = {}^1/{}_2 (1 + \eta)$, или $\theta \equiv 0$, $v = \ln \xi / \ln d$. Последнее после приведения к одинаковым переменным совпадает с решением соответствующей задачи в изотермической постановке [1].

§ 3. Течение между двумя вращающимися цилиндрами. Пусть вязкая жидкость находится между двумя соосными бесконечными цилиндрами, внутренний из которых неподвижен, а внешний вращается в сторону увеличения угла φ с постоянной угловой скоростью Ω. Радиусы и температуры этих цилиндров соответственно R_0, R_1 и T_0, T_1.

Задача в такой постановке приложима к вискозиметрии для учета разогрева массы от внутреннего трения, что особенно важно при измерении вязкости сильно вязких жидкостей, где неучет разогрева может привести к существенным ошибкам. Для случая гиперболической зависимости вязкости от температуры этот вопрос изучался в работе [3].

Движение жидкости описывается системой уравнений, которую в безразмерной форме можно записать так:

$$\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\theta}\xi^3 \frac{d\omega'}{d\xi}\right) = 0, \qquad \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + ke^{-\theta}\left(\xi \frac{d\omega'}{d\xi}\right)^2 = 0, \quad \left(\omega' = \frac{\omega}{\Omega}\right) \tag{3.1}$$

Здесь ξ, θ и k такие же, как и в предыдущих случаях (в выражении для k величина $V = \Omega R_1$).

Граничные условия

$$\omega' = 1, \quad \theta = 0 \text{ при } \xi = 1, \qquad \omega' = 0, \theta = \theta_0 \text{ при } \xi = d \;\; (d = R_0/R_1) \tag{3.2}$$

Из первого уравнения (3.1) имеем

$$e^{-\theta}\xi^3 \frac{d\omega'}{d\xi} = c_1 \tag{3.3}$$

Исключая производную угловой скорости из (3.1) при помощи (3.3), получим

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi}+\frac{kc_1^2}{\xi^4}e^{\theta}=0 \qquad (3.4)$$

Сделав замену

$$\theta = u + 2\ln\xi, \qquad \eta = 1 - 2\ln\xi / \ln d \qquad (3.5)$$

уравнения (3.3) и (3.4) можно записать в виде

$$e^{-u}\frac{d\omega'}{d\eta}=c, \qquad \frac{d^2u}{d\eta^2}+kc^2e^u=0 \qquad \left(c=-\frac{c_1\ln d}{2}\right) \qquad (3.6)$$

Граничные условия (3.2) при этом примут вид

$$\omega'=1, \quad u=0 \quad \text{при } \eta=1, \qquad \omega'=0, \quad u=\theta_0-2\ln d \quad \text{при } \eta=-1 \qquad (3.7)$$

Таким образом, снова приходим к задаче, рассмотренной в первом параграфе. Теперь можно выписать окончательные выражения для профилей температур и угловых скоростей для задачи течения жидкости между двумя вращающимися цилиндрами

$$\theta=\ln a\xi^2-2\ln\operatorname{ch}\left(b-c_1\sqrt{{}^1/_2ak}\,\ln\sqrt{d}/\xi\right) \qquad (3.8)$$

$$\omega'=1-\sqrt{2a/k}\left[\operatorname{th}\left(b-c_1{}^1/_2\ln d\sqrt{{}^1/_2ak}\right)-\operatorname{th}\left(b-c_1\sqrt{{}^1/_2ak}\,\ln\sqrt{d}/\xi\right)\right] \qquad (3.9)$$

Постоянные интегрирования a, b, c_1, согласно (1.10), (1.12), (1.13), (3.5) и (3.6), записываются так:

$$a=1+{}^1/_2k^{-1}\left({}^1/_2k+e^{\theta_0}/d^2-1\right)^2$$

$$b={}^1/_2\left[\ln\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)\pm\ln\left(\sqrt{ad^2e^{-\theta_0}}+\sqrt{ad^2e^{-\theta_0}-1}\right)\right] \qquad (3.10)$$

$$c_1=-\frac{1}{\ln d}\sqrt{\frac{2}{ak}}\left[\ln\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)+\ln\left(\sqrt{ad^2e^{-\theta_0}}+\sqrt{ad^2e^{-\theta_0}-1}\right)\right]$$

Верхний знак следует брать, если $k<k_0$, нижний — если $k>k_0$. В рассматриваемой задаче

$$k_0=2\left(\frac{1}{d^2}e^{\theta_0}-1\right)$$

Случай отсутствия теплообмена с одним из цилиндров здесь требует особого рассмотрения. В этой задаче не удается избавиться от трансцендентности системы, из которой определяются постоянные интегрирования.

Если температура θ_0 на поверхности внутреннего цилиндра известна, то постоянные интегрирования определяются по формулам (3.10).

