ПМТФ, № 5, 1980

УДК 519.6

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

А. И. Урусов, Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко

(*Новосибирск*)

При построении математических моделей прикладных задач, как правило, осуществляется предельный переход от дискретного к непрерывному. Получаемые математические модели очень часто являются весьма сложными для непосредственного изучения и большое количество практически важных задач поддается изучению только с помощью численных методов. При построении численных алгоритмов совершается обратный переход от непрерывного к дискретному. Получаемая таким образом дискретная модель должна быть максимально близкой по своим свойствам к исходной непрерывной модели. В настоящее время одним из наиболее широко применяемых методов перехода от непрерывной математической модели к дискретной является метод конечных разностей. В этом случае дифференциальные уравнения, описывающие исходную задачу, заменяются разностной схемой, которая может быть построена неединственным образом. С учетом вышеизложенного очевидна важность качественного исследования разностных схем.

При анализе свойств разностных схем для уравнений гиперболического типа широко используется метод дифференциального приближения [1], который позволяет строить новые разностные схемы с заранее определенными свойствами, проводить анализ свойств существующих и вновь создаваемых разностных схем, а также дать классификацию разностных схем по определенным свойствам.

В данной работе показывается, что с помощью дифференциальных приближений можно проводить асимптотический анализ разностной схемы, а также доказывается, что инвариантные разностные схемы ближе к исходной непрерывной математической модели, чем неинвариантные по отношению к группе непрерывных преобразований, допускаемой исходным дифференциальным уравнением.

1. Асимптотическое разложение решения разностной задачи Коши. Асимптотический анализ является одним из важных методов качественного исследования разностных схем. Возможность исследования асимптотических свойств разностных схем с помощью дифференциальных приближений изучалась в работах [2—5]. В работе [2] показана сходимость решений ряда схем в пространстве обобщенных функций к решению соответствующих дифференциальных приближений при $t \to \infty$ и фиксированном шаге по времени. В работах [3, 4] изучалось асимптотическое поведение решений однопараметрического семейства разностных схем и показано, что в некотором топологическом пространстве (при довольно жестких ограничениях на схемы и дифференциальные приближения) решения задачи Коши для дифференциальных приближений дают асимптотическое представление решения разностной задачи Коши. Далее, следуя работе [5], будет показано, что аналогичное утверждение, причем без существенных ограничений на разностные схемы и дифференциальные приближения, имеет место в линейном топологическом пространстве обобщенных функций Z'.

1. Для простоты рассмотрим случай одной независимой пространственной переменной, хотя все результаты справедливы и в многомерном случае.

Напомним некоторые определения и обозначения из теории обобщенных функций, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть S — пространство быстро убывающих функций вещественного аргумента, $D(R)$ — пространство финитных функций, носитель которых содержится на вещественной оси R, Z — пространство целых аналитических функций комплексного аргумента, удовлетворяющих следующему условию: для всякой функции $\varphi(z) \in Z$ и для любого $k\,(k \geqslant 0)$ существуют такие постоянные a, C_k, что справедливо неравенство

$$|z^k \varphi(z)| \leqslant C_k \exp\{a|\operatorname{Im} z|\}.$$

Пространства обобщенных функций (т. е. пространства линейных непрерывных функционалов) над пространствами S, $D(R)$, Z обозначаются соответственно через S', $D'(R)$, Z'.

Если f — обобщенная функция, то ее значение на основной функции обозначится так: (f, φ). Если $f(x)$ — суммируемая функция, то $(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx.$

На рассмотренных выше пространствах основных функций определены следующие операторы:

$$F[\varphi](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \varphi(x)\, dx, \tag{1.1}$$

$$F^{-1}[\varphi](\xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx, \quad D^m \varphi(x) = \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}, \quad T_y \varphi(x) = \varphi(x + y),$$

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\, \psi(x - y)\, dy, \quad \check{\varphi}(x) = \varphi(-x),$$

которые можно определить в пространствах обобщенных функций таким образом, чтобы в случае, когда обобщенная функция является основной, соответствующие операторы действовали на нее так же, как и в пространстве основных функций. Ниже приводятся определения операторов (1.1) в пространстве обобщенных функций (через f и g обозначим обобщенные функции, через φ — основную функцию):

