

## ЛИТЕРАТУРА

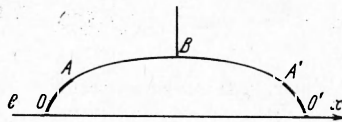
1. Richardson P. D. Heat mass transfer in turbulent separated flows. Chem. Eng. Sci., vol. 18 (1963), No. 3, 149.
2. Seban R. A. Heat transfer and flow in a shallow rectangular cavity with subsonic turbulent air flow. Int. J. of Heat and Mass Transfer, vol. 8 (1965), No. 11, 1353.
3. Орлов В. В. Экспериментальное изучение пристенной турбулентности в канале. Журнал ПМТФ, 1966, № 4, 124.
4. Roshko A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number. J. Fl. Mech., vol. 10 (1961), No. 3, p. 345.
5. Kovasznay L. S. G. Hot-wire investigation of the wake behind cylinders at low Reynolds numbers. Proc. Roy. Soc. London, A198 (1949), No. 1053 p. 174.
6. Spalding D. B. Heat transfer from turbulent separated flows. J. Fl. Mech., vol. 27 (1967), part 1, 97.
7. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NASA Tech. Rep. No. 1174, 1954.

КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ДУГ  
ПОТОКОМ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

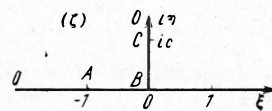
Л. И. Мальцев (Новосибирск)

В работе рассматривается задача построения кавитационного обтекания криволинейной дуги по заданному распределению скоростей на дуге потоком тяжелой жидкости. Задачи подобного типа в случае невесомой жидкости рассматривались в работах Г. Г. Тумашева [1], Г. Н. Пыхтеева [2, 3], автора [4]. Обтекание полигональных препятствий потоком тяжелой жидкости изучалось Г. Н. Пыхтеевым [5, 6] и в линейной постановке О. В. Троепольской [7] и О. М. Киселевым [8].

1. Общее решение задачи. Рассмотрим обтекание криволинейной дуги  $OA$ , расположенной на горизонтальном прямолинейном дне, безграничным вверх потоком тяжелой жидкости по схеме Рябушинского, с зеркалом (фиг. 1). Введем обозначения:  $V_\infty$  — величина скорости набегающего потока,  $V_0$  — величина скорости в точке  $A$  срыва струи,  $S_0$  — длина обтекаемой дуги.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть на дуге  $OA$  задано распределение модуля скорости в виде функции дуговой координаты

$$V = V_0 f(s) \quad (s = S/S_0, 0 \leq s \leq 1) \quad (1.1)$$

Здесь  $f(s)$  — однозначная положительная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера и условиям  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .

Требуется построить формулу контура и свободной границы, а также найти сопротивление контура. Используя симметрию, будем рассматривать только вторую четверть физической плоскости  $z = x + iy$ .

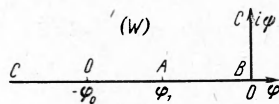
Введем функцию Жуковского

$$F = \ln \left( \frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz} \right)$$

Известно, что решение задачи можно свести к отысканию зависимостей  $W(\zeta)$  и  $F(\zeta)$ , где  $\zeta$  изменяется в некоторой канонической области. В качестве таковой выберем вторую четверть плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$ . Область течения конформно отображим на область  $\zeta$  с соответствием точек, указанным на фиг. 1 и 2.

Легко видеть, что функция, осуществляющая отображение области изменения комплексного потенциала  $W$  на вторую четверть плоскости  $\zeta$ , имеет вид (фиг. 3)

$$W = \frac{\Phi_0 \zeta}{\sqrt{c^2 + \zeta^2}} \quad (W_* = \Phi + i\psi) \quad (1.2)$$



Фиг. 3

Используя соотношения (1.1) и (1.2), а также связь  $V = dq / ds$ , получим уравнение для нахождения зависимости  $s(\xi)$ , дающей соответствие между точками дуги  $OA$  и точками луча  $(-\infty, 1]$  плоскости  $\xi$

$$\frac{\Phi_0 \xi}{\sqrt{c^2 + \xi^2}} = -\Phi_0 + V_0 S_0 \int_0^s f(s) ds \quad (1.3)$$

На мнимой полуоси плоскости  $\xi$  функция  $F(\xi)$  действительна и непрерывна. По принципу симметрии продолжим ее на всю верхнюю полуплоскость. Теперь  $F(\xi)$  определена и аналитична в верхней полуплоскости  $\xi$  и на действительной оси удовлетворяет условиям  $\operatorname{Re} F(\xi) = \ln f(s(\xi))$ ,  $|\xi| \geq 1$ ,  $\operatorname{Re} F(\xi) = u(\xi)$ ,  $|\xi| \leq 1$ .

