ПМТФ, № 5, 1972

УДК 532.516

ДВА СПОСОБА ПРИБЛИЖЕННОГО ОПИСАНИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. В. Пухначев

(Новосибирск)

В работе в линейном приближении исследуются волны на поверхности вязкой несжимаемой жидкости. Показано, что линейная теория дает главный член решения задачи об установившихся двумерных волнах малой амплитуды в точной постановке. Далее рассматривается трехмерное установившееся движение в сосуде вязкой жидкости с большим поверхностным натяжением. В первом приближении свободная граница определяется как минимальная поверхность в поле тяжести. Поле скоростей находится из решения задачи для уравнений Навье — Стокса.

1. Линейное приближение в теории поверхностных волн. Описание волновых движений вязкой жидкости в гидродинамической постановке приводит к необходимости решать задачи для уравнений Навье — Стокса с неизвестной границей. Подобные задачи в настоящее время изучены недостаточно (о состоянии вопроса см. [1] и имеющуюся там библиографию, а также [2, 3]). Имеется ряд приближенных моделей поверхностных волн в вязкой жидкости. Исторически первой из них была линейная теория волн (Стокс [4]). Эта теория получила развитие в работах Ламба [5], Л. Н. Сретенского [6] и других авторов.

Насколько известно автору, до сих пор не имеется ответа на вопрос о близости решения задачи о волнах в точной постановке (как задачи со свободной границей для уравнений Навье — Стокса) и в приближении линейной теории. Здесь этот вопрос рассматривается в частном случае двумерных установившихся волн. Кроме того, рассмотрение ограничено исследованием периодических волновых движений типа вынужденных колебаний. Примерами таких движений являются: движение в полосе, верхняя граница которой свободна, а нижняя (дно) представляет собой твердую прямолинейную стенку с периодически расположенными на ней участками втекания и вытекания жидкости; установившиеся гравитационные волны над наклонным периодическим дном; движение, возбуждаемое периодической бегущей волной давления или касательного напряжения, приложенного к свободной поверхности.

С каждым из указанных течений можно связать параметр, пропорциональный величине внешнего воздействия (мощность источников, угол наклона средней линии дна к горизонту, амплитуда бегущей волны), и затем рассмотреть линейное приближение по этому параметру. Рассмотрим оценку погрешности линейного приближения к решению задачи в точной постановке при малых значениях параметра.

Ниже для определенности рассматривается задача о периодическом движении в полосе с распределенными на дне источниками и стоками. Математическая постановка задачи такова. Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемые функции $\mathbf{v}(x_1, x_2)$, (x_1) и непрерывно дифференцируемую функцию $p\ (x_1, x_2)$, которые удовлетворяют соотношениям,

$$\Delta \mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nabla p = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

в полосе $-\infty < x_1 < \infty,\ -1 < x_2 < f\ (x_1)$.

$$\mathbf{v}\,(x_1 + l, x_2) \equiv \mathbf{v}\,(x_1, x_2), \quad p\,(x_1 + l, x_2) \equiv p\,(x_1, x_2), \quad f\,(x_1 + l) \equiv f\,(x_1) \tag{1.2}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot T\cdot\boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = f\,(x_1) \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)' - \lambda f = \mu\mathbf{n}\cdot T\cdot\mathbf{n} \quad \text{при} \quad x_2 = f\,(x_1) \tag{1.4}$$

$$\int\limits_0^l f\,dx_1 = 0 \tag{1.5}$$

$$\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{a}\,(x_1) \quad \text{при} \quad x_2 = -1 \tag{1.6}$$

Здесь $x_2 = f\ (x_1)$ — уравнение свободной поверхности, $f' \equiv df\ /\ dx_1$, $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — орты внешней нормали и касательной к свободной поверхности; T — тензор напряжений с элементами $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \partial v_i\ /\ \partial x_j + \partial v_j/\partial x_i$, $i = 1{,}2$; $\mathbf{v}$ — вектор скорости, $p + \mu^{-1}\lambda x_2$ — давление.

Соотношения (1.1) — (1.6) записаны в безразмерных переменных; расстояния отнесены к средней глубине жидкости h, скорости — к νh^{-1} (ν — коэффициент кинематической вязкости), давление — к $\rho\nu^2 h^{-2}$ (ρ — плотность жидкости); $\lambda = \rho g h^2\sigma^{-1}$, $\mu = \rho\nu^2(\sigma h)^{-1}$ — безразмерные положительные параметры (g — ускорение силы тяжести; σ—коэффициент поверхностного натяжения); ε — безразмерный положительный параметр, который в дальнейшем считается малым.