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \ (F^{-1}[f], \varphi) = (f, F^{-1}[\varphi]),$$

$$(\check{f}, \varphi) = (f, \check{\varphi}), \ (D^m f, \varphi) = (-1)^m (f, D^m \varphi),$$

$$(T_y f, \varphi) = (f, T_{-y} \varphi), \ (f * \varphi)(x) = (f, T_{-x} \check{\varphi}),$$

$$(f * g, \varphi) = (g, \check{f} * \varphi).$$

Через δ_y будем обозначать обобщенную функцию, которая действует по формуле $(\delta_y, \varphi) = \varphi(y)$.

2. Рассмотрим разностную схему

$$\sum_{|\alpha| \leqslant q_1} b_\alpha^1 T_{\alpha h} f^{n+1} = \sum_{|\beta| \leqslant q_0} b_\beta^0 T_{\beta h} f^n \tag{1.2}$$

в пространстве обобщенных функций S'. Здесь $0 \leqslant q_0, q_1 < \infty$; b_α^1, b_β^0 — некоторые вещественные постоянные; h — параметр. Схему (1.2) можно записать в виде

$$w_1 * f^{n+1} = w_0 * f^n, \tag{1.3}$$

где

$$w_j = \Lambda_j \delta_0 = \sum_{|\alpha| \leqslant q_j} b_\alpha^j \delta_{-\alpha h}, \quad j = 0,1.$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие неравенства:

(1.4) $$F[w_j](x) \neq 0 \ \forall x \in R, \ j = 0,1.$$

П-формой дифференциального представления разностной схемы (1.2), удовлетворяющей условиям (1.4), будем называть уравнение

(1.5) $$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} F^{-1} [\ln F[w_0] - \ln F[w_1]] * f(t).$$

Для уравнений (1.2), (1.5) рассмотрим задачу Коши с начальным условием

(1.6) $$f^0 = f(0) = f_0.$$

В работе [5] доказано следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $f_0 \in S'$, тогда задачи Коши (1.2), (1.6) и (1.5), (1.6) имеют единственное решение в пространстве S'. Кроме того, а) если $f(t)$ — решение задачи (1.5), (1.6), то $\{f^n\}_{n=0}^{\infty}$ — решение задачи (1.2), (1.6), где $f^n = f(n\tau)$; б) если $\{f^n\}_{n=0}^{\infty}$ — решение задачи (1.2), (1.6), то существует однопараметрическое семейство обобщенных функций $f(t)$, являющееся решением задачи Коши (1.5), (1.6) и такое, что $f(n\tau) = f^n$.

В работе [5] также показано, что в некотором пространстве обобщенных функций, зависящем от разностной схемы (1.2), имеет место равенство

(1.7) $$F^{-1}[\ln F[w_j]] * f = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^j h^k (iD)^k f, \quad j = 0, 1.$$

Равенство (1.7) справедливо, вообще говоря, в более слабой топологии, чем топология пространства S'. В (1.7) через $\eta_k^j h^k$ обозначены коэффициенты разложения функции $\ln F[w_j](x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$, т. е. $\ln F[w_j](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^j h^k x^k$.

3. Покажем, что правую часть в (1.7) можно понимать как асимптотическое разложение обобщенной функции $F^{-1}[\ln F[w_j]]*f$ при $h \to 0$ в топологическом пространстве S'.

Напомним, что формальный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k$ называется асимптотическим разложением функции $\varphi(h)$ при $h \to 0$, если для всякого натурального N

$$\lim_{h \to 0} \left[\varphi(h) - \sum_{k=0}^{N} a_k h^k \right] \Big/ h^N = 0.$$

Это записывается следующим образом:

$$\varphi(h) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k \qquad (h \to 0).$$

Аналогично определяется асимптотическое разложение обобщенных функций, зависящих от параметра: ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k h^k$ называется асимптотическим разложением однопараметрического семейства обобщенных функций

$f(h)$ ($f(h) \in S'$, $f_k \in S' \forall k$) при $h \to 0$, если для любой основной функции $\varphi \in S$ справедливо соотношение $(f(h), \varphi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} h^k (f_k, \varphi)$ $(h \to 0)$.

