

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
НАД ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. В. Иванов, Г. П. Черный

(Москва)

Показано, что при определенных предположениях задача распространения электромагнитного возмущения становится автомодельной, и определены параметры автомодельности. Сформулирован принцип отсутствия отражения и показано, что он эквивалентен граничным условиям М. А. Леонтовича. Получены решения задачи распространения различных компонент поля импульсного сигнала диполя произвольной ориентации и исследованы их свойства.

Решение задачи о распространении электромагнитного импульса вдоль плоской импедансной поверхности представляет интерес при интерпретации результатов наблюдения электромагнитных полей, изменяющихся за времена порядка 10 мксек. Большой интерес представляет определение импульсной функции трассы распространения, описывающей искажение при распространении δ -образного импульса. В работах [1-3] импульсная функция исследована для частного случая наземного расположения источника и точки наблюдения. Источник предполагается точечным вертикальным диполем, а трасса — плоской поверхностью с проводимостью $\sigma = 1/4\gamma\pi^{-1}$ и диэлектрической проницаемостью ϵ .

Существование теоремы взаимности [4] приводит к тому, что для полного решения задачи об искажении поля произвольно ориентированного диполя необходимо определить четыре функции: K_{vv} , K_{hv} , K_{hh} и M — соответственно вертикальную компоненту диполя, поляризованного по нормали к поверхности, вертикальную и горизонтальную компоненты диполя, поляризованного в плоскости распространения параллельно земной поверхности, и диполя, поляризованного по нормали к плоскости распространения, не ограничиваясь случаем наземного распространения.

Ниже рассматриваются только свойства функций K_{vv} , K_{hv} , K_{hh} , так как функция M практически на всех высотах сводится к соответствующему коэффициенту Френеля во временном представлении.

Функции ослабления полей точечных монохроматических диполей вводятся в [4, 5] как безразмерные величины. Поэтому импульсные функции имеют размерность обратного времени. Следовательно, если решение задачи распространения δ -импульсного сигнала обладает автомодельностью, то автомодельной будет не импульсная функция $K(t)$, а переходная функция

$$P(t) = \int_{-\infty}^t K(t') dt'$$

1. Автомодельность решения. Характерные времена импульсной функции. Сигнал в точке наблюдения состоит из прямого и отраженного. Свойства прямого очевидны — его функция распространения равна $\delta(t - R/c)$, R — расстояние от источника до точки наблюдения, c — скорость света в вакууме. В случае трассы, симметричной относительно точек приема и излучения, сигнал зависит только от суммы высот источника и приемника, а не отдельно от каждой из них. Поэтому ниже источник предполагается расположенным на поверхности, в начале цилиндрической системы координат ρ , φ , z с осью z , нормальной к поверхности. В этом случае задача содержит на один размерный параметр меньше. Переходная функция будет функцией двух параметров, если применимы условия М. А. Леонтовича [6] и токами смещения можно пренебречь. Действительно, в этом случае $P(t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{1}{c} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t'^2} \right)_{z=0} \frac{dt'}{[\pi\gamma(t-t')]^{1/2}} \quad (1.1)$$

Для небольших высот $R = \rho + z^2 / 2\rho$. Перейдем в (1.1) к переменным

$$\tau = t - \frac{\rho}{c} - \frac{z^2}{2\rho c}, \quad \eta = t + \frac{\rho}{c} + \frac{z^2}{2\rho c} \quad (1.2)$$

Тогда (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{4}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \partial \eta} - \frac{2z}{c\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial \tau} - \frac{2}{c\rho} \frac{\partial P}{\partial \tau} = 0 \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{1}{c} \int_0^\tau \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \tau'^2} \right)_{z=0} \frac{d\tau'}{[\pi\gamma(\tau - \tau')]^{1/2}}$$

Введем безразмерные переменные

$$\tau_1 = a\tau, \quad \eta_1 = b\eta, \quad z_1 = dz, \quad b / da^{1/2} = 1, \quad a^2 / b = 1$$

Уравнения (1.3) относительно такой замены инвариантны. При этом одна из величин a , b , d может быть выбрана произвольно. Положив $a = t^{-1}$, получим

$$P(\rho, z, t) = P(1, \rho t^{-2}, z t^{3/2})$$

т.е. переходная функция зависит или от величин ρt^{-2} , $z t^{3/2}$, или от их любых комбинаций. В дальнейшем используются комбинации

$$A = t \left(\frac{c\gamma}{2\rho} \right)^{1/2}, \quad B = \frac{z(\gamma t)^{1/2}}{2\rho} \quad (1.4)$$