Условие (1.3) означает отсутствие потока жидкости и касательного напряжения на свободной поверхности. Согласно условию (1.4) нормальное напряжение на свободной границе равно поверхностному давлению. Условие (1.5) показывает, что безразмерная средняя глубина жидкости равна единице. В условии (1.6) вектор-функция $\mathbf{a}$, задающая скорость на дне (при $x_2 = -1$), предполагается l-периодической с компонентами a_1, a_2 из класса Гельдера $C^{2+\alpha}\ [0,\ l]$ и такой, что

$$\int\limits_0^l a_2\,dx_1 = 0 \tag{1.7}$$

Условие (1.7) необходимо для согласования краевых условий (1.6) и первого из (1.3) с уравнением неразрывности. Чтобы исключить возможность контакта свободной поверхности с дном, потребуем еще выполнения неравенства

$$|f| \leqslant \delta < 1 \quad (\delta = \text{const} > 0)$$

Существование единственного решения задачи (1.1) — (1.6) при малых ε следует из результатов работы [3]. Отметим, что введение поверхностного натяжения в краевое условие (1.4) на свободной границе существенно: именно оно позволяет свести решение задачи к отысканию неподвижной точки некоторого непрерывного оператора [3].

Сформулируем теперь уравнения линейного приближения в задаче (1.1) — (1.6). Для этого отбросим в уравнениях (1.1) нелинейные члены, а краевые условия (1.3), (1.4) снесем на невозмущенную свободную границу $x_2 = 0$. Обозначая

$$\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{U}, \quad p = \varepsilon Q, \quad f = \varepsilon F$$

приходим к следующей линейной краевой задаче с фиксированной границей:

$$\Delta \mathbf{U} - \nabla Q = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{1.8}$$

в полосе $-\infty < x_1 < \infty$, $-1 < x_2 < 0$

$$\mathbf{U}(x_1 + l, x_2) \equiv \mathbf{U}(x_1, x_2), \quad Q(x_1 + l, x_2) \equiv Q(x_1, x_2), \quad F(x_1 + l) \equiv F(x_1) \tag{1.9}$$

$$U_2 = 0, \quad \partial U_1 / \partial x_2 = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0 \tag{1.10}$$

$$F'' - \lambda F = \mu(-Q + 2\partial U_2 / \partial x_2) \quad \text{при} \quad x_2 = 0 \tag{1.11}$$

$$\int_0^l F\, dx_1 = 0 \tag{1.12}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{a}(x_1) \quad \text{при} \quad x_2 = -1 \tag{1.13}$$

Система Стокса (1.8) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (1.10), (1.13) и двум первым условиям (1.9). Если это решение найдено, функция F однозначно определяется из дифференциального уравнения (1.11) с условиями (1.12) и последним из (1.9). Согласно представлениям линейной теории $x_2 = \varepsilon F(x_1)$ есть уравнение свободной границы «в первом приближении».

2. Оценка погрешности линейного приближения. Покажем, что функция $\varepsilon F(x_1)$, определенная из линейной задачи (1.8) — (1.13), дает главный член асимптотики при $\varepsilon \to 0$ функции $f(x_1; \varepsilon)$, определяющей форму свободной границы в задаче (1.1) — (1.6). Сравнивать поля скоростей и давлений в задаче (1.1) — (1.6) и ее линеаризации (1.8) — (1.13) в переменных $x_1 x_2$, затруднительно, поскольку функции $\mathbf{v}$, p и $\mathbf{U}$, Q имеют разные области определения. Однако можно отобразить область течения в задаче (1.1) — (1.6) на полосу $-1 < x_2 < 0$ и сравнивать решение этой задачи в деформированных координатах с решением задачи (1.8)— (1.13). Для этого перейдем к новым независимым переменным

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = \frac{x_2 - f(x_1)}{1 + f(x_1)} \tag{2.1}$$

