УДК 532.5.013.2+519.642.4

О ПРОБЛЕМЕ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. Н. Белых

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: belykh@math.nsc.ru

Построен принципиально новый ненасыщаемый алгоритм численного решения задачи Дирихле — Неймана для уравнения Лапласа, позволяющий автоматически за счет гладкости искомого решения учитывать специфику осесимметричной постановки этой задачи, препятствующей использованию любых насыщаемых (с главным членом погрешности) вычислительных методов.

Ключевые слова: идеальная жидкость, свободная поверхность, осевая симметрия, задача Дирихле — Неймана, ненасыщаемый численный метод.

DOI: 10.15372/PMTF20190219

Введение. Рассматриваемая в данной работе задача была предложена автору Л. В. Овсянниковым в следующей формулировке: описать эволюцию движущегося в $\mathbb{R}^3$ конечного объема идеальной несжимаемой жидкости (капли) с целью выявления возможных причин его эволюционного разрушения. Требовалось предложить корректную постановку осесимметричной задачи.

Следует отметить, что первый строгий результат решения задачи о неустановившемся движении “плоской” жидкой капли был получен Л. В. Овсянниковым [1, 2] на основе метода конформных отображений с использованием созданного им аппарата шкал банаховых пространств аналитических функций.

Основная трудность при исследовании указанного класса нестационарных задач гидродинамики состоит в том, что поле скоростей и давление определяются совместно с областью движения жидкости. При этом для определения области имеются два условия: кинематическое и динамическое, связывающие форму границы области и скорости жидких частиц на ней. Кинематическое условие означает, что жидкая граница области во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц, а динамическое равносильно заданию давления вдоль жидкой границы области. Оба условия нелинейны, что создает значительные математические трудности. Однако, поскольку уравнения движения жидкости (уравнения Эйлера) таковы, что давление определяется аддитивно с точностью до произвольной функции времени, его всегда можно положить равным нулю на жидкой границе области. В результате жидкая граница освобождается от давления, становясь свободной.

Трудность проблемы разрушения решений трехмерных уравнений Эйлера обусловлена отсутствием теоретических представлений и неразвитостью математических методов для описания режимов поведения решений в момент зарождения у них особенностей (сингулярностей). В точной математической постановке эта проблема близка к проблеме продолжения на большие времена гладких решений трехмерных уравнений Эйлера и не решается с использованием современных аналитических и численных методов [3]. Однако в предположении потенциальности и осевой симметричности движения жидкости задачу можно свести к более простой математической задаче, не ограничивая ее смысл. В результате задача редуцируется к ее одномерному аналогу, описываемому системой эволюционных (по времени) псевдодифференциальных уравнений, дополненной данными Коши. При этом особый интерес представляет проблема возникновения за конечное время особенностей у комплексных (по времени t) решений этих уравнений.

В работе [4] доказана теорема об аналитичности на конечном промежутке времени $t > 0$ решения задачи о безвихревом (в отсутствие массовых сил и поверхностного натяжения) неустановившемся осесимметричном движении капли жидкости под действием импульса давления, распределенного по границе в начальный момент времени $t = 0$. Действительно, если аналитическое решение существует в течение конечного времени t_* и не может быть непрерывно продолжено для $t > t_*$, то при $t = t_*$ происходит катастрофа (например, решение разрушается). Можно попытаться построить теорию разрушения свободной границы (решения) на основе следующего простого предположения: разрушение свободной границы происходит в момент образования на ней точечной особенности. Характер и тип особой точки должны определяться непосредственно в процессе построения решения задачи в целом. Таким образом, полученный в [4] результат позволяет мотивированно формулировать гипотезу о характере зарождения особенностей решений этой задачи, для того чтобы найти их (если они существуют) на положительной части вещественной оси времени $t > 0$. Другие причины разрушения свободной границы при выполнении условий теоремы, доказанной в [4], по-видимому, отсутствуют. Таким образом, указанная гипотеза не лишена смысла.

При использовании данной гипотезы в задаче об осесимметричной капле появляется возможность приблизиться к решению проблемы появления особой точки на свободной поверхности. Для этого можно использовать процедуру аналитического продолжения решения задачи из окрестности точки $t = 0$ на большие времена $t > 0$. Для реализации программы поиска особой точки предполагается провести прецизионные численные расчеты путем организации доказательных (по Бабенко) вычислений [5] на компьютере. Фактически если и возможно осуществить процедуру аналитического продолжения, то только при правильном сочетании аналитических и численных методов, причем аналитические методы должны быть адаптированы с учетом требований, предъявляемых численными алгоритмами. При этом наиболее эффективными могут оказаться методы без насыщения [6], поскольку классом корректности исследуемой задачи является пространство бесконечно дифференцируемых (аналитических) функций. Однако в этом случае возникает ряд принципиальных и сложных вычислительных проблем: 1) дискретизация задачи Коши, классом корректности которой служит пространство C^∞-гладких функций, вследствие чего вопрос о приемлемом ограничении числа l (степеней свободы конечномерного аналога задачи Коши) является определяющим, поскольку связан с возможностью полного численного исследования задачи; выбор l осуществляется с учетом принадлежности решения компакту C^∞-гладких функций [7]; 2) построение на шаге по времени прецизионного численного решения эллиптических краевых задач в C^∞-гладких осесимметричных областях достаточно произвольной формы. Таким образом, требования к точности вычислений обусловливают необходимость разработки алгоритмов, учитывающих C^∞-гладкость решений эллиптической задачи [6].