Отсюда видно, что характерными временами изменения импульсной функции будут

$$t_1 = \frac{4\rho^2}{z^2\gamma}, \quad t_2 = \frac{1}{c} \sqrt{2\rho} z^2, \quad \alpha = \left(\frac{c}{\gamma\rho} \right)^{1/4}$$

т.е. проведенный выше анализ справедлив, если $\alpha^2 \ll 1$, $z/\rho \ll 1$. Для обычных в земных условиях значений γ условие $\alpha^2 \ll 1$ выполняется на расстоянии от источника, большем 300 м. Условие $z/\rho \ll 1$, как окажется ниже, практически несущественно, так как еще при высотах, удовлетворяющих ему, решение практически соответствует распространению плосковолнового импульса, который анализируется с помощью коэффициента Френеля [7].

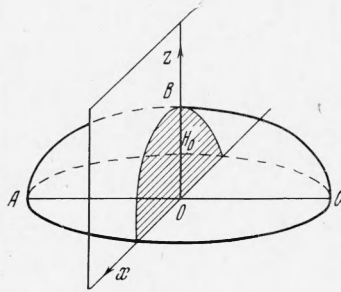
В переменных A , B уравнения (1.3) принимают вид

$$\frac{\partial F}{\partial A} + A \frac{\partial^2 F}{\partial A^2} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial A \partial B} + \frac{A}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial B^2} = 0 \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial B} \right)_{B=0} = \frac{1}{\sqrt{A}} \int_0^A \left(\frac{\partial^2 F}{\partial A'^2} \right)_{B=0} \frac{dA'}{[\pi(A - A')]^{1/2}}, \quad F(A, B) = \rho P(A, B) \quad (1.6)$$

Выясним смысл времен t_1 , t_2 . В случае наземного расположения источника и приемника параметр $B = 0$ и переходная функция определяется только параметром A , что совпадает с результатами [1], т.е. для выяснения смысла A достаточно проанализировать случай наземного распространения сигнала. С другой стороны, при $\rho \rightarrow \infty$, так что $z/\rho = \text{const}$, $A \rightarrow 0$, $B = \text{const}$, т.е. решение будет определяться параметром B . В этом случае поле диполя вблизи точки наблюдения мало отличается от поля плоской волны. Следовательно, решение $F(0, B)$ описывает искажение плосковолнового импульса при отражении от границы раздела вакуум — почва.

Отраженный сигнал излучается возникающими в почве токами, направление которых связано как с углом падения, так и с характеристиками свойств почвы. Поэтому он спадает ко времени, когда направление токов становится параллельным направлению переизлучения, т. е. выполняется условие $E_{z1} / E_p = \sin \psi$ (индексом 1 снабжаются здесь поля в почве, $\sin \psi = z / \rho$).



Фиг. 1

Но из граничного условия $E_1 = E / \varepsilon$ следует $E_{z1} = \gamma^{-1} \partial E_z / \partial t$ и из условия М. А. Леонтовича имеем, соответственно, $E_p \sim E_z / (\gamma t)^{1/2}$. Отсюда [следует, что отраженный сигнал спадает за времена, определяемые условием $\sqrt{\gamma t} \sin \psi = 1$, что совпадает с условием $B = 1$.

Для выяснения смысла A заметим, что при распространении сигнала вдоль поверхности в точку наблюдения в момент t успеет прийти только излучение, распространяющееся внутри эллипсоида, определяемого следующим условием: расстояние от точки эллипсоида до источника плюс расстояние от

точки эллипсоида до точки наблюдения равно ct .

При малых временах малая ось эллипсоида (фиг. 1) $H_0 \sim (ct\rho)^{1/2}$. На участках AB , BC распространение сигнала происходит чисто волновым образом. Поэтому сигнал в точке наблюдения спадает за времена t такие, что $\sqrt{\gamma t} \sin \psi \sim 1$, $\sin \psi \sim H_0(t) / \rho$, т. е., используя выражение $H_0 \sim (ct\rho)^{1/2}$, за времена, определяемые условием $t(c\gamma/2\rho)^{1/2} \sim 1$, что совпадает с условием $A \sim 1$.