Система (1.1) при этом преобразуется к виду

$$\begin{gathered}
\frac{\partial_2 u_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{2(1+\xi_2) f'}{1+f} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{1 + (1+\xi_2)^2 f'^2}{(1+f)^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi_2^2} + \\
+ \left\{ \frac{(1+\xi_2)[2f'^2 - (1+f) f'']}{(1+f)^2} + \frac{(1+\xi_2) f' u_1}{1+f} - \frac{u_2}{1+f} \right\} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \\
- u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial q}{\partial \xi_1} + \frac{(1+\xi_2) f'}{1+f} \frac{\partial q}{\partial \xi_2} = 0 \\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{2(1+\xi_2) f'}{1+f} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{1 + (1+\xi_2)^2 f'^2}{(1+f)^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} + \\
+ \left\{ \frac{(1+\xi_2)[2f'^2 - (1+f) f'']}{(1+f)^2} + \frac{(1+\xi_2) f' u_1}{1+f} - \frac{u_2}{1+f} \right\} \frac{\partial u^2}{\partial \xi_2} - \\
- u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{1}{1+f} \frac{\partial q}{\partial \xi_2} = 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{(1+\xi_2) f'}{1+f} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{1}{1+f} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = 0
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}
(u_1(\xi_1, \xi_2) = v_1(x_1, x_2), \quad u_2(\xi_1, \xi_2) = v_2(x_1, x_2), \quad q(\xi_1, \xi_2) = \\
= p(x_1, x_2), \quad f(x_1) = f(\xi_1), \quad f' = df / d\xi)
\end{gathered}$$

Краевые условия (1.2) — (1.6) порождают следующие краевые условия для системы (2.2):

$$u_1(\xi_1 + l,\ \xi_2) \equiv u_1(\xi_1,\ \xi_2),\ u_2(\xi_1 + l,\ \xi_2) \equiv u_2(\xi_1,\ \xi_2),\ q(\xi_1 + l,\ \xi_2) \equiv$$
$$\equiv q(\xi_1,\ \xi_2)\ u_1 = \varepsilon a_1(\xi_1),\ u_2 = \varepsilon a_2(\xi_1) \text{ при } \xi_2 = -1$$

$$\frac{1+f'^2}{1+f}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - 2f'\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + (1-f'^2)\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{f'(1+f'^2)}{1+f}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = 0 \tag{2.3}$$
$$u_2 - f'u_1 = 0 \quad \text{при} \quad \xi_2 = 0$$

$$\frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}} - \lambda f = \mu\Big[(1+f'^2)q + \frac{2(1+f'^2)}{1+f}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} +$$
$$+ 2f'^2\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{2f'(1+f'^2)}{1+f}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - 2f'\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\Big] \quad \text{при} \quad \xi_2 = 0 \tag{2.4}$$

$$f(\xi_1 + l) \equiv f(\xi_1), \quad \int_0^l f(\xi_1)\, d\xi_1 = 0 \tag{2.5}$$

Предложение 2.1. При $\varepsilon \to 0$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} &|f(\xi_1; \varepsilon) - \varepsilon F(\xi_1)|_{3+\alpha, [0, l]} = O(\varepsilon^2) \\ &|\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2; \varepsilon) - \varepsilon \mathbf{U}(\xi_1, \xi_2)|_{2+\alpha, \Pi} = O(\varepsilon^2) \\ &|q(\xi_1, \xi_2; \varepsilon) - \varepsilon Q(\xi_1, \xi_2)|_{1+\alpha, \Pi} = O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь Π обозначает прямоугольник $0 \leqslant \xi_1 \leqslant l$, $-1 \leqslant \xi_2 \leqslant 0$; $\mathbf{u}$ — вектор с компонентами u_1, u_2; записью вида $f = f(\xi_1;\ \varepsilon)$ подчеркивается зависимость искомых величин от параметра ε. Если $\varphi(x) \in C^{m+\alpha}(\Omega)$, где $m \geqslant 0$ — целое, Ω — замкнутая ограниченная область, то $|\varphi|_{m+\alpha, \Omega}$ обозначает норму φ в $C^{m+\alpha}$.

Доказательство предложения 2.1 базируется на следующей априорной оценке решения задачи (2.2) — (2.5):

$$|\mathbf{u}|_{2+\alpha,\pi} + |\nabla q|_{\alpha,\pi} + |f|_{3+\alpha, [0, l]} \leqslant C_1 \varepsilon |a|_{2+\alpha, [0, l]} \tag{2.7}$$

которая справедлива при фиксированном a, если $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и ε_0 достаточно мало (C_k, $k = 1,2,\ldots$ здесь и в дальнейшем означают положительные постоянные). Оценка (2.7) по существу вытекает из результатов [3] (в этой работе считалось $\lambda = 0$, что несущественно; в краевом условии (1.6) параметр ε отсутствовал, но зато заданная скорость на дне предполагалась малой).

