

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

УДК 624.072.2:539.384.4

В. В. Кабанов, С. В. Астрахарчик, Л. П. Железнов

Сибирский научно-исследовательский институт авиации,
630051 Новосибирск

Алгоритм метода конечных элементов. В большинстве известных работ по расчету ферменных и рамных конструкций использовался линейный подход. Здесь предлагается подход, в котором в едином эффективном алгоритме исследуются как геометрически нелинейное докритическое состояние, так и устойчивость пространственных стержневых конструкций типа ферм или рам.

Возьмем произвольную пространственную стержневую конструкцию с жесткими узлами под действием произвольной нагрузки. Рассмотрим в качестве конечного элемента прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения с осью x , направленной по осевой линии, и осями y и z , направленными по главным центральным осям поперечного сечения стержня (рис. 1).

Кинематические соотношения для стержней в предположении малости упругих деформаций и углов поворотов имеют вид [1]

$$\varepsilon = u_s + \frac{1}{2}\omega_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2, \quad \chi_1 = \omega_{1s}, \quad \chi_2 = \omega_{2s}, \quad \chi_3 = \varphi_s, \quad \omega_1 = -w_s, \quad \omega_2 = -v_s, \quad (1)$$

где u, v, w — перемещения вдоль осей x, y, z ; $\omega_1, \omega_2, \varphi$ — углы малых поворотов вокруг осей y, z, x ; ε — осевая деформация; χ_1, χ_2 и χ_3 — изменения кривизн и кручения; индекс s означает дифференцирование по s . Статические соотношения примем в виде

$$T = EF\varepsilon, \quad M_1 = EJ_1\chi_1, \quad M_2 = EJ_2\chi_2, \quad M_3 = EJ_k\chi_3, \quad G = E/[2(1 + \nu)]$$

(J_1, J_2, J_k — моменты инерции поперечного сечения стержня при изгибе и кручении, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона).

Для аппроксимации перемещений на конечном элементе выберем линейный полином для перемещений u и кубический для перемещений v и w :

$$u = u_0 E_1(s) + u_1 E_2(s), \quad v = v_0 E_3(s) + v_1 E_4(s) + \omega_{20} E_5(s) + \omega_{21} E_6(s), \\ w = w_0 E_3(s) + w_1 E_4(s) - \omega_{10} E_5(s) - \omega_{11} E_6(s). \quad (2)$$

Здесь $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ — полиномы Эрмита:

$$E_1 = 1 - s/L, \quad E_2 = s/L, \quad E_3 = 1 - 3s^2/L^2 + 2s^3/L^3, \\ E_4 = 3s^2/L^2 - 2s^3/L^3, \quad E_5 = s - 2s^2/L + s^3/L^2, \quad E_6 = -s^2/L^2 + s^3/L^2; \quad (3)$$

$u_0, v_0, w_0, \omega_{10}, \omega_{20}, u_1, v_1, w_1, \omega_{11}, \omega_{21}$ — перемещения и повороты в узлах 0 и 1 конечного элемента; L — длина элемента.

Аппроксимация поворотов ω_1 и ω_2 следует из соотношений (1) и (2), а для кручения φ возьмем независимую линейную аппроксимацию $\varphi = \varphi_0 E_1(s) + \varphi_1 E_2(s)$ (φ_0 и φ_1 —

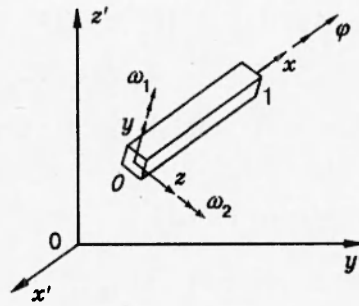


Рис. 1

узловые значения углов закручивания).

Для удобства разделим T и ϵ на линейные и нелинейные составляющие:

$$\epsilon = \epsilon_l + \epsilon_n, \quad T_l = EF\epsilon_l, \quad T_n = EF\epsilon_n, \quad \epsilon_l = u_s, \quad \epsilon_n = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2).$$

Для потенциальной энергии деформации стержня запишем выражение

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_0^L (T\epsilon + M_1\chi_1 + M_2\chi_2 + M_3\chi_3) ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (T_l\epsilon_l + M_1\chi_1 + M_2\chi_2 + M_3\chi_3 + T_l\epsilon_n + T_n\epsilon_l + T_n\epsilon_n) ds. \end{aligned}$$