Таким образом, переходная функция будет автомодельной в переменных A , B , если применимы условия М. А. Леонтовича и токами смещения можно пренебречь.

Полученные выражения для характерных времен $t_1 = 1 / \gamma \sin^2 \psi$ и $t_2 = (2\rho / c\gamma)^{1/2}$ показывают, что, если требуется на основе измерений анализировать трассу, необходимо для определения расстояний собирать информацию с разрешением Δt не хуже t_2 , а для определения высоты — не хуже t_1 .

2. Модификация граничных условий М. А. Леонтовича. Для анализа влияния поверхности на сигнал достаточно определить поле на самой поверхности. Эта задача проще определения полей в пространстве, так как содержит на один параметр меньше. Из объема к поверхности идет дифракционный поток энергии, свойства которого определяются пространственным распределением энергии поля в окрестности поверхности. На достаточно больших расстояниях от источника поверхность сама диктует структуру подтекающего потока и полей в окрестности поверхности. Математическим выражением этого обстоятельства являются граничные условия М. А. Леонтовича, которые эквивалентны следующему принципу: к поверхности подтекает такой поток, который она в состоянии поглотить без отражения. Для этого необходимо, чтобы угол падения равнялся углу Брюстера [7], или выполнялось соотношение

$$E_p(\omega) = (\omega / i\gamma)^{1/2} E_z(\omega) \quad (2.1)$$

Однако эта форма граничных условий не всегда удобна, так как в волновое уравнение на поверхности $z = 0$ входит величина $\partial^2 E_z / \partial z^2$, не определенная при $z = 0$. Однако из того, что поле при распространении вдоль поверхности зависит только от $(t - \rho / c) / \rho^{1/2}$, следует, что

при $ct - \rho \ll \rho$ уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ принимает вид

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_\rho}{c \partial t} \quad (2.2)$$

Отсюда, используя (2.1), получаем

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{1}{c} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial t'^2} \right)_{z=0} \frac{dt'}{[\pi \gamma (t-t')]^{1/2}} \quad (2.3)$$

Так как (2.2) верно в некоторой окрестности поверхности, его можно дифференцировать по z . Кроме того, в силу теоремы взаимности [4] условие (2.3) справедливо и для $E_\rho(z, t)$, т. е. для $\partial^2 E_z / \partial z^2$ получим

$$\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right)_{t, \rho} = \frac{1}{\gamma c^2} \frac{\partial^3 E_z}{\partial t^3} \quad (2.4)$$

Это условие позволяет анализировать распространение импульса вдоль поверхности без решения пространственной задачи. Заметим, что поскольку естественно изучать распространение сигнала в зависимости от времени, отсчитанного от фронта, необходимо иметь соотношение типа (2.4) для величины $(\partial^2 E_z / \partial z^2)_{\tau, \rho}$.

Произведя замену переменных, получим

$$\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right)_{\tau, \rho} = \frac{1}{c^2 \gamma} \frac{\partial^3 \bar{E}_z}{\partial \tau^3} + \frac{1}{c \rho} \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \tau} \quad (2.5)$$

3. Функция распространения плосковолнового импульса (случай больших высот). На достаточно больших высотах решение задачи распространения δ -импульсного сигнала является функцией одного параметра B . При этом фронт сигнала можно считать плоским. Как видно из фиг. 2, в этом случае $c \Delta t = \Delta z \sin \psi$, так как при этом переходим к эквивалентной с точки зрения автомодельности точке пространства — времени.

Волновое уравнение (1.5) удовлетворяется при $A = 0$ тождественно, условие (1.6) после использования соотношения $c dt = \sin \psi dz$ приводит к уравнению

$$F(B_1) = \int_0^{B_1} \frac{dF}{dB_1'} \frac{dB_1'}{[\pi (B_1 - B_1')]^{1/2}}, \quad B_1 = B^2 \quad (3.1)$$

Решая (3.1) с условием $F(0) = 0$, получаем

$$F(B_1) = 2 \left(1 - \frac{2e^{B_1}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{B_1}}^{\infty} e^{-z^2} dz \right) \quad (3.2)$$

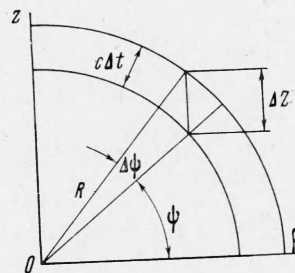
Легко показать, что импульсная функция плосковолнового сигнала $K(t)$, отвечающая данному $F(B_1)$, совпадает с функцией, получаемой с помощью преобразования Фурье из коэффициента Френеля волны, поляризованной в плоскости падения.