Введем в рассмотрение функции $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{U}$, $r = q - \varepsilon Q$. На основании (2.2), (1.8) эти функции удовлетворяют в Π системе уравнений

$$\Delta \mathbf{w} - \nabla r = \psi, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = \varphi \tag{2.8}$$

где Δ, ∇ — лапласиан и градиент по переменным ξ_1, ξ_2, а ψ, φ — некоторые известные функции ξ_1, ξ_2, которые выражаются через $\mathbf{u}$, q, f и их производные. Существенны следующие неравенства, которым удовлетворяют функции ψ, φ при $\varepsilon \to 0$

$$|\varphi|_{1+\alpha, \Pi} \leqslant C_2 \varepsilon^2, \quad |\psi|_{\alpha, \Pi} \leqslant C_2 \varepsilon^2 \tag{2.9}$$

Оба неравенства (2.9) доказываются одинаково, ограничимся проверкой первого из них. Из (2.2), (1.8) находим

$$\varphi = \frac{(1+\xi_2) f'}{1+f}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{f}{1+f}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \tag{2.10}$$

Так как $\mathbf{u} \in C^{2+\alpha}$ (П), $f \in C^{3+\alpha}[0, l]$ [3], то $\varphi \in C^{1+\alpha}$ (П). Оценка (2.9) непосредственно следует из определения φ (2.10) и неравенства (2.7) (поскольку $\mathbf{a}$ фиксировано, то $|\mathbf{a}|_{2+\alpha, [0,l]}$ включено в значение постоянной C_2).

Исходя из условий (1.9), (1.10) (1.13) и (2.3), нетрудно получить краевые условия для функций $\mathbf{w}$, r. Они имеют вид

$$w_2 = \chi, \; \partial w_1 / \partial \xi_2 = \omega \text{ при } \xi_2 = 0$$
$$\mathbf{w}(\xi_1 + l, \xi_2) \equiv \mathbf{w}(\xi_1, \xi_2), \; q(\xi_1 + l, \xi_2) \equiv q(\xi_1, \xi_2) \tag{2.11}$$
$$\mathbf{w} = 0 \text{ при } \xi_2 = -1$$

где

$$\chi = f' u_1|_{\xi_2=0}, \; \omega = -f''(1+f)(1-f'^2)u_1 +$$
$$+ f'(1+f)(1+f'^2)\partial u_1 / \partial \xi_1 - f'(1+f'^2)\partial u_2 / \partial \xi_2|_{\xi_2=0} \tag{2.12}$$

Функции χ, ω принадлежат классам $C^{2+\alpha}[0, l]$, $C^{1+\alpha}[0, l]$ соответственно и вследствие (2.7), (2.12) допускают оценки

$$|\chi|_{2+\alpha, [0,l]} \leqslant C_3 \varepsilon^2, \quad |\omega|_{1+\alpha, [0,l]} \leqslant C_3 \varepsilon^2 \tag{2.13}$$

Дальнейшие рассуждения основаны на применении к краевой задаче (2.8), (2.11) априорных оценок решений систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу [7]. Система (2.8) — неоднородная система Стокса; она эллиптична по Дуглису — Ниренбергу [8]. Краевые условия (2.11) для (2.8) удовлетворяют сформулированному в [9,8] условию дополнительности, что обеспечивает наличие предельно точных оценок $\mathbf{w}$, r в нормах Гельдера. Применяя результаты [9,10] к задаче (2.8), (2.11) и используя неравенства (2.9), (2.13) получаем требуемую оценку

$$|\mathbf{w}|_{2+\alpha, \Pi} + |\nabla r|_{\alpha, \Pi} \leqslant C_4 \varepsilon^2 \tag{2.14}$$

при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Отсутствие справа члена вида $C|\mathbf{w}|_0$ объясняется теоремой единственности для задачи (2.8), (2.11) [3]: если $\psi = 0$, $\varphi = \chi = \omega = 0$, то $\mathbf{w} = 0$, $r = \text{const}$. Из определения $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{U}$, $r = q - \varepsilon Q$ и неравенства (2.14) следует справедливость второй из оценок (2.6).