Данная работа посвящена построению принципиально новых ненасыщаемых алгоритмов численного решения эллиптических краевых задач для уравнения Лапласа в C^∞-гладких осесимметричных областях достаточно произвольной формы, возникающих в итерационном процессе на шаге по времени. Особенностью ненасыщаемых алгоритмов является их способность автоматически (с целью обеспечения нужной точности) подстраиваться к имеющимся ресурсам гладкости решений задач, в частности к их бесконечной гладкости, что позволяет конструировать численные решения задач, принадлежащие классу корректности, определенному на этапе теоретического исследования задачи. Необходимость построения таких алгоритмов обусловлена тем, что в большинстве применяемых при исследовании эллиптических задач численных методов не используется в должной мере специфика задания их операторов как операторов эллиптических, вследствие чего не учитывается важная информация о решениях — принадлежность компакту бесконечно гладких функций [6]. Математической основой для численного исследования указанной задачи являются результаты работ [4, 8–10].

1. Постановка задачи. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченный связный объем идеальной несжимаемой жидкости с гладкой границей $\partial\omega$, а $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$, $\pi(t, \boldsymbol{x})$ и $\varrho(t, \boldsymbol{x}) \equiv 1$ — скорость, давление и плотность жидкой частицы $\boldsymbol{x}$ из ω в момент времени $t \geqslant 0$ соответственно.

В отсутствие массовых сил и поверхностного натяжения рассмотрим в ω уравнения безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости (уравнения Эйлера)

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \frac{1}{\varrho}\,\nabla_x \pi = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \omega, \quad \boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla_x); \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{u} = 0, \qquad \operatorname{rot}_x \boldsymbol{u} = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \omega, \tag{1.2}$$

возникающего под действием начального импульса давления Π/ϱ, распределенного по границе $\partial\omega$. При этом начальное поле скоростей $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$ определяется потенциалом скоростей $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) = -\nabla_x(\Pi/\varrho)$. Следует отметить, что импульсная постановка задачи не нарушает потенциальность движения идеальной несжимаемой жидкости в ω [4]. В (1.1), (1.2) дифференциальные операции ∇_x, div_x и rot_x осуществляются по декартовым координатам $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ — переменным Эйлера. Специфика задачи состоит в том, что область ω заранее не фиксирована и на ее границе $\partial\omega$ при всех $t \geqslant 0$ выполнены два условия: кинематическое и динамическое. Если искать уравнение жидкой границы $\partial\omega$ в виде $h(t, \boldsymbol{x}) = 0$, то, поскольку $\boldsymbol{u} = \nabla_x\varphi$, эти условия равносильны выполнению на $\partial\omega$ следующих соотношений: $d\boldsymbol{x}/dt|_{h=0} = \nabla_x\varphi(t, \boldsymbol{x})$ и $0 = \partial\varphi/\partial t + |\nabla_x\varphi|^2/2 = d\varphi/dt - |\nabla_x\varphi|^2/2$ (интеграл Коши — Лагранжа). При этом к уравнениям (1.1) следует добавить данные Коши: в области ω_0 с границей $\partial\omega_0$ задается вектор скорости $\boldsymbol{u}_0 = \nabla_x\varphi_0$ при соблюдении следующих необходимых условий: $\operatorname{div}_x \boldsymbol{u}_0 = 0$, $\operatorname{rot}_x\, \boldsymbol{u}_0 = 0$ при $t = 0$.

В результате в эйлеровых переменных t, $\boldsymbol{x}$ задача (1.1), (1.2) сводится к определению потенциала $\varphi(t, \boldsymbol{x})$ скорости $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ в переменной области $\omega(t)$, а именно к следующей задаче: пусть даны область $\omega \subset \mathbb{R}^3$ и гармоническая в ней функция φ. При $t \geqslant 0$ требуется найти область ω_t и гармоническую в ней функцию $\varphi(t, \boldsymbol{x})$, так чтобы выполнялись условия

$$t = 0: \qquad \omega_0 = \omega, \quad \varphi(0, \boldsymbol{x}) = \varphi_0(\boldsymbol{x}), \quad \Delta_x\varphi_0 = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \omega_0; \tag{1.3}$$

$$\Delta_x\varphi = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \omega_t, \qquad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \nabla_x\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\,|\nabla_x\varphi|^2, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\omega_t. \tag{1.4}$$

Пусть ω_0 — шар, радиус которого равен единице, а центр находится в точке $(0, 0, 0)$; геометрия начального поля скоростей $\boldsymbol{u}_0(x)$ определяется потенциалом $\varphi_0(\boldsymbol{x})$: $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) = \nabla_x\varphi_0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \omega_0$.

Важной особенностью задачи (1.3), (1.4) является то, что занятый жидкостью объем ω_t заранее не фиксирован, состоит из жидких частиц и является искомым объектом.

Из анализа системы (1.3), (1.4) следует, что осевая симметрия относительно оси z, заданная в момент времени $t = 0$, сохраняется на аналитическом решении для всех $t \geqslant 0$, при которых решение определено [4]. Поэтому в уравнениях (1.3), (1.4) в качестве независимых переменных можно выбрать время t и цилиндрические координаты $\boldsymbol{r} = (r, z)$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и z — инварианты группы вращения области ω_t вокруг оси z).

Пусть меридиональное сечение поверхности вращения $\partial\omega_t$ — параметризованная кривая γ_t: $[0, \pi] \to \{r(t, s), z(t, s)\}$, $r \geqslant 0$, $dz/ds \geqslant 0$ и $\gamma_t(s) \in C^\infty[0, \pi]$. Точки $\gamma_t(0)$ и $\gamma_t(\pi)$ есть полюсы поверхности $\partial\omega_t$, и функции $r(t, s)$, $z(t, s)$ имеют 2π-периодические (нечетное и четное соответственно) C^∞-гладкие продолжения с отрезка $[0, \pi]$ на отрезок $[0, 2\pi]$; $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{N}$ — касательный и нормальный векторы к кривой γ_t соответственно.