Можно показать, что если $f(h) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k h^k$ $(h \to 0)$, то $F[f] \sim \sim \sum_{k=0}^{\infty} F[f_k] h^k$ $(h \to 0)$. Кроме того, для каждого фиксированного $x \in R$ (здесь и далее индекс j опущен)

$$\ln F[w](x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k x^k h^k \quad (h \to 0).$$

Покажем, что для любой основной функции $\varphi \in S$ произведение

$$\psi_N(h) = \left\{ \ln F[w](x) - \sum_{k=0}^{N} \eta_k x^k h^k \right\} \varphi(x)/h^N$$

сходится к нулю при $h \to 0$ в топологии пространства S.

Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k x^k h^k$ сходится к функции $\ln F[w](x)$ при $|xh| \leqslant r_0$ для некоторого $r_0 > 0$, то

$$\left| \ln F[w](x) - \sum_{k=0}^{N} \eta_k x^k h^k \right| \leqslant C_0(h) h^N |x|^N \quad \text{при} \quad |xh| \leqslant r_0,$$

где $C_0(h) \to 0$ при $h \to 0$. Далее, при $x \in R$

$$|\ln F[w](x)| \leqslant C_1 (1 + |xh|)^{M_1}$$

для некоторых констант C_1 и M_1, следовательно, $|\ln F[w](x)| \leqslant C_2 |xh|^{M_2}$ при $|xh| \geqslant r_0$, $M_2 > N$, отсюда получаем

$$\left| \ln F[w](x) - \sum_{k=0}^{N} \eta_k x^k h^k \right| \leqslant \begin{cases} C_0(h) h^N |x|^N, & |xh| \leqslant r_0, \\ C h^M |x|^M, & |xh| \geqslant r_0. \end{cases}$$

Поэтому $\forall \varphi(x) \in S$

$$\sup_{x \in R} \left| \left(\ln F[w](x) - \sum_{k=0}^{N} \eta_k x^k h^k \right) \varphi(x)/h^N \right| \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Аналогично можно показать, что

$$\sup_{x \in R} (1 + |x|^2)^M \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\psi_N \varphi) \right| \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Таким образом, для любой основной функции $\varphi(x) \in S$ однопараметрическое семейство функций $\varphi_N(h)$ сходится к нулю в S при $h \to 0$. Так как для всякой обобщенной функции $f \in S'$

$$(\psi_N f, \varphi) = (f, \psi_N \varphi) \to 0 \text{ при } h \to 0,$$

то доказано следующее утверждение:

Теорема 2. Для всякой обобщенной функции $f \in S'$

$$F^{-1}[\ln F[w]] * f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k h^k (iD)^k f \quad (h \to 0).$$

в пространстве S'.

Пусть $P_m^j = P_m^j(hx) = \sum_{k=0}^{m} \eta_k^j h^k x^k$. Уравнение

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{\tau} F^{-1}\left[P_m^0 - P_m^1\right] * f \tag{1.8}$$

будем называть дифференциальным приближением разностной схемы (1.2).

Рассмотрим следующие задачи Коши:

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{\tau} F^{-1}[\ln F[w]] * f, \quad f|_{t=0} = f_0 \in S'; \tag{1.9}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{\tau} F^{-1}[P_m] * f, \quad f|_{t=0} = f_0 \in S', \tag{1.10}$$

где $P_m = \sum_{k=0}^{m} \eta_k h^k x^k$; τ, h-параметры; w-конечная линейная комбинация обобщенных функций $\delta_{\alpha h}$, удовлетворяющая условию (1.4). В этом случае ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k h^k x^k$ сходится к функции $\ln F[w](hx)$ в некоторой области $\Omega \subset R$, т. е. при $xh \in \Omega$. Пусть $\mathcal{R}_{\tau,h}(t)$, $\mathcal{R}_{m,\tau,h}(t)$ —разрешающие операторы задач (1.9), (1.10) соответственно.