Здесь на отрезке  $[-1, 1]$  действительной оси  $\xi$  введено обозначение  $F = u + iv$ . Задачу нахождения функции  $F(\xi)$  по выписанным выше краевым условиям решает интеграл типа Коши

$$F(\xi) = \frac{1}{\pi i} \left[ \int_{-\infty}^{-1} \frac{\ln f dt}{t - \xi} + \int_1^{\infty} \frac{\ln f dt}{t - \xi} + \int_{-1}^1 \frac{u(t) dt}{t - \xi} \right] \quad (1.4)$$

Если функция  $u(\xi)$ ,  $\xi \in [-1, 1]$  известна, то (1.2) и (1.4) дают общее решение. Так из (1.2), (1.4) и выражения для функции Жуковского получаем

$$z(\xi) = \frac{\Phi_0 c^2}{V_0} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{e^{-F(\zeta)}}{(c^2 + \zeta^2)^{3/2}} d\zeta \quad (1.5)$$

Отсюда, устремляя  $\zeta$  и  $\xi$ , получаем уравнение контура

$$z = \frac{\Phi_0 c^2}{V_0} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{f(s(\xi))(c^2 + \xi^2)^{3/2}} e^{i[q(\xi) + \Phi(u, \xi)]} d\xi \quad (1.6)$$

$$q(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\ln f}{t - \xi} dt + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\ln f}{t - \xi} dt, \quad \Phi(u, \xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t)}{t - \xi} dt, \quad |\xi| \geq 1$$

и уравнений свободной границы

$$z = z_0 + \frac{\Phi_0 c^2}{V_0} \int_{-1}^{\xi} \frac{e^{-u}}{(c^2 + \xi^2)^{3/2}} e^{+i[p(\xi) + J(u, \xi)]} d\xi \quad (1.7)$$

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\ln f}{t - \xi} dt + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t - \xi} dt, \quad J(u, \xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t)}{t - \xi} dt, \quad |\xi| \leq 1$$

Здесь  $z_0 = x_0 + iy_0$  — координата точки отрыва  $A$ . Сопротивление дуги

$$X_0 = \int_0^{S_0} (p - p_0) \sin \theta dS \quad (1.8)$$

Здесь  $p(S)$  есть распределение давлений на обтекаемой дуге,  $p_0$  — давление в каверне,  $\theta(S)$  — угол между касательной к контуру в точке с дуговой абсциссой  $S$  и осью  $x$ . Из интеграла Бернулли

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho (V_0^2 - V^2) + \gamma (y_0 - y)$$

Подставляя в (1.8) выражение для  $p - p_0$  и переходя к переменной  $\xi$ , получаем

$$X = \frac{1}{2} \rho \Phi_0 V_0 c^2 \int_{-\infty}^{-1} \frac{1 - f^2(s(\xi))}{f(s(\xi))(c^2 + \xi^2)^{3/2}} \sin [q(\xi) + \Phi(u, \xi)] d\xi + \gamma y_0^2$$

Отсюда

$$c_x = \frac{x}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 y_0} = \frac{c^2}{N} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1 - f^2(s(\xi))}{f(s(\xi))(c^2 + \xi^2)^{3/2}} \sin [q(\xi) + \Phi(u, \xi)] d\xi + 4\lambda N \quad (1.9)$$

$$N = c^2 \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin [q(\xi) + \Phi(u, \xi)]}{f(s(\xi))(c^2 + \xi^2)^{3/2}} d\xi$$