Исследование нелинейного деформирования и устойчивости стержней будем проводить на основе метода Ньютона и энергетического критерия устойчивости. Для этого рассмотрим первую δW_e и вторую $\delta^2 W_e$ вариации энергии деформации:

$$\delta W_e = \int_0^L (T_l\delta\epsilon_l + M_1\delta\chi_1 + M_2\delta\chi_2 + M_3\delta\chi_3 + T_l\delta\epsilon_n + T_n\delta\epsilon_l + T_n\delta\epsilon_n) ds,$$

$$\delta^2 W_e = \int_0^L (\delta\epsilon_l EF\delta\epsilon_l + \delta\chi_1 EJ_1\delta\chi_1 + \delta\chi_2 EJ_2\delta\chi_2 + \delta\chi_3 EG\delta\chi_3 +$$

$$+ \delta\epsilon_l EF\delta\epsilon_n + \delta\epsilon_n EF\delta\epsilon_l + \delta\epsilon_n EF\delta\epsilon_n + T_l\delta^2\epsilon_n + T_n\delta^2\epsilon_n) ds,$$

$$\delta\epsilon_n = w_s\delta w_s + v_s\delta v_s, \quad \delta^2\epsilon_n = \delta w_s\delta w_s + \delta v_s\delta v_s.$$

В качестве узловых неизвестных стержневого конечного элемента возьмем перемещения и углы поворотов и кручения и введем в рассмотрение вектор узловых неизвестных

$$\mathbf{u}_e^T = \{u_0, v_0, w_0, \omega_{10}, \omega_{20}, u_1, v_1, w_1, \omega_{11}, \omega_{21}\} \quad (4)$$

(индекс t означает транспонирование).

Теперь уравнение метода Ньютона можно представить в виде

$$\mathbf{H}_e(\mathbf{u}_e) \delta \mathbf{u}_e = \mathbf{P}_e - \mathbf{G}_e(\mathbf{u}_e), \quad (5)$$

где \mathbf{P}_e — вектор внешних усилий и моментов, приложенных к элементу; матрица Гессе

\mathbf{H}_e и градиент потенциальной энергии деформации \mathbf{G}_e определяются из соотношений

$$\delta^2 W_e = \delta \mathbf{u}_e \mathbf{H}_e(\mathbf{u}_e) \delta \mathbf{u}_e, \quad \delta W_e = \mathbf{G}_e(\mathbf{u}_e) \delta \mathbf{u}_e. \quad (6)$$

С учетом выражений (2)–(6) матрицу Гессе \mathbf{H}_e и градиент \mathbf{G}_e представим так:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_e = \mathbf{K}_l + EF \int_0^L \left\{ w_s \mathbf{K}_{11} + v_s \mathbf{K}_{12} + \left(u_s + \frac{1}{2} v_s^2 + \frac{3}{2} w_s^2 \right) \mathbf{K}_{21} + \right. \\ \left. + v_s w_s \mathbf{K}_{22} + \left(u_s + \frac{3}{2} v_s^2 + \frac{1}{2} w_s^2 \right) \mathbf{K}_{23} \right\} ds; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_e = \mathbf{u}_l^T \mathbf{K}_l + EF \int_0^L \left\{ \left[u_s w_s + \frac{1}{2} w_s (v_s^2 + w_s^2) \right] \mathbf{G}_{11} + \right. \\ \left. + \left[u_s v_s + \frac{1}{2} v_s (v_s^2 + w_s^2) \right] \mathbf{G}_{12} + \frac{1}{2} (v_s^2 + w_s^2) \mathbf{G}_2 \right\} ds, \\ \mathbf{G}_{11} = \{0, 0, E_{3s}, 0, -E_{5s}, 0, 0, 0, E_{4s}, 0, -E_{6s}\}^T, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{G}_{12} = \{0, E_{3s}, 0, 0, 0, E_{5s}, 0, E_{4s}, 0, 0, 0, E_{6s}\}^T, \quad \mathbf{G}_2 = \{E_{1s}, 0, 0, 0, 0, 0, E_{2s}, 0, 0, 0, 0, 0\}^T.$$

Приведем выражения для ненулевых компонент матриц \mathbf{K}_l , \mathbf{K}_{11} , \mathbf{K}_{12} , \mathbf{K}_{21} , \mathbf{K}_{22} , \mathbf{K}_{23} (симметричная часть опущена):