В силу указанной инвариантности система (1.3), (1.4) приводится к задаче Коши для системы псевдодифференциальных на $\partial\omega_t$ уравнений:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = M\,\overline{\nabla\varphi(t, \boldsymbol{r})}, \quad \frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \frac{1}{2}\,|\,\overline{\nabla\varphi(t, \boldsymbol{r})}\,|^2, \quad \boldsymbol{r}\big|_{t=0} = \boldsymbol{r}_0(s), \quad \overline{\varphi}\,\big|_{t=0} = \varphi_0(s). \tag{1.5}$$

Здесь $\overline{\nabla\varphi}$ — образ отображения Дирихле — Неймана (по данным о границе $\partial\omega_t$ и функции $\varphi|_{\partial\omega_t} \equiv \overline{\varphi}$ путем решения в ω_t задачи Дирихле для уравнения Лапласа восстанавливается регулярная гармоническая функция $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ и затем вычисляются $\nabla\varphi|_{\partial\omega_t} \equiv \overline{\nabla\varphi} = (\overline{\varphi}_E, \overline{\varphi}_N)$ — следы касательной $\overline{\varphi}_E$ и нормальной $\overline{\varphi}_N$ составляющих скоростей частиц жидкости на $\partial\omega_t$); M — ортогональная матрица перехода от дифференцирования по (r, z) к дифференцированию по $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{N})$ на $\partial\omega_t$.

В работе [4] доказано, что при аналитических начальных данных $\boldsymbol{r}_0(s)$ и $\varphi_0(s)$ задача (1.5) имеет аналитическое по времени $t \geqslant 0$ решение.

При использовании любого метода численного решения задачи (1.5) решается эллиптическая задача на шаге по времени $t = t_0$. Зафиксировав t_0, рассмотрим в C^∞-гладкой осесимметричной области ω внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа с данными $\varphi|_{\partial\omega} \equiv \overline{\varphi} = \psi(\boldsymbol{x})$. Решение этой задачи будем искать в виде потенциала двойного слоя $\varphi(\boldsymbol{x}) = W[\chi](\boldsymbol{x})$ с плотностью $\chi \in C^\infty(\partial\omega)$, инвариантной относительно группы вращения поверхности $\partial\omega$. Это позволит, применяя теорему Ляпунова [11] о дифференцируемости $W[\chi](\boldsymbol{x})$, найти численное решение задачи Дирихле — Неймана с требуемой точностью. Действительно, положение точек $x = (r, z)$ и $\xi = (\rho, \zeta)$ на кривой $\gamma \equiv \partial\omega$ зададим координатами s и σ соответственно: $r = r(s)$, $z = z(s)$, $\rho = r(\sigma)$, $\zeta = z(\sigma)$ и $0 \leqslant s, \sigma \leqslant \pi$; введем также следующие обозначения: $\rho' \equiv d\rho/d\sigma$, $\zeta' \equiv d\zeta/d\sigma$, $\delta = \sqrt{\rho'^2 + \zeta'^2}$, $r' \equiv dr/ds$, $z' \equiv dz/ds$, $d = \sqrt{r'^2 + z'^2}$, $\boldsymbol{n} \equiv \delta^{-1}[-\zeta', \rho']$, $\boldsymbol{e} \equiv \delta^{-1}[\rho', \zeta']$, $\boldsymbol{N} \equiv d^{-1}[-z', r']$, $\boldsymbol{E} \equiv d^{-1}[r', z']$.

Если $\psi \equiv \psi(s) = \psi(r(s), z(s))$ — достаточно гладкая 2π-периодическая четная функция, то интегральное уравнение для осесимметричной задачи Дирихле имеет следующий вид [11]:

$$\chi(s) + \overline{W}\,[\chi](s) = \psi(s)/(2\pi), \qquad 0 \leqslant s \leqslant \pi. \tag{1.6}$$

Здесь $\overline{W}\,[\chi](s) = W[\chi](s)|_{s\in\gamma}$ — прямое значение потенциала $W[\chi](s)$ на γ.

Инвариантность плотности $\chi(\boldsymbol{\xi})$ и поверхности $\partial\omega$ позволяет один раз проинтегрировать в двойном интеграле $\overline{W}\,[\chi](\boldsymbol{x})$ и свести задачу к вычислению выражения [12]

$$\overline{W}\,[\chi](s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(\rho\,\frac{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}}{\sigma - s}\,E(q) - \frac{\zeta'}{\delta}\,D(q)\Big)\,\delta h_*^{-1}\,\chi(\sigma)\,d\sigma \equiv \int_0^\pi k(s, \sigma)\chi(\sigma)\,d\sigma. \tag{1.7}$$

При этом касательная $\overline{\varphi}_E(s)$ и нормальная $\overline{\varphi}_N(s)$ производные потенциала $\varphi(\boldsymbol{x}) = W[\chi](\boldsymbol{x})$ вычисляются по найденному решению $\chi(s)$ интегрального уравнения (1.6) путем дифференцирования:

$$\overline{\varphi}_E(s) = \frac{d\overline{\varphi}}{dE} = \nu(s) + \overline{EW}\,[\chi](s), \qquad \overline{\varphi}_N(s) = \frac{d\overline{\varphi}}{dN} = \overline{NW}\,[\chi](s).$$

Здесь

$$\overline{EW}\,[\chi](s) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \nu(\sigma)\Big[2\rho\,\frac{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{N}}{\sigma - s}\,E(q) - \Big(\frac{\zeta - z}{r}\,\frac{r'}{\Delta} + \frac{z'}{\Delta}\Big)D(q)\Big]\delta h_*^{-1}\,d\sigma,$$

$$\overline{NW}\,[\chi](s) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \Big\{2\rho\boldsymbol{H}\cdot\frac{\nu(\sigma)\boldsymbol{E} - \nu(s)\boldsymbol{e}}{\sigma - s}\,E(q) +$$

$$+\Big[-\frac{\zeta - z}{r}\,\frac{z'}{\Delta}\,\nu(\sigma) + \Big(\nu(\sigma)\,\frac{r'}{\Delta} - \nu(s)\,\frac{\rho'}{\delta}\Big)\Big]D(q) + 2\nu(s)\,\frac{\rho'}{\delta}\,K(q)\Big\}\,\delta h_*^{-1}\,d\sigma, \tag{1.8}$$

$$\nu(\sigma) \equiv \frac{d\chi(\sigma)}{de} = \frac{1}{\delta}\,\frac{d\chi(\sigma)}{d\sigma}, \qquad \nu(s) \equiv \frac{d\chi(s)}{dE} = \frac{1}{d}\,\frac{d\chi(s)}{ds},$$

$$\boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{H}(\sigma, s) = \frac{\boldsymbol{r}(\sigma, s)}{|\boldsymbol{r}(\sigma, s)|^2}, \qquad \boldsymbol{r}(\sigma, s) = \Big[\frac{\rho - r}{\sigma - s}, \frac{\zeta - z}{\sigma - s}\Big],$$