Для нахождения зависимости  $u(\xi)$  построим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение. Выписывая по формулам Сохоцкого предельные значения функции  $F(\xi)$  на отрезке  $[-1, 1]$  действительной оси плоскости  $\xi$ , получаем

$$v = p(\xi) + J(u, \xi), \quad |\xi| \leq 1$$

На свободной линии тока, где давление постоянно, интеграл Бернулли имеет вид

$$V^2 + 2gy = \text{const}$$

Дифференцируя его и используя соотношения

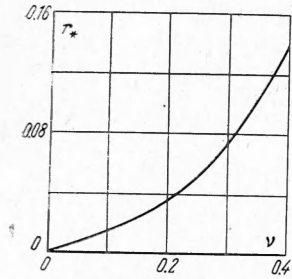
$$V = V_0 e^u, \quad dy = dS \sin \theta, \quad dS = \frac{d\Phi}{V}, \quad \theta = -v,$$

получим уравнение

$$u(\xi) = \lambda \int_{-1}^{\xi} \frac{c^2}{(c^2 + \xi^2)^{3/2}} e^{-3u} \sin [p(\xi) + J(u, \xi)] d\xi \quad (1.10)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{g\Phi_0}{2V_0^3}, \quad \xi \in [-1, 1]$$



Фиг. 4

Будем искать решение этого уравнения (1.10) в пространстве непрерывно дифференцируемых функций  $C_1$ . Г. Н. Пыхтеев сводит широкий круг струйных задач к решению уравнения вида (1.10), которое он назвал общим уравнением теории струи [5,6]. Там доказана теорема существования единственного решения основного уравнения теории струй, которая в применении к нашему уравнению имеет вид.

**Теорема 1.** Если  $\lambda < \lambda_* = c/18.94$ , то в шаре  $\Omega_{r_*}$  существует единственное решение  $u(\xi)$ , удовлетворяющее условию  $u(-1) = 0$ . Это решение может быть получено как предел последовательности

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \lambda \int_{-1}^{\xi} \frac{c^2}{(c^2 + \xi^2)^{3/2}} e^{-3u} \sin [p(\xi) + J(u_n, \xi)] d\xi$$

быстрота сходимости которой оценивается неравенством  $\|u - u_n\|_{C_1} \leq (\lambda/\lambda_*)^n r_*$ . Величина  $r_*$  находится из графика, изображенного на фиг. 4, где  $v = 7.519 \lambda/c$ .

Для каждого фиксированного достаточно малого значения параметра  $\lambda$  теорема 1 гарантирует существование и единственность решения основного уравнения (1.10) и дает метод его решения. Однако область значений  $\lambda$  оказывается малой. Для несколько более широкой области значений  $\lambda$  может быть доказана неконструктивная теорема существования.

**Теорема 2.** Для всякого  $\lambda < c/16.31$  интегральное уравнение (1.10) имеет по крайней мере одно непрерывно дифференцируемое решение  $u(\xi)$ , удовлетворяющее условию  $u(-1) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Omega_r$  есть шар пространства  $C_1$  непрерывно-дифференцируемых функций, определенных на интервале  $[-1, 1]$  и удовлетворяющих условиям:  $\|u(\xi)\|_{C_1} \leq r$ ,  $u(-1) = 0$ . Здесь

$$\|u(\xi)\|_{C_1} = \max_{[-1, 1]} |u'(\xi)|$$

Тогда, очевидно,  $|u(\xi)| \leq 2r$  на  $(-1, 1)$ . Шар  $\Omega_r$  есть замкнутое множество банахова пространства. Оператор

$$Tu = \lambda \int_{-1}^{\xi} \frac{c^2}{(c^2 + \xi^2)^{3/2}} e^{-3u} \sin [p(\xi) + J(u, \xi)] d\xi, \quad \xi \in [-1, 1]$$

действует из  $\Omega_r$  в пространстве  $C_1$ . Нетрудно видеть, что

$$\|Tu(\xi)\|_{C_1} \leq \lambda (1/c) e^{6r}$$

Если  $\lambda < rc/e^{6r}$ , то  $Tu$  переводит  $\Omega_r$  на себя. Отношение  $r/e^{6r}$  имеет максимум при  $r = 1/6$ , который равен  $1/16.31$ .