$$\begin{aligned} K_{l,11} = K_{l,77} = -K_{l,17} = d_1/L, \quad K_{l,22} = K_{l,88} = -K_{l,28} = 12d_3/L^3, \\ K_{l,44} = K_{l,1010} = -K_{l,410} = d_4/L, \quad K_{l,33} = K_{l,99} = -K_{l,39} = 12d_2/L^3, \\ K_{l,55} = K_{l,1111} = 2K_{l,511} = 4d_2/L, \quad K_{l,66} = K_{l,1212} = 2K_{l,612} = 4d_3/L, \\ K_{l,35} = K_{l,311} = -K_{l,59} = -K_{l,911} = -6d_2/L^2, \\ K_{l,26} = K_{l,212} = -K_{l,68} = -LK_{l,812} = 6d_3/L^2, \\ d_1 = EF, \quad d_2 = EJ_1, \quad d_3 = EJ_2, \quad d_4 = GJ_k; \\ K_{11,13} = E_{1s}E_{3s}, \quad K_{11,15} = -E_{1s}E_{5s}, \quad K_{11,19} = E_{1s}E_{4s}, \quad K_{11,111} = -E_{1s}E_{6s}, \\ K_{11,37} = E_{2s}E_{3s}, \quad K_{11,57} = -E_{2s}E_{5s}, \quad K_{11,79} = E_{2s}E_{4s}, \quad K_{11,711} = -E_{2s}E_{6s}; \\ K_{12,12} = E_{1s}E_{3s}, \quad K_{12,16} = -E_{1s}E_{5s}, \quad K_{12,18} = E_{1s}E_{4s}, \quad K_{12,112} = E_{1s}E_{6s}, \\ K_{12,27} = E_{2s}E_{3s}, \quad K_{12,67} = E_{2s}E_{5s}, \quad K_{12,78} = E_{2s}E_{4s}, \quad K_{12,712} = E_{2s}E_{6s}, \\ K_{21,33} = E_{3s}^2, \quad K_{21,35} = -E_{3s}E_{5s}, \quad K_{21,39} = E_{3s}E_{4s}, \quad K_{21,311} = -E_{3s}E_{6s}, \\ K_{21,55} = E_{5s}^2, \quad K_{21,59} = -E_{4s}E_{5s}, \quad K_{21,511} = E_{5s}E_{6s}, \quad K_{21,99} = E_{4s}^2, \\ K_{21,911} = -E_{4s}E_{6s}, \quad K_{21,1111} = E_{6s}^2; \\ K_{22,23} = E_{3s}^2, \quad K_{22,25} = -E_{3s}E_{5s}, \quad K_{22,29} = E_{3s}E_{4s}, \quad K_{22,211} = -E_{3s}E_{6s}, \\ K_{22,56} = -E_{5s}^2, \quad K_{22,58} = -E_{4s}E_{5s}, \quad K_{22,512} = -E_{5s}E_{6s}, \quad K_{22,36} = E_{3s}E_{5s}, \\ K_{22,38} = E_{3s}E_{4s}, \quad K_{22,312} = E_{3s}E_{6s}, \quad K_{22,69} = E_{4s}E_{5s}, \quad K_{22,611} = -E_{5s}E_{6s}, \\ K_{22,89} = E_{4s}^2, \quad K_{22,811} = -E_{4s}E_{6s}, \quad K_{22,912} = E_{4s}E_{6s}, \quad K_{22,1112} = -E_{6s}^2; \\ K_{23,22} = E_{3s}^2, \quad K_{23,26} = E_{3s}E_{5s}, \quad K_{23,28} = E_{3s}E_{4s}, \quad K_{23,212} = E_{3s}E_{6s}, \end{aligned}$$

$$K_{23,66} = E_{5s}^2, \quad K_{23,68} = E_{4s}E_{5s}, \quad K_{23,612} = E_{5s}E_{6s}, \quad K_{23,88} = E_{4s}^2,$$

$$K_{23,812} = E_{4s}E_{6s}, \quad K_{23,1212} = E_{6s}^2.$$

Численное интегрирование на элементе. Определенные интегралы, входящие в выражения (7), (8), в программе вычисляются численно методом Гаусса по формулам

$$\int_0^L f(s) ds = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{L}{2}(t+1)\right) dt = \frac{L}{2} \sum_{i=1}^n H_i f\left(\frac{L}{2}(x_i+1)\right).$$

В случае 3-точечного интегрирования

$$H_1 = 0,5555555555555556, \quad x_1 = 0,774596669241483,$$

$$H_2 = 0,8888888888888889, \quad x_2 = 0,$$

$$H_3 = 0,5555555555555556, \quad x_3 = -0,774596669241483,$$

а 4-точечного интегрирования

$$H_1 = 0,347854845137454, \quad x_1 = 0,861136311594053,$$

$$H_2 = 0,652145154862546, \quad x_2 = 0,339981043584856,$$

$$H_3 = 0,652145154862546, \quad x_3 = -0,339981043584856,$$

$$H_4 = 0,347854845137454, \quad x_4 = -0,861136311594053.$$

Преобразование координат. Общая матрица Гессе и градиент потенциальной энергии деформации конструкции строятся обычным образом путем преобразования матриц Гессе и градиентов потенциальной энергии отдельных стержневых элементов из локальных осей $\{x, y, z\}$ в глобальную декартову систему $\{x', y', z'\}$ (рис. 1) с последующим суммированием. Преобразование векторов \mathbf{G}_e и матриц \mathbf{H}_e осуществляется по формулам

$$\mathbf{G}'_e = \mathbf{N}^T \mathbf{G}_e, \quad \mathbf{H}'_e = \mathbf{N}^T \mathbf{H}_e \mathbf{N},$$

где

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} [l] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [l] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [l] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [l] \end{pmatrix}; \quad [l] = \begin{pmatrix} l_{xx'} & l_{xy'} & l_{xz'} \\ l_{yx'} & l_{yy'} & l_{yz'} \\ l_{zx'} & l_{zy'} & l_{zz'} \end{pmatrix};$$

x, y, z — координаты узла 0 или 1 стержневого конечного элемента.