$D(q) = K(q) - E(q)$; функции $K(q)$, $E(q)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [13] с модулем $q \in [0, 1]$:

$$K(q) = \int\limits_0^{\pi/2} (1 - q\sin^2\theta)^{-1/2}\,d\theta, \qquad E(q) = \int\limits_0^{\pi/2} (1 - q\sin^2\theta)^{1/2}\,d\theta, \qquad q = 4\rho r h_*^{-2},$$

$$h_*^2 \equiv h_*^2(\sigma, s) = (\rho + r)^2 + (\zeta - z)^2, \qquad h^2 \equiv h^2(\sigma, s) = (\rho - r)^2 + (\zeta - z)^2.$$

2. Дискретизация задачи Дирихле и формулировка результата. Вернемся к исследованию задачи (1.6). Введем несколько определений.

Пусть $C \equiv C[0, 2\pi]$ — класс вещественных 2π-периодических непрерывных функций с чебышевской нормой $\|\cdot\|$, а $C_+ \equiv C_+[0, \pi] \subset C$ — множество четных функций; класс четных непрерывно дифференцируемых k раз функций обозначим через C_+^k ($k \geqslant 0$). Пусть $\mathcal{T}^m \subset C_+$ — подпространство тригонометрических многочленов, порядок которых не выше m, $m \geqslant 0$ — целое число, Q_m: $C_+ \to \mathcal{T}^m$ — проектор, $e_m(g) = \inf\limits_{T_m \in \mathcal{T}^m} \|g - T_m\|$ — наилучшее (чебышевское) приближение многочленом функции g из C_+.

Оператор $\overline{W}$: $C_+ \to C_+$ задачи (1.6) компактен [8], его норма в C_+ вычисляется по формуле

$$\|\,\overline{W}\,\| \equiv \max_{0 \leqslant s \leqslant \pi} \int\limits_0^\pi |k(s, \sigma)|\,d\sigma.$$

Дискретизацию уравнения (1.6) осуществим по следующей схеме.

Зададим узлы

$$s_i = 2\pi i/(2m + 1), \qquad 0 \leqslant i \leqslant m \tag{2.1}$$

и линейное отображение

$$J\colon\quad C_+ \to \mathbb{R}^m,\quad Jg = (g(s_0),\dots,g(s_m)) \equiv (g_0,\dots,g_m),\quad |Jg|_\infty = \max_{0\leqslant i\leqslant m}|g_i|.$$

Рассмотрим интерполяционный многочлен Лагранжа функции g из C_+:

$$(Q_m g)(s) \equiv Q_m(s;Jg) = \sum_{k=0}^{m} g(s_k)w_k(s),\qquad \|Q_m\| = \max_{0\leqslant s\leqslant\pi}\sum_{k=0}^{m}|w_k(s)|. \tag{2.2}$$

Здесь

$$w_k(s) = \begin{cases} 2D_m(s)/(2m+1), & k=0,\\ 2[D_m(s-s_k)+D_m(s+s_k)]/(2m+1), & k=1,2,\dots,m, \end{cases}$$

$D_m(s) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{m}\cos ks$ — ядро Дирихле; $w_k(s_j) = \delta_{kj}$ $(0\leqslant k,j\leqslant m)$.

Ясно, что $Q_m w_k \equiv w_k$ и $JQ_m g \equiv Jg$. Многочлен $Q_m(s;Jg)$ определяет проектор Q_m: $C_+ \to \mathcal{T}^m$, а $\|Q_m\|$ — его норма. Порядок роста величин $\|Q_m\|$ с ростом m зависит от выбора узлов в (2.2). Оптимальный их выбор реализуется с учетом условий близости операторов $\overline{W}\,Q_m$: $C_+ \to C_+$ к оператору $\overline{W}$: $C_+ \to C_+$ при $m\to\infty$ в равномерной (операторной) топологии [9]. Кроме того, согласно неравенству Лебега [6] в узлах (2.1) имеем следующую оценку погрешности:

$$\|g(s) - Q_m(s;Jg)\| \leqslant (1+\|Q_m\|)e_m(g),\qquad \|Q_m\| \leqslant 3 + 2\pi^{-2}\ln m.$$

В силу линейности оператора $\overline{W}$: $C_+ \to C_+$

$$\overline{W}\,[Q_m g](s) = \sum_{k=0}^{m} g(s_k)a_k(s),\qquad a_k(s) = \overline{W}\,[w_k](s),\qquad \|\,\overline{W}Q_m\| = \max_{0\leqslant s\leqslant\pi}\sum_{k=0}^{m}|a_k(s)|.$$

Далее, пусть

$$u = J\chi,\quad \rho_m(s) = \chi(s) - Q_m(s;J\chi),\quad \varrho = -J\,\overline{W}\,[\rho_m],\quad F = J\psi/(2\pi).$$

Применяя оператор J к обеим частям уравнения (1.6), находим

$$u + Au = F + \varrho,\qquad \varrho = -J\,\overline{W}\,[\chi - Q_m\chi],\qquad u,\varrho\in\mathbb{R}^{m+1}. \tag{2.3}$$

Здесь $A = (a_{ik})$ — матрица; $a_{ik} = \overline{W}\,[w_k](s_i)$ $(0\leqslant k\leqslant m,\ 0\leqslant i\leqslant m)$.

