ПМТФ, № 1, 1962

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ «КОРОТКИХ ВОЛН»

Б. И. Заславский

(*Новосибирск*)

Определяется класс точных решений уравнений «коротких волн» и околозвуковых течений. Для плоских течений решения этого класса были получены О. А. Березиным и А. А. Грибом [1].

§ 1. «Короткими волнами» в работе О. С. Рыжова и С. А. Христиановича [2] названы течения с небольшими, но резкими изменениями параметров среды. Там же развиты общие принципы теории и получены уравнения «коротких волн».

В сферической системе координат r, θ, при симметрии относительно оси $\theta = \pi/2$ уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial\mu}{\partial\tau} + (\mu - \delta)\frac{\partial\mu}{\partial\delta} + \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial y} + k\mu = 0 \qquad (k = 1)$$
$$\frac{\partial\nu}{\partial\delta} - \frac{\partial\mu}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

Для плоскопараллельных течений, рассматриваемых в цилиндрической системе координат, уравнения отличаются только значением k; в этом случае $k = 1/2$.

Безразмерные функции и координаты μ, ν, y, δ определяются равенствами

$$u = a_0 M_0 \mu, \qquad v = a_0 V_0 \sqrt{\frac{n+1}{2}}\nu, \qquad r = a_0 t\left[1 + \frac{n+1}{2}M_0\delta\right]$$
$$\tau = ln t, \qquad V_0 = M_0\sqrt{M_0}, \qquad \theta = \sqrt{\frac{n+1}{2}}M_0 y$$

Здесь a_0 — начальная скорость звука, u, v — проекция вектора скорости на направление радиуса вектора и направление, перпендикулярное к нему; μ, ν — величина порядка единицы; M_0, V_0 — постоянные значительно меньше единицы.

Переход от цилиндрической системы координат r, θ к декартовой X, Y осуществляется по формулам

$$X = a_0 t\left[1 + \frac{n+1}{2}M_0 x\right], \qquad Y = r\theta = a_0 t\sqrt{\frac{n+1}{2}}M_0 y, \qquad \delta = x + \frac{1}{2}y^2$$

В работе [3] показано, что основную зависимость решений уравнений [1.1] от времени можно представить в виде

$$\mu = [\mu^\circ + \mu_0(\tau)]\, e^{-b\tau}, \qquad \delta = [\delta^\circ + \delta_0(\tau)]\, e^{-b\tau}$$
$$\nu = \left[\nu^\circ - 2\frac{d\mu_0(\tau)}{d\tau}y^\circ - 2(k - b)\,\mu_0(\tau)\, y^\circ\right] e^{-3b\tau/2} \tag{1.2}$$
$$y = y^\circ e^{-b\tau/2}, \qquad \mu_0 = \frac{d\delta_0(\tau)}{d\tau} - (b - 1)\,\delta_0(\tau)$$

Здесь $\mu_0(\tau)$ — произвольная функция времени.

Возьмем в качестве независимых переменных величины τ, y° и δ°. Система уравнений коротких волн в новых переменных примет вид

$$\frac{\partial\mu^\circ}{\partial\tau} + [\mu^\circ + (b-1)\,\delta^\circ]\frac{\partial\mu^\circ}{\partial\delta^\circ} + \frac{1}{2}by^\circ\frac{\partial\mu^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{1}{2}\frac{\partial\nu^\circ}{\partial y^\circ} + (k-b)\,\mu^\circ = 0$$

$$\frac{\partial\nu^\circ}{\partial\delta^\circ} - \frac{\partial\mu^\circ}{\partial y^\circ} = 0 \qquad (1.3)$$

§ 2. Уравнения (1.3) имеют систему точных решений вида

$$\mu^\circ = \varphi_2(q,\tau)\,y^{\circ 2} + \varphi_1(q,\tau)$$

$$\nu^\circ = \psi_3(q,\tau)y^{\circ 3} + \psi_1(q,\tau)\,y^{\circ 2} + \nu_0(\tau) \qquad (2.1)$$

$$\delta^\circ = qy^{\circ 2} + \chi_1(q,\tau)$$

Для определения функций φ_2, φ_3, ψ_3, ψ_1, χ_1 имеем систему уравнений, где индексами обозначены частные производные по соответствующим аргументам:

$$\varphi_{2\tau} + \varphi_{2q}(\varphi_2 - q) + \tfrac{3}{2}\psi_3 - q\psi_{3q} + k\varphi_2 = 0$$