Вектор $\mathbf{r}_2^T = \{l_{yx'}, l_{yy'}, l_{yz'}\}$ определяет направление локальной оси y , вектор $\mathbf{r}_3^T = \{l_{zx'}, l_{zy'}, l_{zz'}\}$ получается из векторного произведения $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_1^T = \{l_{xx'}, l_{xy'}, l_{xz'}\}$.

Так как матрица \mathbf{N} является ортогональной, то обратное преобразование вектора из глобальной системы в локальную, необходимое для вычисления нелинейных векторов и матриц при итерационном процессе, осуществляется по формуле $\mathbf{u}_e = \mathbf{N} \mathbf{u}'_e$.

Алгоритм исследования. Итерационный метод Ньютона — Канторовича описывается формулами

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}^n) \delta \mathbf{u}^n = \mathbf{P} - \mathbf{G}(\mathbf{u}^n), \quad \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \delta \mathbf{u}^n.$$

В качестве первого приближения \mathbf{u}^1 может приниматься как нулевой вектор, так и решение с предыдущего шага по нагрузке. Контроль сходимости может проводиться по трем параметрам:

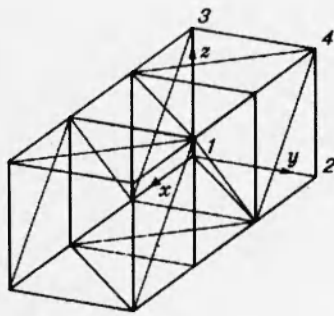


Рис. 2

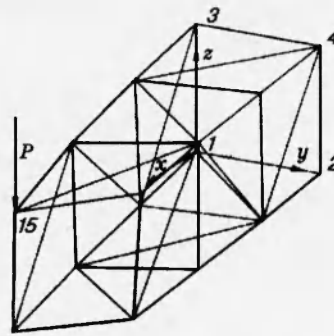


Рис. 3

1) максимальная относительная погрешность

$$\Delta_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\left| \frac{\delta u_i^n}{u_i^{n+1}} \right| \right)$$

(m — размерность векторов u^{n+1} и u^n);

2) максимальная абсолютная погрешность

$$\Delta_2 = \delta u_k^n, \quad \left| \delta u_k^n \right| = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \delta u_i^n \right|;$$

3) норма невязки

$$\Delta_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n [P_i - G_i(u^n)]^2}.$$

Устойчивость конструкции анализируется на основе энергетического критерия, сводящегося к контролю за положительностью элементов диагональной матрицы D в разложении $L^T D L$ матрицы Гессе H конструкции. Наличие хотя бы одного неположительного элемента свидетельствует о том, что конструкция находится в неустойчивом состоянии равновесия.

Для исследования устойчивости при линейном исходном состоянии достаточно на каждом проверяемом уровне нагружения проводить всего по две итерации с нулевым вектором в качестве первого приближения. Появление отрицательных компонент в матрице D на второй итерации означает неустойчивость равновесия конструкции при заданном уровне нагружения.

Примеры расчетов. Алгоритм и разработанная на его основе программа тестировались на примере исследования устойчивости шарнирно опертого стержня кругового сечения при осевом сжатии. Длина стержня 100 см, диаметр поперечного сечения 1 см, материал — дюралюминий.

При аппроксимации стержня одним конечным элементом получена критическая нагрузка, на 25 % превышающая эйлерову,

$$P_c = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$$

(EJ — минимальная жесткость на изгиб, L — длина элемента). При аппроксимации же

двумя элементами полученное значение критической нагрузки превышает теоретическое всего на 0,5 %.

Распределение моментов по длине стержня тестировалось на задаче консольного изгиба. В качестве примера рассмотрена также пространственная ферма, составленная из стальных трубчатых стержней внешнего диаметра 50 мм и внутреннего 48 мм (рис. 2). Ферма закреплена шарнирно в узлах 1-4.

На рис. 3 показано деформированное состояние такой фермы при нагружении в узле 15 сосредоточенной силой. Потери устойчивости в пределах упругой работы материала (при силе P , не превосходящей 150000 Н) не происходит. Теоретическая критическая нагрузка составляет 550000 Н.

ЛИТЕРАТУРА

1. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций /А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченков, А. Н. Фролов. М.: Машиностроение, 1975.

Поступила в редакцию 31/V 1995 г.