Матрица A определяет линейный оператор A: $\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^{m+1}$, который будет рассматриваться в качестве дискретизации оператора $\overline{W}$: $C_+\to C_+$, и полностью заполнена, в отличие от используемых в конечно-разностных методах сильноразреженных матриц.

Отбрасывая в (2.3) погрешность $\varrho\in\mathbb{R}^{m+1}$ и обозначая приближенное значение $J\chi\in\mathbb{R}^{m+1}$ через $\overline{\chi}\in\mathbb{R}^{m+1}$, получаем дискретизацию задачи (1.6):

$$(I + A)\,\overline{\chi} = F \tag{2.4}$$

(I — единичная матрица размером $(m+1)\times(m+1)$).

Пусть $|B|_\infty$ — чебышевская норма обратимой матрицы B: $\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^{m+1}$; меру обусловленности матрицы B определим числом $\varkappa(B) = |B|_\infty|B^{-1}|_\infty$.

Если уравнение (1.6) однозначно разрешимо в C_+ и $\|\varphi\|\leqslant Q\|\psi\|$, то имеют место следующие нетривиальные результаты [8, 9].

Теорема 1. *Существуют постоянные m_0, q_0, $\varkappa_0$, c_0, такие что при $m\geqslant m_0$ существует матрица $(I+A)^{-1}$ и имеют место следующие оценки:*

$$\|\,\overline{W}\,Q_m\| \leqslant q_0,\qquad \varkappa(I+A)\leqslant\varkappa_0;$$

$$e_m(\chi) \leqslant |J\chi - \overline{\chi}\,|_\infty \leqslant c_0(1 + \|Q_m\|)e_m(\chi); \tag{2.5}$$

$$e_m(\chi) \leqslant \|\chi(s) - Q_m(s;\chi)\| \leqslant c_0\|Q_m\|(1 + \|Q_m\|)e_m(\chi). \tag{2.6}$$

Постоянные q_0, $\varkappa_0$, c_0 не зависят от m и эффективно вычисляются:

$$q_0 = \sup_{m\geqslant 0} \|\,\overline{W}\,[Q_m]\|, \qquad \varkappa_0 = 2(1 + Qq_0)^2, \qquad c_0 = 2(1 + Qq_0)\|\,\overline{W}\,\|.$$

Теорема 2. *Последовательность функций*

$$\overline{\chi}^{\,k+1} = (1-\beta)\,\overline{\chi}^{\,k} - \beta A\,\overline{\chi}^{\,k} + \beta F, \qquad \beta = (1 + \|\,\overline{W}Q_m\|)^{-1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.7}$$

получаемая при решении системы (2.4) *методом итераций, сходится к решению $\overline{\chi}$ задачи* (2.4) *так же, как геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим единицы.*

Теорема 3. *Если*

$$\frac{|(I + A)\,\overline{\chi}^{\,k} - F|_\infty}{|F|_\infty} \leqslant \frac{\varepsilon}{\varkappa(I + A)},$$

то

$$\frac{|\,\overline{\chi}^{\,k} - \overline{\chi}\,|_\infty}{|\,\overline{\chi}\,|_\infty} \leqslant \varepsilon.$$

В работе [8] доказано, что численный метод, погрешность которого оценивается через характеристику $e_m(\chi)$, является ненасыщаемым. Действительно, если решение χ принадлежит классу C_+^k, то $e_m(\chi) \leqslant (\pi/2)\|\chi^{(k)}\|/m^k$ (теорема Джексона [6]). Пусть χ принадлежит гладкой шкале пространств $\bigcup\limits_{k\geqslant 0} C_+^k$ и $\{G(k)\}_{k=0}^\infty$ — последовательность положительных чисел. С использованием условий $\chi \in C_+^\infty$, $\|\chi\| = G(0) \neq 0$, $\chi \notin \mathcal{T}^m$, $\|\chi^{(k)}\| \leqslant G(k)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty$ последовательности $\{G(k)\}_{k=0}^\infty$ поставим в соответствие пару функций числового аргумента $x \geqslant 0$:

$$\mu(x) = \begin{cases} G(0), & 0 \leqslant x < 1, \\ \inf\limits_{k\geqslant 0} G(k)/x^k, & x \geqslant 1, \end{cases} \qquad \vartheta(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ \max\limits_{k\geqslant 0}\{\mu(x) = G(k)/x^k\}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Указанные классы C^∞-гладких функций не пусты: им принадлежат, например, известные классы Жеврея, имеющие мажоранту $G(k) = A^k k^{\alpha k}$ ($\alpha \geqslant 1$, $A > 1$ — константы). С использованием этих обозначений теорема Джексона записывается в виде

$$e_m(\chi) \leqslant \frac{\pi}{2}\,\mu(m), \qquad \mu(x) = \min_{k\geqslant 0} \frac{G(k)}{x^k} = \frac{G[\vartheta(x)]}{x^{\vartheta(x)}}. \tag{2.8}$$

Теорема 4 [8]**.** *При $x \geqslant 1$ функция $\vartheta(x)$ целочисленна, неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с x. Функция $\mu(x)$ строго монотонно убывает, всюду непрерывна и стремится к нулю при $x \to \infty$.*

Следствие. При $p \geqslant 0$ верно следующее равенство: $\lim\limits_{x\to\infty} x^p\mu(x) = 0$.