Покажем, что оператор  $Tu$  вполне непрерывный. По определению  $Tu$

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_{C_1} = \max \left| \frac{c^2}{(c^2 + \xi^2)^{3/2}} \{e^{-3u_1} \sin [p(\xi) + Ju_1] - e^{-3u_2} \sin [p(\xi) + Ju_2]\} \right|$$

В фигурных скобках правой части прибавим и вычтем выражение

$$e^{-3v_1} \sin [p(\xi) + Ju_2]$$

Можно выписать неравенства

$$\begin{aligned} |e^{-3u_1} - e^{-3v_1}| &\leq e^{6r} 3 |u_1 - u_2| \leq 6e^{6r} \|u_1 - u_2\| c_1 \\ |\sin[p(\xi) + Ju_1] - \sin[p(\xi) + Ju_2]| &\leq \beta \|u_1 - u_2\| c_1 \end{aligned}$$

Величина  $\beta = 1/2 \pi (1 + 2 \ln 2)$  найдена Г. Н. Пыхтевым [6]. Тогда

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_{c_1} \leq (6 + \beta) e^{6r} \frac{\lambda}{c} \|u_1 - u_2\|_{c_1}$$

что доказывает непрерывность оператора  $Tu$ .

Отображение  $Tu$  переводит каждое ограниченное множество из пространства  $C_1$  в ограниченное множество пространства  $C_1^\alpha$ , функций, первая производная которых удовлетворяет условию Гёльдера с тем же показателем  $\alpha$ , что и показатель, с которым условие Гёльдера удовлетворяет функция  $f(s)$ . Такое отображение компактно.

Следовательно, оператор  $Tu$  вполне непрерывен и переводит выпуклое множество банахова пространства на себя. Тогда утверждение теоремы следует из принципа Шаудера.

Теперь определим постоянные, вошедшие в решение задачи. Из уравнения контура (1.6) вытекает, что длина дуги

$$S_0 = \frac{\Phi_0}{V_0} N_1, \quad N_1 = c^2 \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{f(s(t))(c^2 + t^2)^{3/2}} \quad (1.11)$$

Тогда число Фруда, вычисленное по величине  $S_0$ ,

$$Fr = \frac{V_\infty}{V_0} \frac{1}{\sqrt{2\lambda N_1}} \quad (1.12)$$

Удовлетворяя интеграл Бернулли в двух точках нулевой линии тока — на бесконечности и в точке схода струи — и используя выражение для числа Фруда  $Fr$  и числа кавитации

$$\sigma = \frac{P_\infty - P_0}{1/2 \rho V_\infty^2} = \frac{V_0^2}{V_\infty^2} + \frac{2}{Fr^2} \frac{y_0}{S_0} - 1 \quad (1.13)$$

Здесь  $y_0$  есть ордината точки отрыва  $A$  и определяется по формуле (1.6).

Наконец, из условия на бесконечности в физической плоскости, используя (1.4), найдем

$$\ln \frac{V_\infty}{V_0} = \frac{c}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\ln f}{t^2 + c^2} dt + \frac{c}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t)}{t^2 + c^2} dt + \frac{c}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\ln f}{t^2 + c^2} dt \quad (1.14)$$

Таким образом, на семь параметров:  $\lambda$ ,  $F$ ,  $\sigma$ ,  $c$ ,  $V_\infty/V_0$ ,  $y_0$ ,  $\Phi_0/V_0$  — наложены условия: (1.11), (1.12), (1.13), (1.14). Будем задавать физические параметры  $V_\infty/V_0$ ,  $Fr$  и  $S_0$ . Легко видеть, что разрешимость выписанной выше системы уравнений на параметры  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\Phi_0/V_0$ ,  $\sigma$  будет обеспечена, если удастся решить уравнение (1.14) относительно  $c$ . Перепишем уравнение (1.14) в виде

$$c = R(c) \quad R(c) = -\frac{\pi}{J} \left( \ln \frac{V_0}{V_\infty} + \frac{c}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t)}{t^2 + c^2} dt \right), \quad J = \int_{-1}^1 \frac{\ln f(s(t))}{1 + c^2 t^2} dt \quad (1.15)$$

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых  $\delta$  и  $\alpha$  таких, что  $0 < \delta < \alpha < \infty$ , и отношений  $V_0/V_\infty$ , удовлетворяющих условию

$$+\frac{\delta}{\pi} J + \frac{2r}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\delta} \leq \ln \frac{V_0}{V_\infty} \leq \frac{\alpha}{\pi} J - \frac{2r}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\delta} \quad (1.16)$$

уравнение (1.15) имеет хотя бы одно решение  $C \in [\delta, \alpha]$ .