$$\psi_{3q} + 2\varphi_{2q}q - 2\varphi_2 = 0$$

$$\varphi_{2\tau}\chi_{1q} + \varphi_{1\tau} - b\varphi_1 - \varphi_{2q}\chi_{1\tau} + b\varphi_{2q}\chi_1 + \varphi_2\varphi_{1q} - q\varphi_{1q} + \varphi_1\varphi_{2q} - \qquad (2.2)$$

$$- \chi_1\varphi_{2q} + \tfrac{3}{2}\psi_3\chi_{1q} + \tfrac{1}{2}\psi_1 + \psi_{1q}q + k\varphi_2\chi_{1q} + k\varphi_1 = 0$$

$$\psi_{1q} - 2\varphi_2\chi_{1q} + 2q\varphi_{1q} = 0$$

$$\varphi_{1\tau}\chi_{1q} - \varphi_{1q}\chi_{1\tau} + b\chi_1\varphi_{1q} - b\varphi_1\chi_{1q} + \varphi_{1q}(\varphi_1 - \chi_1) + \tfrac{1}{2}\psi_1\chi_{1q} + k\varphi_1\chi_{1q} = 0$$

Эта система может быть приведена к виду

$$\chi_{1\tau} + (\varphi_2 - q + 2q^2)\,\chi_{1q} - b\chi_1 + \chi_1 - \varphi_1 = 0$$

$$\varphi_{1\tau} + (\varphi_2 - q + 2q^2)\,\varphi_{1q} - b\varphi_1 + k\varphi_1 + \tfrac{1}{2}\psi_1 = 0$$

$$\psi_{1q} + 2q\varphi_{1q} - 2\varphi_2\chi_{1r} = 0 \qquad (2.3)$$

$$\psi_3 = -\tfrac{3}{2}[\varphi_{2\tau} + \varphi_{2q} - (\varphi_2 - q + 2q^2) + k\varphi_2 - 2q\varphi_2]$$

Причем φ_2 удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{2q\tau} = \varphi_{2qq}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_{2q}{}^2 + \varphi_{2q}(k - 1 - q) + \varphi_2 = 0 \qquad (2.4)$$

§ 3. Уравнение (2.4) подстановкой

$$\varphi_2 = \tfrac{1}{2}q^2 + \tfrac{1}{3}(2-k)\,q + \tfrac{1}{54}(1+k)^2 + \tfrac{3}{2}z \qquad q = \xi - \tfrac{1}{9}(1+k)$$

приводится к уравнению

$$\tfrac{2}{3}z_{\tau\xi} + z_{\xi\xi}(z + \xi^2) + z_\xi(z_\xi - 2\xi) = \alpha \qquad (3.1)$$

Здесь

$$\alpha = -\tfrac{4}{81} \text{ при } k = 1, \qquad \alpha = 0 \text{ при } k = 1/2$$

Пусть $\alpha = -\frac{4}{81}$. Рассмотрим уравнение

$$z_{\xi\xi}[z + \xi^2] + z_\xi[z_\xi - 2\xi] = 0 \qquad (3.2)$$

Это уравнение имеет решения

$$z = C, \qquad z = A\sqrt{\xi + B} - \tfrac{4}{3}B\xi - \tfrac{8}{3}B^2 \tag{3.3}$$

где A, B, C — постоянные.

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде

$$z = \sum_{n-0}^{\infty} z_n \alpha^n$$

Причем за z_0 возьмем одно из решений уравнения (3.2).

Пусть $z = C$, тогда для определения z_n имеем уравнения

$$\frac{2}{3} z_{n\xi\tau} + z_{n\xi\xi}(C + \xi^2) - 2\xi z_{n\xi} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} (z_{n-1-i} z_i)_{\xi\xi} \tag{3.4}$$

Отсюда для z_n получаем

$$z_n = -\frac{1}{2}\int (\xi^2 + C)\left[\int \sum_{i=1}^{n-1} (z_{n-1-i} z_i)_{\xi\xi} \frac{d\xi}{(\xi^2 + C)^2} + \right.$$
$$\left. + f_n\left(\tau + \int \frac{2d\xi}{3(\xi^2 + C)^2}\right)\right] d\xi + S_n(\tau) \tag{3.5}$$

Здесь f_n, S_n — произвольные функции.