В силу (2.8) из оценки (2.6) и теоремы 4 следует, что с ростом запаса гладкости χ (при прочих равных условиях) скорость убывания к нулю погрешности метода численного решения уравнения (1.6) возрастает. В отличие от методов, содержащих главный член погрешности, предлагаемый численный метод с ростом параметра m самосовершенствуется и после преодоления барьера степенной сходимости согласно приведенному выше следствию достигает максимальной эффективности (экспоненциальной сходимости) на классе C_+^∞-гладких решений уравнения (1.6). Так, если $\chi \in C_+^\infty$ и $G(k) = A^k k^{\alpha k}$ при $A > 1$ и

$\alpha \geqslant 1$, то $e_m(\chi) \leqslant c\,\mathrm{e}^{-\beta\sqrt[\alpha]{m}}$, где c, β — положительные константы. В результате информация о бесконечной гладкости и аналитичности решения χ задачи (1.6) приобретает особую важность, что отличает ненасыщаемый численный метод от методов с главным членом погрешности, т. е. насыщаемых.

Многочлен $Q_m(s; J\chi)$ (см. (2.2)) используется также для приближения производных $\chi^{(j)}(s)$. Возникающую при этом ошибку позволяет оценивать

Теорема 5. *Если $\chi \in C^k_+$ и $0 < j \leqslant k$, то*

$$\|\chi^{(j)}(s) - Q^{(j)}_m(s; J\chi)\| \leqslant \alpha_{mj} e_m(\chi^{(j)}). \tag{2.9}$$

Здесь $\alpha_{mj} = (\pi/2)(1 + \|Q_m\|) + (1 + \pi/2)[4 + \pi e + (4/\pi^2)\ln(k + 1)]$.

Преимущества предлагаемого ненасыщаемого алгоритма численного решения интегрального уравнения (1.6) сохраняются при условии, что точность приближенной реализации интегрального оператора (1.7) имеет тот же порядок, что и величина $|\varrho|_\infty = |J\,\overline{W}\,[\chi - Q_m\chi]|_\infty$ при $m \geqslant m_0$. Это требование выполняется при использовании ненасыщаемых квадратурных формул. Такие формулы, учитывающие специфику осесимметричной задачи (выражений (1.7), (1.8)), построены в работах [10, 12]:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} f(\tau)\,d\tau = \sum_{k=1}^{n} c_k f(\tau_k) + \wp^C_n(f), \qquad \sum_{k=1}^{n}|c_k| \leqslant 2, \qquad |\wp^C_n(f)| \leqslant 4E_n(f),\\ -&\int_{-1}^{+1} f(\tau)\ln|\tau|\,d\tau = \sum_{k=1}^{n} d_k f(\tau_k) + \wp^D_n(f), \qquad \sum_{k=1}^{n}|d_k| \leqslant 2, \qquad |\wp^D_n(f)| \leqslant 4E_n(f). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь $\tau_k = \cos(\pi(2k-1)/(2n))$; коэффициенты c_k и d_k приведены в [10, 12]; $\wp^C_n(f)$, $\wp^D_n(f)$ — функционалы погрешности; $E_n(f) = \inf\limits_{P_n \in \mathcal{P}^n}\|f - P_n\|$ ($n > 0$ — целое число) — наилучшее приближение непрерывной функции f на отрезке I многочленами из подпространства $\mathcal{P}^n$ алгебраических многочленов степени не выше $n - 1$. Поскольку функционалы $|\wp^C_n(f)|$, $|\wp^D_n(f)|$ оценены через характеристики $E_n(f)$, формулы (2.10) являются ненасыщаемыми [10].

Далее, если $C[I]$ — пространство непрерывных на отрезке $I \equiv [-1, 1]$ функций с чебышевской нормой $\|\cdot\|$, а $C^k[I]$ ($k \geqslant 0$ — целое число) — пространство k раз непрерывно дифференцируемых на I функций, то для функции f из $C^k[I]$ справедлив следующий результат Джексона — Зинвела [14]:

$$E_n(f) \leqslant \frac{\pi}{2}\min_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{a^k\|f^{(k)}\|}{n^k},$$

где $1 < a < \mathrm{e}$ — константа.

Пусть $f \in C^\infty[I]$, $f \notin \mathcal{P}^n$, $\|f\| = G(0) \neq 0$, $\|f^{(k)}\| \leqslant G(k)$ и $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{G(k)} = \infty$. Определим функции числового аргумента $x \in [0, \infty)$:

$$\lambda(x) = \begin{cases} G(0), & 0 \leqslant x < 1,\\ \min\limits_{0\leqslant k\leqslant x} G(k)/x^k, & x \geqslant 1, \end{cases} \qquad \theta(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1,\\ \max\limits_{1\leqslant k\leqslant x}\{\lambda(x) = G(k)/x^k\}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

В этих обозначениях неравенство Джексона — Зинвела записывается следующим образом:

$$E_n(f) \leqslant \frac{\pi}{2}\,\lambda\Big(\frac{n}{a}\Big), \quad 1 < a < \mathrm{e}, \qquad \lambda(x) = \min_{0\leqslant k\leqslant x}\frac{G(k)}{x^k} = \frac{G[\theta(x)]}{x^{\theta(x)}}. \tag{2.11}$$

Теорема 6 [10]. *При $x \geqslant 1$ функция $\theta(x)$ целочисленна и неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с x. Функция $\lambda(x)$ строго монотонно убывает, непрерывна справа и стремится к нулю при $x \to \infty$. Функция $\lambda(x)$ имеет разрывы слева лишь в точках разрыва функции $\theta(x)$.*

Следствие. При $p \geqslant 0$ верно предельное равенство $\lim\limits_{x\to\infty} x^p\lambda(x) = 0$.

В силу (2.11) теорема 6 расширяет область применимости полиномиальной аппроксимации C^∞-гладких функций на отрезке I.