Неравенство (2.14) означает также, что

$$r(\xi_1, \xi_2; \varepsilon) = \gamma(\xi_1, \xi_2; \varepsilon) + K(\varepsilon) \tag{2.15}$$

где $|\gamma(\xi_1, \xi_2; \varepsilon)|_{1+\alpha, \Pi} = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$, а K зависит лишь от ε. Желательно показать, что $K(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$. Преобразуем равенство (2.4), подставив в него вместо производных u_2 при $\xi_2 = 0$ их выражения в силу третьего уравнения (2.2) и последнего соотношения (2.3). Получим

$$\left(\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)' - \lambda f = \mu \Big\{ -(1+f^2) q -$$
$$\left. - 2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} [(1+f'^2) u_1] + 2f'f'' u_1 \Big\} \right|_{\xi_2=0} \tag{2.16}$$

Аналогично соотношение (1.11) преобразуется к виду

$$F'' - \lambda F = \mu(-Q - 2\partial U_1 / \partial \xi_1)|_{\xi_2=0} \tag{2.17}$$

Интегрируя (2.16) от 0 до l и используя (2.5) и периодичность u_1 по ξ_1, находим

$$\int_0^l [(1+f'^2) q(\xi_1, 0) - 2f'f'' u_1(\xi_1, 0)] \, d\xi_1 = 0 \tag{2.18}$$

Заметим, что при заданном f уравнения (2.2) и краевые условия (2.3) определяют q с точностью до постоянного слагаемого. Соотношение (2.18) позволяет ликвидировать произвол в определении q. Аналогично из (2.16), (1.9) и (1.12) следует соотношение

$$\int_0^l Q(\xi_1, 0)\, d\xi_1 = 0 \tag{2.19}$$

дающее возможность однозначно определить функцию Q в решении задачи (1.8) — (1.10), (1.13). Используя (2.18), (2.19), (2.7), (2.14), (2.15), заключаем, что при $\varepsilon \to 0$ справедлива третья из оценок (2.6).

Полученные результаты используем теперь для доказательства оставшегося (первого) из неравенств (2.6). Обозначим $b = f - \varepsilon F$. Вычитая из (2.16) равенство (2.17), умноженное на ε, получим дифференциальное уравнение для b

$$b'' - \lambda b = \tau \tag{2.20}$$

с правой частью

$$\tau = f''[1 - (1 + f'^2)^{-3/2}] - \mu\, [r + 2\partial w_1 / \partial \xi_1 + \tag{2.21}$$

$$+ f'^2 (q + 2\partial u_1 / \partial \xi_1) + 2f' f'' u_1]\,|_{\xi_2 = 0}$$

(здесь использовано определение $r = q - \varepsilon Q$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \varepsilon\, \mathbf{U}$). Ввиду (2.5), (1.9), (1.12) функция b удовлетворяет условиям

$$b(\xi_1 + l) \equiv b(\xi_1), \quad \int_0^l b\, d\xi_1 = 0 \tag{2.22}$$

Применяя к оценке правой части (2.21) неравенства (2.7) и второе и третье из (2.6) получаем

$$|\tau(\xi_1; \varepsilon)|_{1+\alpha, [0, l]} = O(\varepsilon^2) \tag{2.23}$$

при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, l — периодическая функция b вследствие (2.18), (2.19), (2.5) имеет нулевое среднее значение по периоду. Отсюда следует, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ решение b задачи (2.20), (2.22) существует и единственно; на основании (2.23) это решение при $\varepsilon \to 0$ допускает оценку $|b|_{3+\alpha, [0, l]} = O(\varepsilon^2)$. Тем самым доказано первое из неравенств (2.6). Доказательство предложения 2.1 закончено.

В заключение отметим, что аналоги предложения 2.1 справедливы в упомянутых в п. 1 задаче о волнах над периодическим дном и задаче о взаимодействии бегущей волны со свободной поверхностью. Изложенный выше подход к обоснованию линейной модели двумерных волн на поверхности вязкой жидкости допускает также обобщение на некоторые трехмерные задачи.