Покажем сначала, что решение уравнения (1.10), в котором зависимость  $\lambda(c)$  определяется формулой

$$\lambda = \frac{V_\infty^2}{V_0^2} \frac{1}{2F^2} \frac{1}{N_1(c)}$$

непрерывно зависит от параметра  $c$ .

Пусть значению  $c_1$  соответствует функция  $u_1(\xi)$  и значению  $c_2$  функция  $u_2(\xi)$ . В результате довольно громоздких выкладок можно получить неравенство

$$|u_1 - u_2| < \frac{Me^{6r}}{1 - 0.461e^{6r}} |c_1 - c_2|$$

где  $M$  — положительная постоянная. Отсюда следует непрерывность функции  $u(\xi, c)$  по параметру  $c$ , так как  $r < r_* = 0.139$  на основании теоремы 1.

Оператор  $R(c)$  отображает шар  $K = \{c; \|c\| \leq (\alpha - \delta)/2\}$  пространства  $R_1$  в замкнутое множество элементов того же пространства, ограниченных по норме величиной

$$\frac{\pi}{J} \left( \lg \frac{V_0}{V_\infty} + 2r \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\delta} \right) + \frac{\delta + \alpha}{2}$$

Здесь  $\|c\| = |c - 1/2(\delta + \alpha)|$ . Кроме того, ввиду неравенств (1.16) оператор  $R(c)$  обладает таким свойством, что  $\|R(c)\| \leq 1/2(\alpha - \delta)$ , если  $\|c\| = 1/2(\alpha - \delta)$ .

Пространство  $R_1$  является евклидовым. Всякое ограниченное множество элементов евклидова пространства компактно. Следовательно, оператор  $R(c)$  непрерывен и компактен, т. е. вполне непрерывен. А тогда на основании обобщенного принципа Шаудера [12] в шаре существует неподвижная точка, что и доказывает теорему.

Пусть, например,  $f(s)$  такова, что  $f(s(t^{-1})) = [f_1(t)]^{1+c^2t^2}$ , где  $f_1(t)$  положительная, непрерывная, монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию Гёльдера и условиям  $f_1(0) = 0$ ,  $f_1(1) = 1$ . Тогда верхняя граница области изменения  $\ln(V_0/V_\infty)$  строго больше нижней (неравенство (1.16)), если для любого  $\delta > 0$  выбираем

$$\alpha > \delta + 4r \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\delta} \left( \int_{-1}^1 |\lg f_1(t)| dt \right)^{-1}$$

**2. Частный случай.** Будем задавать зависимость скорости на дуге от дуговой координаты в параметрической форме  $V = V_0 F_1(n)$ ,  $S = S_0 F_2(n)$ , где  $F_1(n)$  и  $F_2(n)$  — однозначные положительные функции переменного  $n \in [n_1, n_2]$ , удовлетворяющие условию Гёльдера и условиям

$$F_1(n_1) = F_2(n_1) = 0, \quad F_1(n_2) = F_2(n_2) = 1$$

Тогда функция  $f(s(\xi))$ , через которую построено общее решение,

$$f(s(\xi)) = F_1(n(\xi))$$

а зависимость  $n(\xi)$  находится из условия

$$\frac{\Phi_0 \xi}{V c^2 + \xi^2} = -\Phi_0 + V_0 S_0 \int_{n_1}^n F_1(n) F_2'(n) dn, \quad -\infty < \xi < -1$$

Пусть, например,  $F_1 = \sqrt{\frac{1-n}{1+n}}$

$$F_2(n) = -\frac{1}{A} \int_1^n \frac{(n+1)n dn}{(n^2 + \beta^2)^{3/2} \sqrt{1-n^2}}$$

$$A = \int_0^1 \frac{(n+1)n dn}{(n^2 + \beta^2)^{3/2} \sqrt{1-n^2}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}$$

Тогда

$$n = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi}, \quad f(s(\xi)) = \left( \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} \right)^{1/2}$$

Подставляя  $f(s(\xi))$  в формулы для  $q(\xi)$  и  $p(\xi)$ , получаем

$$q(\xi) = -\frac{\pi}{2} (\operatorname{sign} \xi), \quad |\xi| \geq 1 \quad p(\xi) = -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{\xi} - \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right), \quad |\xi| \leq 1$$

Построим решение основного уравнения (1.10) в первом приближении от решения задачи для случая невесомой жидкости  $u_0(\xi) = 0$ .