Определение [10]. Функция $f(\tau)$, принадлежащая $C^\infty[I]$, имеет на $I \equiv [-1,1]$ пограничный слой толщиной $0 < \varepsilon_0 < 1$, если существуют малое положительное число $\eta = \eta(\varepsilon_0)$ и не зависящая от ε_0 положительная функция $F(k)$, такие что при любом целом $k \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$|f^{(k)}(\tau)| \leqslant \begin{cases} F(k), & \tau \in I_\eta \equiv [-1+\eta, 1-\eta], \\ \varepsilon_0^{-k}F(k), & \tau \in I \setminus I_\eta. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Следствием фундаментальной теоремы 6 о полиномиальной аппроксимации гладких функций на отрезке I является

Теорема 7 [10]. *Если f принадлежит $C^\infty[I]$ и выполнено неравенство* (2.12) *и $\eta = \varepsilon_0/2$, то*

$$E_n(f) \leqslant \frac{\pi}{2} \min_{0\leqslant k\leqslant n} \Big(\frac{F_k\varepsilon_0^{-k/2}}{n^k}\Big). \qquad (2.13)$$

Коэффициенты F_k вычисляются по заданным значениям $F(k)$ из (2.12).

Значение оценки (2.13) при построении квадратурных формул (2.10) состоит в том, что за счет перераспределения пограничного слоя по всему отрезку $I \equiv [-1,1]$ его толщину удается увеличить до значения $\sqrt{\varepsilon_0}$. Этот важный факт лежит в основе методов нейтрализации пограничного слоя толщиной $\varepsilon_0 > 0$. Действительно, в силу теоремы 6 выполнимость неравенств

$$|\wp_n^C(f)|, |\wp_n^D(f)| \leqslant 2\pi \min_{0\leqslant k\leqslant n} F_k/(n\sqrt{\varepsilon_0}\,)^k \leqslant \epsilon, \qquad 0 < \epsilon \leqslant \varepsilon_0, \qquad (2.14)$$

представляющих собой условия нейтрализации пограничного слоя толщиной ε_0, обеспечивается выбором в формулах (2.10) параметра n, превышающего некоторое пороговое значение $n_{\min}(\varepsilon_0)$. Среди оценок (2.14), соответствующих различным значениям $0 \leqslant k \leqslant n$, имеется наилучшая, номер которой $k_0 = \theta(n)$ — порядок максимальной производной, содержащейся в этой оценке; производные порядков $k > k_0$ могут влиять на величину оценки лишь в случае $n > n_{\min}$, поэтому нейтрализация пограничного слоя в формулах (2.10) происходит за счет выбора числа узлов $n > n_{\min}$.

В работе [12] описаны вычислительные трудности, возникающие при использовании любых стандартных методов численной реализации выражений (1.7), (1.8). Установлено, что эти трудности обусловлены свойством модуля $q(\sigma, s)$ эллиптических интегралов, которое обеспечивает им "подвижную" при $\sigma = s$ логарифмическую особенность, и резким ростом функции $h_*^{-1}(\sigma, s)$ вблизи полюсов поверхности.

Таким образом, аппроксимация оператора $\overline{W}\,[\chi](s)$ в задаче (1.6) и выражениях (1.7), (1.8) осуществляется с помощью ненасыщаемых квадратурных формул (2.10).

Выражение (1.7) имеет следующую структуру [12]:

$$\int_0^\pi F\,\Psi(q)h_*^{-1}\,d\sigma = \int_0^\pi F\,\Psi_p^*(q)h_*^{-1}\,d\sigma - \int_0^\pi F\,\psi_p^*(q)\ln(1-q)h_*^{-1}\,d\sigma. \qquad (2.15)$$

Здесь $F \equiv F(\sigma, s)$ — равномерно-непрерывная в области $[0,\pi] \times [0,\pi]$ функция; $\Psi(q)$ — полный эллиптический интеграл с модулем $q \equiv q(\sigma, s)$. Функции $\psi_p^*(q)$, $\Psi_p^*(q)$ и методы их вычисления приведены в [13]; целый параметр $p \geqslant 0$ обеспечивает гладкость функций $\psi_p^*(q)$, $\Psi_p^*(q)$ и его выбор определяется условием нейтрализации увеличения значения подынтегрального выражения в (2.15) вблизи полюсов поверхности. При этом в полюсах $\gamma(0)$, $\gamma(\pi)$ представление (2.15) вполне регулярно, т. е. не содержит логарифмическую особенность.

Зафиксировав в (2.15) числовой параметр $s \in (0,\pi)$ и заменив неявно переменную σ новой переменной $\tau \equiv \tau(\sigma, s) = \sin[(\sigma - s)/2]/\sin[(\sigma + s)/2]$, получаем

$$\int_0^\pi F\Psi(q)h_*^{-1}\,d\sigma = \int_{-1}^1 \tilde{C}(\tau)\,d\tau - \int_{-1}^1 \tilde{L}(\tau)\ln|\tau|\,d\tau. \tag{2.16}$$

Здесь подвижная логарифмическая особенность перешла в неподвижную — середину отрезка $I \equiv [-1,1]$, а для функций $C(\sigma, s)$ и $L(\sigma, s)$, равномерно непрерывных на $[0,\pi] \times [0,\pi]$, при $k \geqslant 0$ выполняются соотношения

$$\Big(\frac{d}{d\tau}\Big)^k \tilde{f}(\tau) = \varepsilon^{-k}\Big(\sin^2\Big(\frac{\sigma + s}{2}\Big)\frac{d}{d\sigma}\Big)^k f(\sigma, s), \qquad \varepsilon = 0{,}5\sin s, \tag{2.17}$$

где $\tilde{f} \equiv \tilde{f}(\tau) = f(\sigma(\tau, s), s)$; в качестве функции $f(\sigma, s)$ используется либо $C(\sigma, s)$, либо $L(\sigma, s)$. При этом $\sigma(\tau, s)$ является функцией, обратной функции $\tau(\sigma, s)$.