3. Трехмерное стационарное течение капиллярной жидкости в сосуде. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет область $G = \{x_1, x_2, x_3 : (x_1, x_2) \in \Omega,\ 0 < x_3 < f(x_1, x_2)\}$ и находится в состоянии установившегося движения. Здесь Ω — ограниченная область плоскости x_1, x_2 с достаточно гладкой границей S. Движение вызвано распределенными на дне $\Sigma = \{x_1, x_2, x_3 : (x_1, x_2) \in \Omega,\ x_3 = 0\}$ источниками и стоками с нулевым суммарным расходом. Поверхность $\Gamma = \{x_1, x_2, x_3 : (x_1, x_2) \in \Omega,\ x_3 = f(x_1, x_2)\}$ предполагается свободной. Цилиндрическая поверхность $B = \{x_1, x_2, x_3 : (x_1, x_2) \in S,\ 0 < x_3 < f(x_1, x_2)\}$ — твердая непроницаемая стенка.

Уравнения движения, записанные в безразмерных переменных, имеют вид

$$\Delta \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{3.1}$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости, p — отклонение давления от гидростатического (предполагается, что сила тяжести действует в направлении, противоположном направлению оси x_3). Безразмерные переменные вводятся так же, как и в п. 1, с той разницей, что теперь h — диаметр области Ω.

Для системы (3.1) ставятся краевые условия

$$\mathbf{v}|_\Sigma = \mathbf{a}(x_1, x_2), \quad \mathbf{v}|_B = 0 \tag{3.2}$$

$$\mathbf{v}|_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot T|_\Gamma \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \tag{3.3}$$

$$\nabla_2 \cdot \left[\frac{\nabla_2 f}{\sqrt{1 + |\nabla_2 f|^2}}\right] - \lambda f = \mu \mathbf{n}\cdot T\Big|_\Gamma \cdot \mathbf{n} \tag{3.4}$$

$$(1 + |\nabla_2 f|^2)^{-1/2} \frac{\partial f}{\partial N}\Big|_S = \cos\theta \tag{3.5}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали и $\boldsymbol{\tau}$ — произвольный единичный вектор, лежащий в касательной плоскости к свободной поверхности; T — тензор напряжений; ∇_2 — двумерный градиент по переменным x_1, x_2; $\nabla_2 \cdot \mathbf{e}$ — дивергенция вектора $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$; параметры λ и μ введены в п. 1. В условии (3.2) $\mathbf{a}$ — заданная вектор-функция из гельдеровского класса $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$ ($\overline{\Omega}$ — замыкание Ω), финитная в Ω и такая, что

$$\int\limits_\Omega a_3\, dx_1\, dx_2 = 0 \tag{3.6}$$

При записи (3.4) предполагается, что правая часть представлена как функция x_1, x_2. В (3.5) $\mathbf{N}$ — направление внешней нормали к S, а θ — краевой угол, который определяется свойствами жидкости и материала стенок сосуда. Это условие играет роль краевого условия для соотношения (3.4), если последнее трактовать, при заданной правой части, как эллиптическое уравнение для $f(x_1, x_2)$.

Теорема существования и единственности решения задачи (3.1) — (3.5) не доказана. Однако есть основания полагать, что эта задача даже при малых $|\mathbf{a}|_{2+\alpha,\, \overline{\Omega}}$ имеет однопараметрическое семейство решений. К такому выводу приводит рассмотрение периодического аналога задачи [3], а также анализ предлагаемой ниже аппроксимации задачи (3.1) — (3.5) в случае, когда параметр μ мал. Поэтому представляется необходимым поставить наряду с (3.1) — (3.5) еще одно условие. По физическим соображениям естественно задать среднюю глубину жидкости $\bar{f}$

$$\int\limits_\Omega (f - \bar{f})\, dx_1\, dx_2 = 0 \tag{3.7}$$

Приближенное решение задачи (3.1) — (3.5), (3.7) при малых μ основано на замене в правой части (3.4) функции $\mu\mathbf{n}\cdot T|_\Gamma \cdot \mathbf{n}$ постоянной. Тогда соотношения (3.4), (3.5), (3.7) образуют замкнутую систему для определения f. Далее оказывается, что при фиксированном f задача (3.1) — (3.3) всегда имеет решение. Если $|\mathbf{a}|_{2+\alpha,\, \overline{\Omega}}$ мало, то поле скоростей $\mathbf{v}$ определяется однозначно, а давление — с точностью до постоянной, $p = p^* + \lambda\mu^{-1} C$, где p^* фиксируется, например, условием $p^*(x_1{}^\circ, x_2{}^\circ, 0) = 0$ в некоторой точке $(x_1{}^\circ, x_2{}^\circ, 0) \in \Sigma$. Обозначив через T^* тензор напряжений, соответствующий полю $\mathbf{v}$, p^*, получим $\mu\mathbf{n}\cdot T^*|_\Gamma \cdot \mathbf{n} = -\lambda C + \mu\mathbf{n}\cdot T|_\Gamma \cdot \mathbf{n}$. Гипотеза состоит в том, что при решении задачи (3.1) — (3.5), (3.7) тензор T^* регулярно зависит от μ при $\mu \to 0$.