Видно, что

$$\mathcal{R}_{\tau,h}(t) f = F^{-1}[(F[w])^{t/\tau}] * f, \quad \mathcal{R}_{\tau,h}(t): S' \to S' \tag{1.11}$$

(последнее следует из теоремы 1);

$$\mathcal{R}_{m,\tau,h}(t) f = F^{-1}\left[e^{tP_m/\tau}\right] * f, \quad \mathcal{R}_{m,\tau,h}(t): S' \to Z'. \tag{1.12}$$

Теорема 3. Пусть $f_{\tau,h}(t)$ — решение задачи (1.9), а $f_{m,\tau,h}(t)$ — решение задачи (1.10). Тогда в Z' $f_{\tau,h}(t) - f_{m,\tau,h}(t) = o\left(h^m\right)$ $(h \to 0)$.

Доказательство. Необходимо показать, что $\forall \psi \in Z$

$$\lim_{h\to 0} ([f_{\tau,h}(t) - f_{m,\tau,h}(t)], \psi)/h^m = 0. \tag{1.13}$$

Так как $f_{\tau,h}(t) = \mathcal{R}_{\tau,h}(t) f_0$, $f_{m,\tau,h}(t) = \mathcal{R}_{m,\tau,h}(t) f_0$, то из (1.11), (1.12) следует, что соотношение (1.13) эквивалентно равенству

$$\lim_{h\to 0} \left(\left((F[w])^{t/\tau} - e^{tP_m/\tau}\right) g_0, \varphi\right)/h^m = 0 \quad \forall \varphi \in D(R), \tag{1.14}$$

где $g_0 = F[f_0]$. Пусть $g(h; x) = h^{-m}\left(e^{\ln F[w] - P_m} - 1\right)$. Тогда для всякого целого неотрицательного k и любого компакта K $D^k g(h; x) \to 0$ равномерно на K при $h \to 0$ и $\forall \varphi \in D(R)$ $g(h; x)\varphi(x) \to 0$ в $D(R)$ при $h \to 0$. Так как $g_0 \in S'$, то $(gg_0, \varphi) \to 0$ при $h \to 0$ $\forall \varphi \in D(R)$. Последнее означает, что

$$\lim_{h\to 0} \left(e^{P_m}\left(e^{\ln F[w] - P_m} - 1\right) g_0, \varphi\right)/h^m = \lim_{h\to 0} \left(\left(F[w] - e^{P_m}\right) g_0, \varphi\right)/h^m = 0.$$

Таким образом, доказано равенство (1.14), а следовательно, и утверждение теоремы.

Используя теоремы 1 и 3, можно доказать

Следствие. Пусть $f_0 \in S'$, $\{f_h^n\}_{n=0}^{\infty}$ — решение задачи Коши (1.2), (1.6), а $f_{m,\tau,h}(t)$ — решение задачи Коши (1.8), (1.6), тогда

$$f_h^n - f_{m,\tau,h}(n\tau) = o\left(h^m\right) \quad (h \to 0)$$

в топологическом пространстве Z'.

До сих пор рассматривалось двухпараметрическое семейство разностных схем (1.2) (зависящих от параметров τ и h) и исследовалось поведение решения задачи Коши при стремлении параметра h к нулю. На практике обычно предполагается некоторая связь между параметрами τ и h. Например, для разностных схем вида (1.2), аппроксимирующих уравнения гиперболического типа, естественной является связь $\tau = \varkappa h$, $\varkappa = \mathrm{const}$. Покажем, что и при наличии связи между параметрами τ и h имеет место утверждение, аналогичное теореме 3.

Пусть $\tau = \varkappa h^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant l$, $\varkappa = \mathrm{const}$ и в разложении функции $\ln F\ [w]$ в ряд Тейлора в окрестности нуля первые l коэффициентов $\eta_0, \ldots$ $\ldots, \eta_{l-1}$ равны нулю. Тогда $\frac{1}{\tau} \ln F\,[w]\,(hx) = \frac{1}{\varkappa} x^\alpha \sum_{k=l}^{\infty} \eta_k (hx)^{k-\alpha}$.
Так как в $D(R)$ при $h \to 0$

$$\frac{1}{h^{m-\alpha}} \left[\frac{1}{\varkappa h^\alpha} \ln F\,[w]\,(hx) - \frac{1}{\varkappa} x^\alpha \sum_{k=l}^{m} \eta_k (hx)^{k-\alpha} \right] \to 0,$$

то справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. Пусть $\tau = \varkappa h^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant l$, $\alpha = \mathrm{const}$, $\varkappa = \mathrm{const}$, $\eta_0 = \eta_1 = \ldots = \eta_{l-1} = 0$, $f_h(t)$ — решение задачи (1.9), $f_{m,h}(t)$ — решение задачи

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{\varkappa} F^{-1} \left[\sum_{k=l}^{m} \eta_k h^{k-\alpha} x^k \right] * f, \quad f|_{t=0} = f_0 \in S', \quad m \geqslant l,$$

тогда $f_h(t) - f_{m,h}(t) = o\left(h^{m-\alpha}\right)$ при $h \to 0$ в Z'.

Используя теоремы 1 и 4, можно доказать

Следствие. Пусть $\tau = \varkappa h^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant l$, $f_0 \in S'$, $\{f_h^n\}_{n=0}^{\infty}$ — решение задачи Коши (1.2), (1.6), а $f_{m,h}(t)$ — решение задачи (1.8), (1.6). Пусть $h \to 0$ так, что $t = n\tau = \mathrm{const}$. Если $\eta_0^0 - \eta_0^1 = \eta_1^0 - \eta_1^1 = \ldots = \eta_{l-1}^0 - \eta_{l-1}^1 = 0$, то $f_h^n - f_{m,h}(n\tau) = o\left(h^{m-\alpha}\right)$ при $h \to 0$ в Z'.

2. Инвариантные разностные схемы. В работе [6] было введено понятие инвариантности разностных схем. Численные расчеты, выполненные для различных модельных задач [1,7—9], показали, что инвариантные разностные схемы лучше, чем неинвариантные, передают качественную картину решения.

1. Пусть дифференциальное уравнение

(2.1) $$u_t = Lu$$

(L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, содержащий лишь дифференцирование по пространственной переменной x) допускает группу преобразований G [10] и T — оператор из G, который отображает пространство переменных (t, x, u) в себя, т. е. $T(t, x, u) = (t', x', u')$, где $t' = t'(t, x, u)$; $x' = x'(t, x, u)$; $u' = u'(t, x, u)$. Если функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (2.1), то функция u', рассматриваемая как функция переменных (t', x'), также удовлетворяет уравнению (2.1). Таким образом, оператор T, действующий в конечномерном эвклидовом пространстве, порождает некоторый оператор T', определенный на множестве решений уравнения (2.1) и переводящий одно решение в другое: $u' = T'u$.

Пусть для (2.1) поставлены корректно две задачи Коши

(2.2) $$u|_{t=t_0} = \varphi(x);$$

(2.3) $$u|_{t=t_0'} = \psi(x)$$

и пусть $\varphi(x) = v(t, x)|_{t=t_0}$, $\psi(x') = v'(t', x')|_{t'=t'_0}$, где $v(t, x)$ — некоторое решение уравнения (2.1), $v' = T'v$. Тогда в силу корректности задач Коши (2.1), (2.2) и (2.1), (2.3) для решений этих задач будет справедливо равенство

$$u' - T'u = 0, \quad (2.4)$$

где $u'(t', x')$ — решение задачи (2.1), (2.3), а $u(t, x)$ — решение задачи (2.1), (2.2).

2. Пусть уравнение (2.1) аппроксимируется разностной схемой

$$u^{n+1} = \Lambda u^n \quad (2.5)$$

порядка аппроксимации k. Рассмотрим второе дифференциальное приближение схемы (2.5)

$$u_t = Lu + h^k L_1 u + h^{k+\beta} L_2 u, \ \beta > 0, \quad (2.6)$$

где L_1 и L_2— некоторые дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.

Для схемы (2.5) и уравнения (2.6) поставим две задачи Коши с начальными условиями

$$u^0 = u(0) = \varphi; \quad (2.7)$$

$$u^0 = u(0) = \psi, \quad (2.8)$$

где функции φ и ψ удовлетворяют сформулированным выше условиям (см. (2.2), (2.3)).

Пусть u'_h, u_h — решения задач (2.5), (2.8) и (2.5), (2.7) соответственно, а v и w — решения задач (2.6), (2.7) и (2.6), (2.8).