$$u_1(\xi) = -\lambda c^2 \left[ \frac{1}{(c^2 + \xi^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+c^2)^{3/2}} \right]$$



Выпишем по формулам (1.6) уравнение контура

$$x = -\frac{\Phi_0 c^2}{V_0} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{(c^2 + \xi^2)^{3/2}} \sin \Phi(\xi) d\xi, \quad y = -\frac{\Phi_0 c^2}{V_0} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{(c^2 + \xi^2)^{3/2}} \cos \Phi(\xi) d\xi$$

и по формулам (1.7) уравнение свободной поверхности

$$x = x_0 + \frac{\Phi_0 c^2}{V_0} \int_{-1}^{\xi} \frac{e^{-u}}{(c^2 + \xi^2)^{3/2}} \cos \left[ -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 - \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} + \Phi(\xi) \right] d\xi$$

$$y = y_0 + \frac{\Phi_0 c^2}{V_0} \int_{-1}^{\xi} \frac{e^{-u}}{(c^2 + \xi^2)^{3/2}} \sin \left[ -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 - \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} + \Phi(\xi) \right] d\xi$$

Здесь

$$\Phi(\xi) = -\frac{\lambda c^2}{\pi} \left[ \frac{1}{(c^2 + \xi^2)^{1/2}} \ln \left| \frac{(1 - \xi) [c^2 - \xi + \sqrt{(1 + c^2)(c^2 + \xi^2)}]}{(1 + \xi) [c^2 + \xi + \sqrt{(1 + c^2)(c^2 + \xi^2)}]} \right| + \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right]$$

Из уравнения контура видно, что в случае невесомой жидкости, когда  $\Phi(\xi) \equiv 0$ , контур представляет собой пластинку, поставленную нормально потоку.

Система уравнений на параметры принимает вид

$$S_0 = \frac{\Phi_0}{V_0} N_1, \quad N_1 = \frac{c^2}{\sqrt{1 + c^2}} + \sqrt{1 + c^2} E \left( \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} K \left( \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} \right)$$

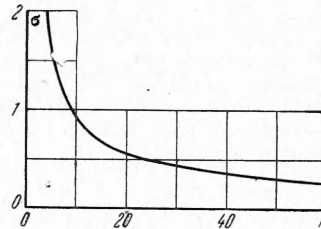
$$\sigma = \frac{V_0^2}{V_\infty^2} + \frac{2}{Fr^2} \frac{y_0}{N_1} - 1, \quad \lambda = \frac{V_\infty^2}{V_0^2} \frac{1}{N_1 Fr^2} \quad (2.1)$$

$$\ln \frac{V_\infty}{V_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + c^2} - c}{\sqrt{1 + c^2} + c} - \frac{2\lambda c}{\pi \sqrt{1 + c^2}} \left( 1 - c \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{c} \right)$$

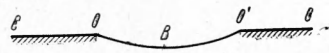
Если в уравнениях системы (2.1) положить  $\lambda = \text{const}$  и заставить  $c$  пробегать значения от нуля до бесконечности, то из (2.1) получим параметрическую зависимость  $Fr(\sigma)$ . Так на фиг. 5 представлен график функции  $Fr(\sigma)$  для  $\lambda = 1/21 c$ . Кривые, соответствующие меньшим значениям  $\lambda$ , лежат выше данной. Следовательно, точки, лежащие выше кривой, изображенной на фиг. 4, определяют область значений чисел кавитации и чисел Фруда, для которых существует единственное решение уравнения (1.10).

Пусть  $\delta = 0.1$  и  $\alpha = 1$ . Тогда, если заданы  $S_0 > 0$ ,  $(V_0/V_\infty) \in [1.28; 2.09]$  и  $Fr > 74.2$ , то система (2.1) на основании теоремы 3 разрешима относительно  $\Phi_0/V_0$ ,  $\lambda$ ,  $\sigma$  и  $c$ , причем  $c \in [0.1; 1]$ .