Для выяснения смысла функции распространения рассмотрим случай падения плосковолнового импульса по нормали к поверхности. Граничная задача для токов в почве $j(x, t)$ имеет вид

$$\frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

$$j(x, 0) = 0, \quad j(0, t) = \delta(t), \quad x > 0$$

(ось x совпадает с нормалью из вакуума в среду).



Фиг. 2

Решение такой задачи имеет вид

$$j(x, i) = \frac{x \sqrt{\gamma}}{2 \sqrt{\pi c t^{3/2}}} \exp\left(-\frac{x^2 \gamma}{4c^2 t}\right)$$

Отраженное поле в точке наблюдения в момент времени $t - R/c$ представляет собой поле, излученное этими токами

$$E(t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sqrt{\gamma}}{2 \sqrt{\pi c}} \int_0^{ct} \exp\left[-\frac{x^2 \gamma}{4c^2 (t-x/c)}\right] \frac{x dx}{(t-x/c)^{3/2}} \quad (3.4)$$

Это выражение содержит один параметр $x^2 \gamma / 4c^2 t$. Легко видеть, что это есть отношение глубины точки, в которой рассматривается ток, к глубине скин-слоя $\delta = c(t/\gamma)^{1/2}$. В случае $\psi \neq \pi/2$ интегрирование производится вдоль луча зрения, поэтому с x следует сравнить $\delta / \sin \psi$ — эффективную глубину скин-слоя. Отсюда следует, что в общем случае углов $\psi \neq \pi/2$ выражение для отраженного поля получается из (3.4) заменой $\gamma \rightarrow \gamma \sin^2 \psi$, так что в общем случае

$$K(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{2 \sqrt{B_1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp\left[-\frac{x^2 B_1}{1-x}\right] \frac{x dx}{(1-x)^{3/2}} \quad (3.5)$$

Заменой $z = x^2 / (1-x)$ это уравнение сводится к (3.2).

Обсудим вопрос о применимости полученной формулы. Она верна в случае, когда угол наклона фронта сигнала мало меняется на существенных временах, т. е. $\psi^{-1} \Delta \psi \ll 1$. Так как $\psi^{-1} \Delta \psi \sim z^{-1} \Delta z$, то $z^{-1} \Delta z \sim \Delta t c \rho z^{-2}$, т. е. сигнал можно рассматривать как плосковолновой до времен $t_0 \sim z^2 / c \rho$. Он остается плосковолновым при всех временах $t \ll \ll 1/\gamma \sin^2 \psi$, если $z \gg (\rho^3 c / \gamma)^{1/4}$.

Рассмотренная функция распространения описывает поведение при отражении вертикальной компоненты поля вертикального диполя. Однако для плосковолнового сигнала z и ρ компоненты поля связаны соотношением $E_\rho = -E_z \operatorname{tg} \psi$; $\operatorname{tg} \psi \approx \sin \psi$ для малых углов. Поэтому функция распространения ρ -компоненты поля вертикального диполя K_{hv} равна $-K_{vv} \sin \psi$. В силу теоремы взаимной функции K_{hv} описывает также поведение z -компоненты поля диполя, ориентированного вдоль ρ . Функция распространения ρ -компоненты такого диполя K_{hh} равна $-K_{hv} \sin \psi = K_{vv} \sin^2 \psi$.

4. Функция распространения импульса вдоль плоской поверхности. Используя граничное условие (2.5), волновое уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2 \gamma} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} - \frac{1}{c \rho} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{F}{\rho^2} = 0 \quad (4.1)$$

Из автомодельных свойств решения следует, что $F(t, \rho)$ — функция одного параметра $A = (t - \rho/c)(\gamma c / 2\rho)^{1/2}$, поэтому величины $\partial F / \partial \rho$, $\partial F / \partial t$ в (4.1), пропорциональные $\rho^{-1/2}$, можно опустить. Переходя после этого к автомодельной переменной, получим

$$2 \frac{\partial F}{\partial A} + A^2 \frac{\partial^2 F}{\partial A^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F}{\partial A^3} = 0 \quad (4.2)$$