Теорема 5. Вообще говоря, $u'_h - T'u_h = O(h^k)$, но если разностная схема (2.5) инвариантна относительно группы G [6], то $u'_h - T'u_h = O(h^{k+\beta})$.

Доказательство. Пусть $v' = T'v$, тогда функция $v'(t', x')$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} = Lv' + h^k\left(L_1 v' + L'_1 v'\right) + h^{k+\beta}\left(L_2 v' + L'_2 v'\right),$$

где L'_1 и L'_2 — некоторые операторы, зависящие от группы G.

Отсюда следует, что в пространстве Z' справедливо равенство $w - v' = O(h^k)$, если $L'_1 \not\equiv 0$, или $w - v' = O(h^{k+\beta})$, если $L'_1 \not\equiv 0$ (последнее означает, что схема (2.5) инвариантна относительно группы непрерывных преобразований G). Так как из теоремы 4 следует, что в Z' $u'_h = w + o(h^{k+\beta})$ и $u_h = v + o(h^{k+\beta})$, то окончательно получаем следующие равенства:

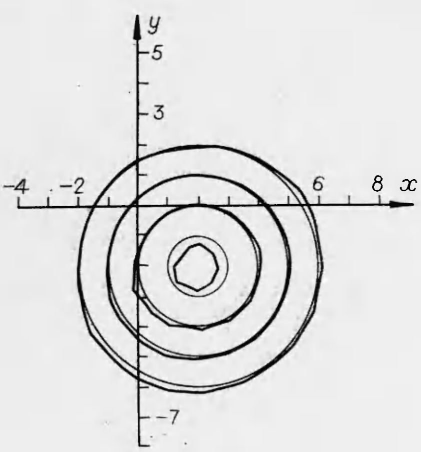
$$u'_h - T'u_h = (u'_h - w) + (w - T'v) + T'v - T'u_h.$$

Откуда следует, что $u'_h - T'u_h = O(h^k)$, если $L'_1 \not\equiv 0$ (схема не инвариантна), и $u'_h - T'u_h = O(h^{k+\beta})$, если $L'_1 \equiv 0$ (схема инвариантна).

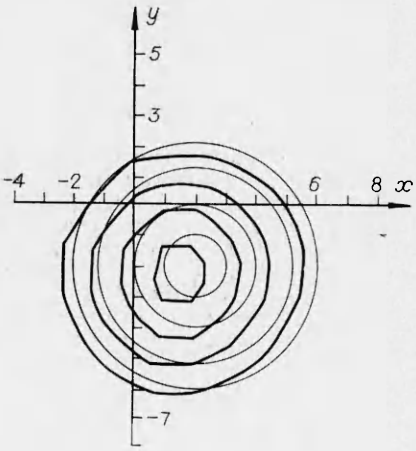
3. В работе [9] было проведено сравнение результатов расчета по различным инвариантным и неинвариантным схемам расщепления для следующей модельной задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha y\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha x\frac{\partial u}{\partial y}; \quad (2.9)$$

$$u(0, x, y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{u_0}p, & p^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant u_0^2, \\ 0, & p^2 > u_0^2. \end{cases} \quad (2.10)$$

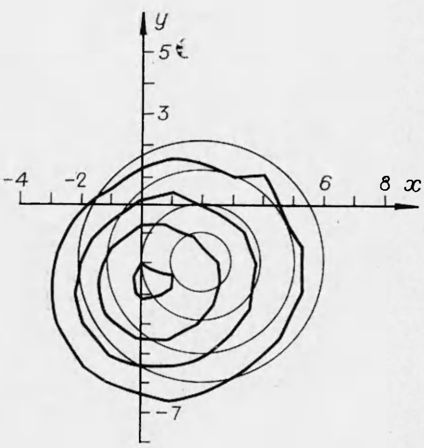


Фиг. 1



Фиг. 2

Задача (2.9), (2.10) описывает вращение кругового конуса (с высотой, равной 1, радиусом основания u_0) вокруг начала координат с периодом $2\pi/\alpha$. Уравнение (2.9) допускает преобразование поворота. Представляется целесообразным провести более детальное сравнение результатов численного расчета по инвариантной схеме расщепления 2-го порядка аппроксимации с различными известными схемами 2-го порядка. В качестве таких схем были выбраны: схема Лакса — Вендроффа (модификация Рихтмайера [11]), схема Мак-Кормака [12].