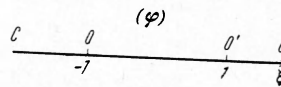
3. Кавитационное течение в нижней полуплоскости. Если область течения, изображенную на фиг. 1, зеркально отобразим на нижнюю полуплоскость, а вектор ускорения силы тяжести по-прежнему будем считать направленным вертикально вниз, то получим картину течения, аналогичную исходному, но для нижней полуплоскости. Проще, однако, для достижения той же цели изменить на обратный вектор ускорения силы тяжести. Тогда общее решение задачи для ниж-



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

ней полуплоскости принимает совершенно такой же вид, что и для верхней, с той лишь разницей, что теперь параметр  $\lambda$  имеет знак минус, в силу того, что интеграл Бернулли на свободной поверхности здесь имеет вид

$$V^2 - 2gy = \text{const}$$

В частности, теорема существования решения основного уравнения (1.10) сохраняет свою силу.

Таким образом, решения уравнения (1.10) при  $\lambda < 0$  соответствуют течениям в нижней полуплоскости, при  $\lambda > 0$  — течениям в верхней полуплоскости.

4. **Предельный случай.** Пусть обтекаемая дуга стягивается в точку. Убедимся в том, что существуют нетривиальные решения задачи о течении тяжелой жидкости в верхней полуплоскости, на части границы которого давление остается постоянным, а остальная часть границы по-прежнему является прямолинейной горизонтальной (фиг. 6). Этот случай нельзя получить из общего решения задачи как частный.

Выберем в качестве параметрической области верхнюю полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  (фиг. 7). Полагая линию тока *СОВОС* нулевой, а потенциал скоростей в точке *O* равным нулю и в точке *O'* равным  $\varphi_0$ , нетрудно видеть, что

$$W = (\varphi_0 / 2) (\zeta + 1) \quad (4.1)$$

Функция Жуковского

$$F = \lg \left( \frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz} \right)$$

где  $V_0$  величина скорости в точке *O*, аналитична в верхней полуплоскости  $\zeta$  и на действительной оси  $\xi$  удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Im} F(\xi) = 0, \quad |\xi| \geq 1, \quad \operatorname{Re} F(\xi) = u = \lg(V/V_0), \quad |\xi| \leq 1$$

Зависимость  $F(\zeta)$  найдется из решения смешанной краевой задачи теории аналитических функций. Решение задачи будет ограниченным на обоих концах.

$$F(\zeta) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t) dt}{t - \zeta \sqrt{1 - t^2}} \quad (4.2)$$

Повторяя все процедуры, которые привели к уравнению (1.10), получаем

$$u'(\xi) = \lambda e^{-3u} \sin Iu \quad (4.3)$$

$$Iu = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t) dt}{t - \xi \sqrt{1 - t^2}}, \quad |\xi| \leq 1$$

Решив уравнение (4.3) относительно  $u(\xi)$ , по формулам (4.1) и (4.2) получим общее решение задачи.

Уравнение (4.3) является нелинейным и однородным, т. е.  $u = 0$  является его решением. Оказывается, что оно имеет точки бифуркации. Найдем производную Фреше от нелинейного оператора, стоящего в правой части уравнения (4.3) и построим уравнение

$$u'(\xi) = \lambda Iu, \quad |\xi| \leq 1 \quad (4.4)$$

В линейном уравнении (4.4) произведем замену переменных  $\xi = \cos \sigma$ , а затем проинтегрируем в правой части по частям. Проинтегрированная часть оказывается равной нулю, и уравнение (4.4) принимает вид

$$u'(\sigma) = \lambda \frac{\sin \sigma}{\pi} \int_0^\pi u'(\delta) \ln \left| \frac{\sin^{1/2}(\delta + \sigma)}{\sin^{1/2}(\delta - \sigma)} \right| d\delta, \quad \sigma \in [0, \pi] \quad (4.5)$$

Оператор Фредгольма с ядром

$$K(\sigma, \delta) = \ln \left| \frac{\sin^{1/2}(\sigma + \delta)}{\sin^{1/2}(\sigma - \delta)} \right|$$

будет вполне непрерывным [9]. Второе интегрированное ядро

$$K_2(\delta, \sigma) = \int_0^\pi \sin t \ln \left| \frac{\sin^{1/2}(\delta + t)}{\sin^{1/2}(\delta - t)} \right| \sin t \ln \left| \frac{\sin^{1/2}(t + \sigma)}{\sin^{1/2}(t - \sigma)} \right| dt$$