Сказанное выше применимо при вычислении интегралов (2.15) с помощью квадратурных формул (2.10), так как в силу равенства (2.17) пограничный слой толщиной $\varepsilon_0 = 0{,}5\sin s$ выделен в (2.16) явно, при этом в качестве функции $f(\sigma, s)$ следует принять $C(\sigma, s)$ или $L(\sigma, s)$ с учетом того, что $\tilde{f} \equiv \tilde{f}(\tau) = f(\sigma(\tau, s), s)$. Это позволяет вычислить интегралы (2.15) с учетом требуемого для $k_0 = \theta(n)$ количества производных у функций $\tilde{C}(\tau)$, $\tilde{L}(\tau)$, принадлежащих пространству $C^{2p+1}[I]$ (см. [12]). При этом целый параметр p в (2.15), (2.16) должен удовлетворять неравенству $p \geqslant (\theta(n) - 1)/2$, т. е. условию нейтрализации пограничного слоя толщиной ε_0.

Таким образом, вычисление элементов $a_{jk} = \overline{W}\,[w_k](s_j)$ матрицы A с использованием квадратурных формул (2.10) с числом узлов $n > n_{\min}(\varepsilon_0) > m \geqslant m_0$ согласно оценке (2.14) позволяет нейтрализовать влияние пограничного слоя заданной толщины $\varepsilon_0 = 0{,}5\sin s$. Кроме того, матрица $A = (a_{ij})$ вычисляется с любой заданной точностью $(1+2\|Q_m\|)e_m(\chi)$, поскольку числовые характеристики $e_m(\chi)$ решения χ уравнения (1.6) стремятся к нулю с увеличением m по экспоненциальному закону, если $\chi \in C_+^\infty$ (см. теорему 4). Этим свойством ненасыщаемая численная дискретизация задачи (1.6) принципиально отличается от ее дискретизаций, содержащих главный член погрешности, т. е. от насыщаемых дискретизаций.

Замечание 1. При компьютерной численной реализации эллиптических краевых задач, как правило, используется входная информация двух типов: аналитическая информация об операторе задачи и геометрическая информация об области, в которой решается задача. Любой адекватный численный метод решения задачи должен предусматривать совместную обработку аналитической и геометрической информации, поэтому геометрическая информация должна быть преобразована к аналитическому виду. В плоских задачах геометрия области учитывается с помощью функций, осуществляющих конформное отображение области на круг. В осесимметричных задачах конфигурация меридионального сечения области учитывается в обозначениях для пограничного слоя [8, 12], при этом эффективный алгоритм численной нейтрализации пограничного слоя определяется свойствами квадратурных формул (2.10).

Замечание 2. Отображение τ: $[0, \pi] \to [-1, 1]$, освобождающее численный алгоритм от детального учета геометрии меридионального сечения области, позволяет численно, за счет гладкости искомого решения задачи, исследовать осесимметричные задачи. Многообразие C^∞-гладких осесимметричных областей обусловлено различием толщины пограничного слоя вдоль кривой $\gamma(s)$ [12].

Методики численного решения эллиптических краевых задач тестируются на эллипсоидах вращения. Вычислительные трудности решения таких задач зависят от числового параметра — удлинения эллипсоида, равного отношению его полуосей. В данной работе выбран эллипсоид с удлинением, равным 1000 (“игла”), как наиболее “трудный” для вычислений. Задача ставилась таким образом, чтобы было получено большое количество верных десятичных разрядов в искомом решении задачи при сравнительно небольших размерах матриц линейных систем, к решению которых фактически сводится задача.

Численные решения тестовых задач с 8–10 верными десятичными разрядами получены при следующих принятых в алгоритме значениях числовых параметров: $m = 20$, $n = 501$, $p = 10$ [12, 15].

Следует отметить, что расчеты, проведенные для эллипсоида с удлинением, равным 1000, свидетельствуют о преимуществах ненасыщаемых численных методов при решении эллиптических задач, в то время как даже удлинение, равное 25, становится непреодолимым препятствием для любых насыщаемых (с главным членом погрешности) численных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Плоская задача о неустановившемся движении жидкости со свободными границами // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1971. Вып. 8. С. 22–26.
2. **Овсянников Л. В.** Задача Коши в шкале банаховых пространств // Тр. Ин-та математики им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 281. С. 7–15.
3. **Бардос К., Тити Э. С.** Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, вып. 3. С. 3–46.
4. **Белых В. Н.** Об эволюции конечного объема идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. 2017. Т. 473, № 6. С. 650–654.
5. **Бабенко К. И., Петрович В. Ю.** О доказательных вычислениях на ЭВМ. М., 1983. (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 133).
6. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
7. **Белых В. Н.** О колмогоровской ε-энтропии одного компакта C^∞-гладких непериодических функций (к проблеме К. И. Бабенко) // Докл. АН. 2018. Т. 482, № 2. С. 125–129.
8. **Белых В. Н.** Внешняя осесимметричная задача Неймана для уравнения Лапласа: ненасыщаемые методы численного решения // Докл. АН. 2007. Т. 417, № 4. С. 442–445.
9. **Белых В. Н.** Особенности реализации ненасыщаемого численного метода для внешней осесимметричной задачи Неймана // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1237–1249.
10. **Белых В. Н.** К проблеме конструирования ненасыщаемых квадратурных формул на отрезке // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 1. С. 27–62.
11. **Гюнтер Н. М.** Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
12. **Белых В. Н.** К проблеме численной реализации интегральных операторов осесимметричных краевых задач (алгоритмы без насыщения) // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 4. С. 22–37.

13. **Белых В. Н.** Алгоритмы вычисления полных эллиптических интегралов и некоторых связанных с ними функций // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 21–32.
14. **Sinwel H. F.** Uniform approximation of differentiable functions by algebraic polynomials // J. Approx. Theory. 1981. V. 32, N 1. P. 1–8.
15. **Белых В. Н.** К проблеме обтекания осесимметричных тел большого удлинения потоком идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 5. С. 56–67.

Поступила в редакцию 27/IX 2018 г.,
после доработки — 27/IX 2018 г.
Принята к публикации 29/X 2018 г.