Решая (4.2) с условиями

$$F(0) = 0, \quad (\partial F / \partial A)_{A=0} = 0, \quad \lim_{A \rightarrow \infty} F(A) = 2$$

получаем

$$F(A) = 2(1 - e^{-A^2}) \quad (4.3)$$

Отсюда для функции распространения получим выражение, совпадающее с полученным в [1]

$$K_{vv} = 2 \frac{tc\gamma}{\rho} \exp \frac{-t^2c\gamma}{2\rho} \quad (4.4)$$

При малых временах, $t \ll t_2$, $K_{vv} \sim tc\gamma\rho^{-1}$. Качественно природу этой особенности можно понять из следующих соображений. В силу принципа Гюйгенса функция K_{vv} в точке C (фиг. 1) может быть выражена через ее значения на промежуточной поверхности, в качестве которой удобно взять плоскость, перпендикулярную к поверхности раздела и направлению распространения. Тогда

$$\frac{K_{AC}(t)}{R_{AC}} = \iint \frac{K_{AB}(t') K_{BC}(t-t')}{R_{AB}R_{BC}} dx dz$$

Так как $ct = 2\sqrt{R^2/4 + \rho^2} - R$, то $cdt \approx 4\rho d\rho/R$. При малых временах $K_{AC} \approx z\gamma^{1/2}/Rt^{1/2}$, $z \sim (2cRt)^{1/2}$, тогда

$$K_{AC} \approx \frac{\gamma}{\rho} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x(t-x)}} \sim \frac{tc\gamma}{\rho}$$

Для определения других функций распространения можно использовать условия М. А. Леонтовича. Из (2.1) и (4.4) получим

$$K_{hv} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{4\alpha A^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2 A^2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x}} \quad (4.5)$$

Так как для K_{hv} и K_{hh} также справедливо соотношение (2.1), то отсюда получаем

$$K_{hh} = \frac{2c}{\rho} (1 - 2A^2) e^{-A^2} \quad (4.6)$$

Если K_{hv} знакопостоянна и

$$\int_0^\infty K_{vv}(t) dt = 2$$

то $K_{hv}(t)$ и $K_{hh}(t)$ обращаются в нуль при $t \sim t_2$ и

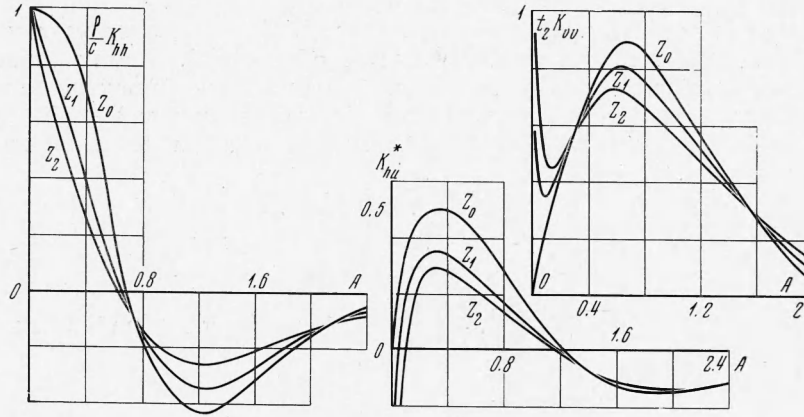
$$\int_0^\infty K_{hv}(t) dt = \int_0^\infty K_{hh}(t) dt = 0$$

Эти особенности объясняются тем, что горизонтальные компоненты полей приводят к возникновению поверхностных токов. Так как эти токи не должны приводить к накоплению заряда в какой-либо области плоскости, то они должны быть знакопеременными и такими, что интеграл по времени, дающий поле статического диполя, равен нулю.