При $\alpha = 0$ и, следовательно, $k = 1/2$ можно указать два частных решения уравнения (2.4)

$$\varphi_2 = A\sqrt{q + B} - 2Bq - 4B^2 + B$$
$$\varphi_2 = -\tfrac{1}{2}q^2 + \tfrac{1}{2}q + C(\tau) \tag{3.6}$$

Кроме указанных решений, уравнение (2.4) имеет решения при $k = 1$

$$\varphi_2 = \frac{q}{\tau + C}, \qquad \varphi_2 = Aq - A^2 \tag{3.7}$$

§ 4. Рассмотрим первые два уравнения системы (2.3). Продифференцируем их по q и выразим ψ_{1q} из третьего уравнения. Получим систему двух уравнений

$$\chi_{1q\tau} + (\varphi_2 - q + 2q^2)\chi_{1qq} + \chi_{1q}(\varphi_{2q} - 1 + 4q) - b\chi_{1q} + \chi_{1q} - \varphi_{1q} = 0$$
$$\varphi_{1q\tau} + (\varphi_2 - q + 2q^2)\varphi_{1qq} + \varphi_{1q}(\varphi_{2q} - 1 + 4q) - \tag{4.1}$$
$$- b\varphi_{1q} + k\varphi_{1q} + \varphi_2\chi_{1q} - q\varphi_{1q} = 0$$

Положим

$$\varphi_{1q} = \varphi_{2q}v + u, \qquad \chi_{1q} = v \tag{4.2}$$

Система (4.1) примет вид

$$v_\tau + (\varphi_2 - q + 2q^2)v_q + v(4q - b) - u = 0$$
$$v[\varphi_{2q\tau} + \varphi_{2qq}(\varphi_2 - q + 2q^2) + \varphi_{2q}{}^2 + \varphi_{2q}(k - 1 - q) + \varphi_2] + \tag{4.3}$$
$$+ \varphi_{2q}[v_\tau + v_q(\varphi_2 - q + 2q^2) + v(4q - b)] +$$
$$+ u_\tau + (\varphi_2 - q + 2q^2)u_q + u(\varphi_{2q} - 1 + 3q + k - b) = 0$$

Используя уравнение (2.4), получаем

$$u_\tau + (\varphi_2 - q + 2q^2)u_q + u(2\varphi_{2q} - 1 + 3q + k - b) = 0$$
$$v_\tau + (\varphi_2 - q + 2q^2)v_q + v(4q - b) - u = 0 \tag{4.4}$$

Таким образом, в общем случае нахождение решений вида (2.1) сводится к интегрированию уравнения (2.4) и двух линейных уравнений в частных производных первого порядка.

Если φ_2 не зависит от времени, то решение системы (2.3) может быть получено в квадратурах

$$\psi_3 = -\frac{2}{3}[\varphi_{2q}(\varphi_2 - q + 2q^2) + k\varphi_2 - 2q\varphi_2]$$

$$\psi_1 = -2\varphi_{1\tau} - 2\varphi_{1q}(\varphi_2 - q + 2q^2) - 2(k-b)\varphi_1$$

$$\varphi_1 = \int\Big\{F_1\Big(\tau - \int\frac{dq}{\varphi_2 - q + 2q^2}\Big)\Big(\exp - \int\frac{2\varphi_{2q} - 1 + 3q + k - b}{\varphi_2 - q + 2q^2}\,dq\Big) +$$

$$+ \varphi_{2q}\exp\Big(-\int\frac{4q-b}{\varphi_2 - q + 2q^2}\Big)\Big[\int F_1\Big(\tau - \int\frac{dq}{\varphi_2 - q + 2q^2}\Big)\times$$

$$\times\Big[\exp\Big(-\int\frac{2\varphi_{2q} - 1 - q + k}{\varphi_2 - q + 2q^2}\,dq\Big)\Big]dq + F_2\Big(\tau - \int\frac{dq}{\varphi_2 - q + 2q^2}\Big)\Big]\Big\}\,dq$$

$$\chi_1 = \int\exp\Big(-\int\frac{4q-b}{\varphi_2 - q + 2q^2}\,dq\Big)\Big[\int F_1\Big(\tau - \int\frac{dq}{\varphi_2 - q + 2q^2}\Big)\times$$

$$\exp\Big(-\int\frac{2\varphi_{2q} - 1 - q + k}{\varphi_2 - q + 2q^2}\,dq\Big)dq + F_2\Big(\tau - \int\frac{dq}{\varphi_2 - q + 2q^2}\Big)\Big]\,dq$$

Здесь F_1 и F_2 — производные функции.