обладает тем свойством, что  $K_2(\delta, \delta)$  на всем интервале  $(0, \pi)$  больше нуля и обращается в нуль только на концах его. А тогда по известной теореме [10] уравнение (4.5) имеет единственную неотрицательную фундаментальную функцию. Отвечающее ей ха-

рактическое число является положительным, простым и меньше модуля всякого другого характеристического числа этого уравнения. В тех случаях, когда характеристические числа линейного уравнения нечетнократные, линеаризация нелинейного уравнения для определения его точек бифуркации законна [11]. Следовательно, исходное уравнение (4.3) имеет по крайней мере одну точку бифуркации. Причем эта точка соответствует для данного случая; все другие точки бифуркации уравнения (4.3), если они есть, будут соответствовать течению в нижней полуплоскости.

Автор благодарит Г. Н. Пыхтеву и В. Н. Монахова за полезные советы и Н. А. Садовскую, оказавшую помощь в численных расчетах.

Поступила 22 VI 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г. Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления. Ученые записки КГУ 1952, т. 112, кн. 3.
2. Пыхтеев Г. Н. К задаче о струйном обтекании криволинейной дуги безграничным и ограниченным потоком идеальной несжимаемой жидкости. ПММ, 1955, т. 19, вып. 4.
3. Пыхтеев Г. Н. Решение обратной задачи плоского кавитационного обтекания криволинейной дуги. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
4. Мальцев Л. И. Решение одной обратной задачи кавитационного обтекания криволинейной дуги. ПМТФ, 1966, № 3.
5. Пыхтеев Г. Н. Общая и основная краевые задачи плоских обратных установившихся течений и соответствующие им нелинейные уравнения. ПМТФ, 1966, № 1.
6. Пыхтеев Г. Н. Некоторые методы решения одного нелинейного интегродифференциального уравнения теории струй идеальной жидкости. ПМТФ, 1966, № 2.
7. Гронопольская О. В. Об одной схеме кавитационного течения тяжелой жидкости. Изв. ВУЗов, Математика, 1963, № 6.
8. Киселев О. М. О кавитационном обтекании пластинки потоком тяжелой жидкости. Изв. ВУЗов, Математика, 1963, № 6.
9. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. «Мир», 1964.
10. Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. УМН, 1948, т. 3, вып. 1 (23).
11. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1956.
12. E h r m a n n H., L a h m a n n H. E. Anwendungen des Schauderschen Fixpunktsatzes auf gewisse nichtlineare Integralgleichungen Enseign. math, 1965, Bd. 11, N 4.

#### ПОЛУЧЕНИЕ БОЛЬШИХ ИМПУЛЬСНЫХ ДАВЛЕНИЙ

*В. Г. Белан, А. Е. Войтенко, А. И. Иванченко*

(Новосибирск)

Созданная в Институте ядерной физики установка для магнитного сжатия полых металлических цилиндров (металлический  $\theta$ -пинч), позволяет передавать ускоряемому металлу значительную энергию, первоначально накопленную в конденсаторной батарее [1,2].

Схема установки представлена на фиг. 1, где  $C$  — конденсаторная батарея,  $1$  — разрядник,  $2$  — соленоид,  $3$  — лайнер (диаметр 119 мм, длина 150 мм, толщина стенки 1—3 мм),  $4$  — сплошной сжимаемый стержень (диаметром 15—40 мм). Использовалась конденсаторная батарея емкостью  $C = 6 \cdot 10^{-2}$  ф при напряжении  $V = 4$  кв. Общая индуктивность разрядной цепи  $L = 50$  см. В обычных экспериментальных условиях вес ускоряемого к оси медного или алюминиевого лайнера около 200 г при скорости порядка  $10^5$  см/сек. Ток разряда, идущий по одновитковой катушке, создает в зазоре между катушкой и лайнером ускоряющее магнитное поле. Отношение толщины стенки к скин-слою таково, что за время ускорения поле практически не успевает проникнуть во внутреннюю полость лайнера. Давление ускоряющего магнитного поля на наружную поверхность лайнера около  $2 \cdot 10^3$  атм.

Установка в основном предназначена для проведения экспериментов по сжатию плазмы [1], однако возможность электромагнитного ускорения значительной массы металла до большой скорости позволяет использовать ее для проведения ряда других экспериментов.

В частности, появляется возможность в лабораторных условиях получать импульсные давления, превышающие  $10^5$  атм, что обычно достигается только использованием