5. **Функции распространения импульсного сигнала в случае малых высот точки наблюдения.** Из того факта, что решение автомодельно с параметрами A, B , следует, что высоты можно считать малыми, т. е. функцию распространения можно разложить в ряд по z до высот $z \leq \alpha\rho$. Такое разложение имеет вид

$$K(t, z) = K(t, 0) + z \left(\frac{\partial K}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{z^2}{2} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \dots \quad (5.1)$$

В (5.1) входят только величины, определенные на поверхности $z = 0$, т. е. они могут быть определены через значение функции $K(t, 0)$ с помощью



Фиг. 3

граничных условий М. А. Леонтовича. В случае z -компоненты поля вертикального диполя сравнение второго и третьего членов показывает, что третий член мал по сравнению со вторым. После этого для $K_{vv}(t, z)$ получим

$$t_2 K_{vv}(t, z) = 2Ae^{-A^2} + \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{\pi}A} \sin \psi \varphi(A) \quad (5.2)$$

$$\varphi(A) = 1 - 6A^2 I_1(A^2) + 4A^4 I_3(A^2), \quad I_n(z) = \int_0^1 e^{-x^2 z} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Для функций $K_{hv}(t, z)$, $K_{hh}(t, z)$ получим

$$K_{hv}^* = \left(\frac{\pi^2 \rho^3}{z^3 \gamma c^3} \right)^{1/4} K_{hv} = \Phi_0(A) + \alpha \sin \psi \Phi_1(A) + \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi \Phi_2(A) \quad (5.3)$$

$$\Phi_0(A) = 3/4 A^{1/2} I_1(A^2) - A^{5/2} I_3(A^2), \quad \Phi_1(A) = (2A^2 - 3) A e^{-A^2}$$

$$\Phi_2(A) = I_0(A^2) - 29A^2 I_2(A^2) + 38A^4 I_4(A^2) - 8A^6 I_6(A^2)$$

$$\frac{\rho}{c} K_{hh}(t, z) = \Phi_3(A) + 8\sqrt{2}\pi^{-1}\alpha \sin \psi \Phi_4(A)$$

$$\Phi_3(A) = (1 - 2A^2) e^{-A^2}, \quad \Phi_4(A) = A^{1/2} (3.25 A^2 I_3(A^2) - 1.12 I_1(A^2) - A^4 I_5(A^2)) \quad (5.4)$$

На фиг. 3 представлены функции $t_2 K_{vv}(t, z)$, K_{hv}^* , $\rho/c K_{hh}(t, z)$ для $z_0 = 0$, $z_1 = 0.5$ км, $z_2 = 1$ км при $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$.

Общей особенностью полученных функций является корневая особенность при малых временах, связанная с волновым распространением. Так как при этом

$$K_{hv} \approx -\sin \psi K_{vv}, K_{hh} \approx \sin^2 \psi K_{vv}, \sin \psi \ll 1$$

то область времен, при которых наступает волновой режим, соответственно уменьшается, а член разложения по z , отвечающий волновому распространению, содержит z во все более высокой степени. Поэтому для $K_{hh}(t, z)$ можно ограничиться членом, линейным по z , и отбросить волновые эффекты.

6. Общие формулы для поля импульсного сигнала в пространстве. Чтобы отыскать выражение для поля в пространстве, используем принцип Гюйгенса или эквивалентное ему в данном случае уравнение Дайсона [8]. Действительно, уравнение Дайсона для взаимодействия с поверхностью имеет вид

$$K^*(1,2) = K^\circ(1,2) + \int K^*(1,3) \Gamma(3) K^\circ(1,2) d\Gamma(3)$$

где $K^*(1,2)$ — полная функция распространения из 1 в 2, $K^\circ(1,2)$ — функция распространения без взаимодействия, $\Gamma(3)$ — вершинная часть. В рассматриваемом случае это уравнение эквивалентно

$$K^*(1,2) = \frac{\delta(t - R_{12}/c)}{R_{12}} + \iint K^*(1,3) \Gamma(3) \frac{\delta(t' - R_{32}/c)}{R_{32}} dS dt' \quad (6.1)$$

Интегрирование производится по поверхности земли, точка 1 — источник, точка 2 — приемник, точка 3 — переменная интегрирования. С другой стороны, формула Грина, выражающая принцип Гюйгенса — Френеля, имеет вид [4]

$$U(R, t) = \iint \left(\frac{\partial U(R_{13}, t')}{\partial n} \right)_S \frac{\delta(t' - R_{32}/c)}{R_{32}} dS dt' \quad (6.2)$$