§ 5. Решения, аналогичные рассмотренным выше, можно построить для уравнений нестационарных околозвуковых течений, как плоских, так и осесимметричных.

Такие течения приближенно описываются уравнением (см. 4)

$$-4\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\tau} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + k\frac{1}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \qquad (5.1)$$

В этом уравнении

$$\frac{a_*}{\varkappa+1}\varphi(x, y, \tau) = \Phi(x, y, \tau) - a_*x$$

$$\varphi \ll a_*x, \qquad \tau = 2a_*t$$

Здесь Φ — потенциал скорости, $\varkappa$ — показатель адиабаты, $k = 0$ для случая плоского движения и $k = 1$ для движения с осевой симметрией, a_* — критическая скорость звука. Положим

$$\mu = -2\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \nu = 2\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad x = -\delta \qquad (5.2)$$

Функции μ и ν связаны с составляющими скорости потока по координатам v_x и v_y следующими равенствами

$$v_x = -\frac{1}{2}\frac{a_*}{\varkappa+1}\mu, \qquad v_y = \frac{1}{2}\frac{a_*}{\varkappa+1}\nu$$

Подставив (5.2) в (5.1), получим систему уравнений

$$\frac{\partial\mu}{\partial\tau} + \mu\frac{\partial\mu}{\partial\delta} + \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial y} + k\frac{\nu}{y} = 0, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\nu}{\partial\delta} = 0 \qquad (5.3)$$

Система (5.3) имеет частные решения

$$\mu = \varphi_2(q, \tau)\, y^2 + \int (\varphi_{2q} v + u)\, dq$$

$$\nu = \psi_3(q, \tau)\, y^3 + 2y \int [\varphi_2 v - q\varphi_{2q} v - qu]\, dq \tag{5.4}$$

$$\delta = qy^2 + \int v\, dq$$

Здесь $u(q, \tau)$, $\psi_2(q, \tau)$ и $v(q, \tau)$ определяются из уравнений

$$v_\tau + v_q(\varphi_2 + 2q^2) + 4qv - u = 0$$

$$\psi_2 = -\frac{2}{3+2k}\,[\varphi_{2\tau} + \varphi_{2q}(\varphi_2 + 2q^2) - 2\varphi_{2q}]$$

$$u_\tau + u_q(\varphi_2 + 2q^2) + u(2\varphi_{2q} + 3q - 2kq) = 0 \tag{5.5}$$

Функция φ_2 определяется из уравнения

$$\varphi_{2\tau q} + \varphi_{2qq}(\varphi_2 + 2q^2) + {\varphi_{2q}}^2 - (1+2k)\,\varphi_{2q} q + (1+2k)\,\varphi_2 = 0 \tag{5.6}$$

При $k = 0$ это уравнение имеет частные решения

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2} q^2 + C(\tau), \qquad \varphi_2 = A\sqrt{q+B} - 2Bq - 4B^2 \tag{5.7}$$

Если φ_2 не зависит от времени, то

$$u = F_1\Big(\tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 + 2q^2}\Big)\Big(\exp - \int \frac{2\varphi_{2q} + 3q - 2kq}{\varphi_2 + 2q^2}\, dq\Big)$$

$$v = \Big(\exp - \int \frac{4q\, dq}{\varphi_2 + 2q^2}\Big)\Big[\int F_1\Big(\tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 + 2q^2}\Big)\Big(\exp - \int \frac{2\varphi_{2q} - q - 2kq}{\varphi_2 + 2q^2}\, dq\Big) dq + {}$$

$$+ F_2\Big(\tau - \int \frac{dq}{\varphi_2 + 2q^2}\Big)\Big] \tag{5.8}$$

Отметим, что решения уравнений «коротких волн» и околозвуковых течений, опубликованные в работах [1, 2, 5], могут быть получены из приведенных выше решений, если положить $F_1 \equiv 0$, $F_2 = \mathrm{const}$ и соответствующим образом выбрать функцию φ_2.

В заключение автор благодарит С. А. Христиановича за внимание к работе.

Поступила 9 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин О. А., и Гриб А. А. Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПМТФ, 1960, № 2.
2. Рыжов О. С. Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.
3. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн, ПМТФ, 1960, № 1.
4. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. О нестационарных течениях газа в соплах Лаваля. ДАН СССР, № 3, т. 128, 1959.
5. Денисов И. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, 1956, т. X, вып. 4.