Полагая в правой части $\mu \mathbf{n}\cdot T|_\Gamma \cdot \mathbf{n} = -\lambda C = \text{const}$ и делая замену

$$f = y + C \tag{3.8}$$

приходим к следующей задаче для определения функции $y(x_1, x_2)$:

$$\nabla_2 \left[\frac{\nabla_2 y}{\sqrt{1 + |\nabla_2 y|^2}} \right] - \lambda y = 0 \tag{3.9}$$

$$(1 + |\nabla_2 y|^2)^{-1/2} \frac{\partial y}{\partial N}\Big|_S = \cos\theta \tag{3.10}$$

Задача (3.9), (3.10) — нелинейная краевая задача для эллиптического уравнения типа минимальных поверхностей. Ее решение описывает форму равновесия капиллярной жидкости в поле тяжести. Теория таких задач до последнего времени была развита недостаточно. Имеется, однако, ряд важных частных случаев, в которых задача (3.9), (3.10) допускает эффективное исследование. В одномерном случае, когда Ω — полоса $0 < x_1 < h$ и y не зависит от x_2, эта задача решается явно. Если Ω — круг $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = r < h$, можно искать осесимметричные решения $y = y(r)$. Численному решению и качественному анализу осесимметричной задачи (3.9), (3.10) посвящен ряд работ (см. [11] и имеющуюся там библиографию). Существование осесимметричных решений доказано в [12].

В случае, когда Ω — произвольная ограниченная область с границей класса $C^{2+\alpha}$, а краевой угол θ близок к $\pi/2$, можно разыскивать малое решение задачи (3.9), (3.10) (заметим, что при $\theta = \pi/2$ единственное решение есть $y = 0$). Это решение существует, единственно и находится методом последовательных приближений. В работе [13] задача (3.9), (3.10) исследовалась для произвольной области Ω, но при больших значениях параметра $\lambda > 0$. Авторы [13] доказали однозначную разрешимость задачи и получили асимптотическое разложение решения при $\lambda \to \infty$.

Недавно появилась работа Н. Н. Уральцевой [14], в которой изучаются задачи для неравномерно эллиптических уравнений, более общих, чем (3.9). Область Ω в [14] предполагается выпуклой, а краевое условие — однородным, что соответствует $\theta = \pi / 2$ в (3.10). Рассмотрим в этих предположениях уравнение (3.9) с ненулевой правой частью (это означает, что на поверхности жидкости давление распределено по заданному закону). Из результатов [14] следует, что существует единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\partial y / \partial N = 0$ на S.

Пусть $y(x_1, x_2)$ — некоторое решение задачи (3.9), (3.10). Чтобы определить f по данному y, следует найти постоянную C из (3.8). Для этого подставим $y = f - C$ в (3.7), а интеграл от y по области вычислим, интегрируя по частям равенство (3.9) и используя условие (3.10)

$$C = f - \lambda^{-1} \varkappa \cos\theta \tag{3.11}$$

где $\varkappa$ — отношение периметра области Ω к ее площади.

Определим $f(x_1, x_2)$ из соотношений (3.8) — (3.11). Тогда условия (3.5), (3.7) будут удовлетворены точно, а (3.4) приближенно, если μ мало. При данном $f \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ рассмотрим краевую задачу (3.2), (3.3) для уравнений Навье — Стокса (3.1). Ее решение допускает априорную оценку нормы $\mathbf{v}$ в векторном соболевском пространстве $\mathbf{W}^1_2(G)$. Это позволяет, следуя рассуждениям [3], доказать, что задача (3.1) — (3.4) всегда имеет по крайней мере одно обобщенное решение. Решение единственно, если, $|\mathbf{a}|_{2+\alpha,\,\overline{\Omega}}$ достаточно мало. Функции $\mathbf{v}$, p бесконечно дифференцируемы в открытой области G. Если $f \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega})$, то $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(G')$, $\nabla p \in C^\alpha(G')$ для любой замкнутой подобласти G' области $\overline{G}$, не содержащей точек пересечения свободной поверхности и дна с боковой границей G.