Легко видеть, что (6.1) совпадает с (6.2), если $\Gamma(3) = \partial(\cdot) / \partial n$. В рассматриваемом случае поле в точке наблюдения

$$E(R, t) = 1 / \rho K(\rho, z, t)$$

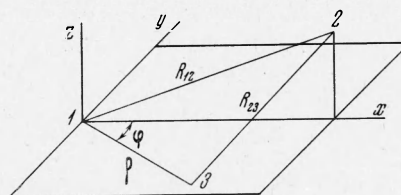
и выполняются неравенства

$$\sin \psi \ll 1, \quad ct - R_{12} \ll R_{12}$$

Проинтегрировав (6.2) по t' , получим (обозначения см. фиг. 4)

$$E(2) = \int_0^\tau \left(\frac{\partial K}{\partial n} \right)_{z=0} \frac{\rho d\theta d\varphi}{\theta R_{12}} \quad (6.3)$$

$$\theta = \rho + R_{33} - R_{12}$$



Фиг. 4

До сих пор вывод справедлив для любой компоненты поля и для диполя произвольной ориентации. Однако интегрирование по φ удается провести, лишь конкретизировав выражение для $K(t)$. Взяв в качестве $K(t)$ функцию $K_{vv}(t)$ из (4.4) и используя (2.3), преобразуем выражение (6.3) к виду

$$E_z(2) = \frac{-2}{R_{12}} \int_0^\tau \int_0^{\tau-x} \exp\left(-\frac{x^2}{2R_{12}} - \frac{x^2 z^2}{\theta R_{12}}\right) \frac{dx d\theta}{\sqrt{\theta(\tau-x-\theta)}} \quad (6.4)$$

Легко показать, что входящий в (6.4) интеграл

$$B(y) = \int_0^y e^{-A/\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha(y-\alpha)}} = \int_0^y e^{-A/\alpha} \left(\frac{A}{\pi\alpha^3}\right)^{1/2} d\alpha$$

после чего (6.4) представляется в виде

$$E_z(2) = \frac{-1}{R_{12}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sqrt{\gamma t} \sin \psi}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp \left[-\frac{x^2 t^2 c \gamma}{2\rho} - \frac{x^2 t \gamma \sin^2 \psi}{4(1-x)} \right] \frac{dx}{(1-x)^{3/2}} \quad (6.5)$$

Это выражение совпадает с выражением, полученным в [3] преобразованием Фурье решения Зоммерфельда [5].

Для получения выражения для функций $K_{hv}(t, z)$ и $K_{hh}(t, z)$ используем соотношение (2.2), из которого следуют соотношения:

$$K_{hv}(t, z) = \int_0^t \frac{\partial K_{vv}(t', z)}{\partial z} dt' - \sin \psi K_{vv}(t, z) \quad (6.6)$$

$$K_{hh}(t, z) = \int_0^t \int_0^{t'} \frac{\partial^2 K_{vv}(t'', z)}{\partial z^2} dt'' - \int_0^t \left(2 \sin \psi \frac{\partial K_{vv}}{\partial z} - \frac{1}{\rho} K_{vv} \right) dt' + \sin^2 \psi K_{vv}(t, z) \quad (6.7)$$

Из (6.6) путем простых преобразований легко получить выражение

$$K_{hv}(t, z) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{4}{\sqrt{\pi \gamma t}} \int_0^1 \left(A^2 + \frac{B^2}{1-x} \right) \exp \left[-x^2 \left(A^2 + \frac{B^2}{1-x} \right) \right] \frac{x dx}{\sqrt{1-x}} \quad (6.8)$$

В общем случае (6.7) не сводится к удобному для применений выражению. Однако легко показать, что при малых ψ , когда

$$\frac{\partial^2 K_{vv}}{\partial z^2} \approx \frac{1}{\gamma c^2} \frac{\partial^3 K_{vv}}{\partial t^3} + \frac{1}{c\rho} \frac{\partial K_{vv}}{\partial t}$$

из (6.7) получается выражение (5.4).

Поступила 16 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Wait J. R. Transient field of a vertical dipole over a homogeneous curved ground. *Canad. J. Phys.*, 1956, vol. 34, No 1.
2. Wait J. R. A note on the propagation of electromagnetic pulses over the earth's surface. *Canad. J. Phys.*, 1962, vol. 40, No 9.
3. Новиков В. В., Макаров Г. И. Распространение импульсных сигналов над плоской однородной земной поверхностью. *Радиотехника и электроника*, 1961, т. 6, вып. 5.
4. Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М., Изд-во АН СССР, 1961.
5. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2 Л., ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит - ры, 1937.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
7. Ландсберг Г. С. Курс общей физики, т. 3, Оптика, М., Гостехиздат, 1957.
8. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика, М., Гостехиздат, 1963.