Фиг. 3

Расчеты показали, что инвариантная разностная схема расщепления передает особенности точного решения более верно. На фиг. 1—3 приведены линии уровня $u(t, x, y) = c = \text{const}$ ($c = 0{,}2$; $0{,}4$; $0{,}6$; $0{,}8$) точного (окружности) и разностного решений на момент времени $t = 3$, полученного по инвариантной схеме (фиг. 1), по схеме Мак-Кормака (фиг. 2) и схеме Лакса—Вендроффа (фиг. 3). Расчеты проводились на прямоугольной сетке, $\Delta t/\Delta x = 0{,}01$, $\Delta t/\Delta y = 0{,}02$, Δt, Δx, Δy — шаги по времени и пространству соответственно.

Поступила 9 IV 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шокин Ю. И.** Метод дифференциального приближения. Новосибирск, Наука, 1979.
2. **Шокин Ю. И.** Об асимптотическом поведении решений разностных схем.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1969, № 3, вып. 1.
3. **Кузнецов Н. Н.** Слабоустойчивые конечно-разностные аппроксимации дифференциальных уравнений.— ЖВММФ, 1971, т. 11, № 6.
4. **Кузнецов Н. Н.** Асимптотика решений конечно-разностной задачи Коши.— ЖВММФ, 1972, т. 12, № 2.

5. **Шокин Ю. И., Урусов А. И.** Дифференциальные представления разностных схем в пространствах обобщенных функций.— В кн.: Числен. методы мех. сплош. среды. Новосибирск, 1979, т. 10, № 4.
6. **Яненко Н. Н., Шокин Ю. И.** О групповой классификации разностных схем для системы одномерных уравнений газовой динамики.— В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Л., Наука, 1970.
7. **Федотова З. И.** Инвариантные разностные схемы типа предиктор — корректор для одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах.— В кн.: Труды V Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1975.
8. **Федотова З. И.** Анализ свойств аппроксимационной вязкости некоторых разностных схем для двумерных уравнений газовой динамики. Препринт № 10 ИТПМ СО АН СССР, 1979.
9. **Шокин Ю. И., Урусов А. И.** Об инвариантных разностных схемах расщепления.— В кн.: Труды IV Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1973.
10. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.
11. **Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач. М., Мир, 1972.
12. **MacCormack R. W., Paullay A. J.** The influence of the computational mesh on accuracy for initial value problems with discontinuos or nonunique solutions.— Computers and Fluids, 1974, vol. 2, N 3/4.

УДК 533.6.011

О ДВУХ КЛАССАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

1. В [1] был найден класс решений нестационарных пространственных уравнений газовой динамики, когда компоненты вектора скорости линейно зависят от всех пространственных координат x_1, x_2, x_3. Такие решения описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой временной переменной t, они нашли применение, в частности, при изучении динамики гравитирующего газового эллипсоида [2]. Некоторые решения уравнений Навье — Стокса для пространственных установившихся течений несжимаемой вязкой жидкости с линейной зависимостью компонент u_i вектора скорости $\mathbf{u}$ от двух координат x_1, x_2 при специальном виде давления p описаны в [3].

Ниже будут рассмотрены решения уравнений динамики идеального газа, для которых u_i, энтропийная функция W и функция $Q = \rho^{\gamma-1}$, где ρ — плотность, γ — показатель адиабаты в уравнении состояния $p = W\rho^{\gamma}$, линейно зависят от части пространственных координат. Задача изучения таких движений в отличие от [1] сводится в общем случае к исследованию совместности переопределенных систем уравнений в частных производных достаточно сложной структуры.

Далее будут приведены некоторые достаточные условия, когда соответствующие переопределенные системы сводятся к определенным системам, для которых число уравнений совпадает с числом неизвестных функций и которые обладают достаточно широким произволом в решениях. Тем самым устанавливается непустота рассматриваемых классов решений, а построенные конкретные примеры течений доказывают содержатель-