Условие применимости указанной аппроксимации в задаче (3.1) — — (3.5), (3.7) требует, чтобы при прочих фиксированных параметрах коэффициент поверхностного натяжения σ был достаточно велик. Заметим, что для воды $\sigma = 72.5$ *г/сек*^{2}, $\nu = 0.01$ *см*^{2}/*сек* при 20°С, $\rho = 1$ *г/см*^{3}; следовательно, $\mu < 10^{-6}$ при $h > 1.4$ *см*. Можно было бы, однако, считать σ, а вместе с ним и μ, фиксированным, но рассматривать медленное движение, что соответствует малой вектор-функции $\mathbf{a}$ (x_1, x_2). Предполагая, что $\mu \mathbf{n} \cdot T^* |_\Gamma \cdot \mathbf{n} \to 0$ при $\mathbf{a} \to 0$, приходим к изложенной выше схеме приближенного решения задачи о течении в сосуде.

Наконец, аналогичные рассмотрения применимы, по-видимому, и к задаче о течении в глубоком сосуде. Пусть μ, λ, θ, $\mathbf{a}$, Ω фиксированы и $f \to \infty$; предполагаем, что при этом $T_{ij}^* |_\Gamma \to 0$, $\mathbf{n} \cdot T |_\Gamma \cdot \mathbf{n} \to \mathrm{const}$. Это позволяет, как и прежде, приближенно определить свободную границу как минимальную поверхность в поле тяжести. Физический смысл сделанного предположения состоит в том, что на форму свободной поверхности слабо влияют источники и стоки, расположенные далеко от нее. Гипотеза о том, что $T_{ij}^* |_\Gamma \to 0$ при $f \to \infty$, соответствует хорошо известному в теории упругости принципу Сен-Венана (см.,например, [15], где изложены различные версии этого принципа).

Рассмотрим аналог задачи (3.2), (3.3) для системы Стокса $\Delta \mathbf{v} - \nabla p = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ в плоском случае. Используя методику работы Ноулза [15], можно показать, что элементы тензора T^* экспоненциально убывают с возрастанием x_3 вдоль любого отрезка, параллельного оси x_3 и лежащего внутри области G. Можно надеяться, что подобное утверждение справедливо и для решения нелинейной трехмерной задачи (3.1) — (3.3) по крайней мере в случае, когда $\mathbf{a}$ мало.

Поступила 3 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухначев В. В. Инвариантные решения уравнений Навье — Стокса, описывающие движения со свободной границей. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 2.
2. Pukhnachnev V. V. Free-boundary problems of the Navier—Stokes equations. Fluid Dynamics Trans, 1971, vol. 6, pt. 2. Warszawa, 1971.
3. Пухначев В. В. Плоская стационарная задача со свободной границей для уравнений Навье — Стокса. ПМТФ, 1972, № 3.
4. Stokes G. G. On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. Phil. Mag., No. 845, vol. 29, pp. 60—62.
5. Ламб Г. Гидродинамика. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
6. Сретенский Л. Н., О волнах на поверхности вязкой жидкости. Тр. ЦАГИ, 1941, № 541.
7. Douglis A., Nirenberg L. Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Commun. Pure and Appl., Math., 1955, vol. 8, No. 4.
8. Солонников В. А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса — Л. Ниренберга. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1964, т. 28, № 3.
9. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, II. Commun. Pure and Appl. Math., 1964, vol. 17, No. 1.
10. Солонников В. А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса — Л. Ниренберга, II. Тр. Матем. Ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 1966, т. 92.
11. Беляева М. А., Мышкис А. Д., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых гравитационных полях. Равновесие формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
12. Johnson W. E., Perko L. M. Interior and exterior boundary value problems from the theory of the capillary tube. Arch. for Ration. Mech. and Analysis, 1968, vol. 29, No. 2.
13. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Об асимптотическом интегрировании уравнения равновесия жидкости с поверхностным натяжением в поле тяжести. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6.
14. Уральцева Н. Н. Нелинейные краевые задачи для уравнений типа минимальной поверхности. Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 1971, т. 116.
15. Knowles J. K. On Saint-Venant principle in the two — dimensional linear theory elasticity. Arch. for Ration. Mech. and Analysis, 1966, vol. 21, No. 1.