Но в случае отсутствия теплообмена с внутренним цилиндром температура θ_0 сама является искомой величиной. Для ее определения имеем граничное условие $d\theta/d\xi=0$ при $\xi=d$. Удовлетворяя этому условию (3.8), получим

$$\operatorname{th}\left(b+{}^1/_2c_1\ln d\sqrt{2/ak}\right)=c_1^{-1}\sqrt{2/ak} \qquad (3.11)$$

Так как, по предположению, вращение происходит в сторону увеличения угла φ, то, согласно (3.3), $c_1>0$ и, следовательно, правая часть (3.13) больше нуля. Отсюда вытекает положительность аргумента гиперболического тангенса. Обращаясь ко второму уравнению (1.11), заключаем, что перед логарифмом следует брать знак плюс. Поэтому в формулах (3.10) необходимо брать верхний знак.

Преобразуем уравнение (3.11). Так как $\theta = \theta_0$ при $\xi = d$, то из (3.8) имеем

$$\mathrm{ch}^2 (b + {}^1/_2 c_1 \ln d \sqrt{{}^1/_2 ak}) = ad^2 e^{-\theta_0}$$

Откуда

$$\mathrm{th} (b + {}^1/_2 c_1 \ln d \sqrt{{}^1/_2 ak}) = \sqrt{1 - e^{\theta_0} / ad^2}$$

Используя это соотношение и подставляя c_1 из (3.10) в (3.11), получим

$$\left(1 - \frac{e^{\theta_0}}{ad^2}\right)^{1/2} \ln \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}}{\sqrt{ad^2 e^{-\theta_0}} + \sqrt{ad^2 e^{-\theta_0} - 1}} + \ln d = 0 \qquad (3.12)$$

Это уравнение в сочетании с выражением a (3.10) позволяет определить искомую температуру θ_0 на поверхности внутреннего цилиндра.

Необходимым элементом в вискозиметрических измерениях является знание крутящего момента. Вычислим его. На единицу длины наружного цилиндра действует момент $M = 2\pi R_1^2 \tau_{r\varphi} (R_1)$, где $\tau_{r\varphi} (R_1)$ — касательное напряжение на поверхности наружного цилиндра. Последнее равно

$$\tau_{r\varphi} (R_1) = \Omega \mu (T_1) \xi \left. \frac{d\omega'}{d\xi} \right|_{\xi=1}$$

Используя (0.1) и (3.3), можно окончательно написать

$$M = 2\pi R_1^2 \Omega c_1 \mu_0 \exp (-\beta T_1) \qquad (3.13)$$

В заключение отметим следующую особенность уравнения (1.5). Из теории теплового взрыва [12] известно, что это уравнение имеет решение не при всех значениях множителя δ при экспоненте, а только при значениях $\delta < \delta^*$, где δ^* — некоторое критическое значение (для плоского слоя $\delta^* = 0.88$ при $\theta_0 = 0$). Каждому значению δ соответствуют два решения, а следовательно и два профиля температур, причем в задаче теплового взрыва решение, соответствующее большему профилю, неустойчиво. При $\delta = \delta^*$ оба решения сливаются.

Исследование зависимости $\delta(k) = kc^2$ в данной задаче показывает, что эта кривая в некоторой точке $k = k^*$ достигает максимума, причем этот максимум в точности совпадает с δ^*. При переходе k через k^* решение переходит с одной ветви на другую. Неустойчивое решение в задаче теплового взрыва является обычным решением в этой задаче, соответствующим $k > k^*$.

Поступила 4 I 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, 1951.
2. Павлин А. К. Об одном случае интегрирования уравнений движения вязкой жидкости с переменным коэффициентом вязкости. ПММ, 1955, т. 19, вып. 5.
3. Гродзовский Т. Я., Регирер С. А. Движение ньютоновской жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами при наличии внутренних тепловых процессов, влияющих на вязкие свойства. Ж. техн. физ., 1956, т. 26, № 7.
4. Регирер С. А. Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой капельной жидкости. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
5. Каганов С. А., Яблонский В. С. О профиле скоростей ламинарного потока вязкой жидкости с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры. Изв. высш. учебн. завед. Нефть и газ, 1960, № 1.
6. Hausenblas H. Die nichtisotherme laminare Strömung einer zähen Flussigkeit durch enge Spalte und Kapillarröhren. Ingr.-Arch., 1950, B. 18, S. 151.
7. Hagg A. C. Heat effects in lubricating films. J. Appl. Mech., 1944, vol. 11, № 2.
8. Яблонский В. С., Каганов С. А. Течение Куэтта с учетом зависимости вязкости от температуры и теплоты трения. Изв. высш. учебн. завед., Нефть и газ, 1958, № 5.
9. Регирер С. А. Влияние теплового эффекта на вязкое сопротивление в установившемся одномерном течении капельной жидкости. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
10. Каганов С. А. Об установившемся ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале и круглой цилиндрической трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры. ПМТФ, 1962, № 3.
11. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. М. О гидродинамическом тепловом «взрыве». Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 1.
12. Франк-Каменецкий Д. А. Теплопередача и диффузия в химической кинетике. Изд-во АН СССР, 1947.