

УДК 621.391 : 53.08

Ю. Е. Воскобойников, И. Н. Мухина

(Новосибирск)

**РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЙ АЛГОРИТМ
ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ
С УТОЧНЕНИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ
ШУМ/СИГНАЛ**

Предложен локальный регуляризирующий алгоритм, использующий итерационную процедуру уточнения отношений шум/сигнал, входящих в регуляризирующий множитель. Получены явные выражения для предельных точек этой итерационной процедуры, что существенно уменьшает затраты машинного времени на построения регуляризованного решения. Проведенный вычислительный эксперимент показал эффективность предложенного локального алгоритма по сравнению с «глобальным» регуляризирующим алгоритмом.

Введение. Часто в качестве математической модели системы формирования оптического изображения выступает интегральное соотношение [1, 2]

$$\iint_{\Omega} K(x, y, x', y') \varphi(x', y') dx' dy' = f(x, y), \quad (1)$$

где $\varphi(x, y)$ – исходное изображение; $K(x, y, x', y')$ – аппаратная функция (или функция рассеяния точки); $f(x, y)$ – выходное изображение; Ω – область определения $\varphi(x, y)$. Если оптическая система инвариантна к сдвигу, то справедлива следующая модель:

$$\iint_{\Omega} K(x - x', y - y') \varphi(x', y') dx' dy' = f(x, y). \quad (2)$$

Под задачей восстановления понимается следующая обратная задача [2]: по зарегистрированному выходному изображению $f(x, y)$ необходимо оценить исходное изображение $\varphi(x, y)$, другими словами, решить уравнения (1), (2) относительно $\varphi(x, y)$. Как известно, решение интегральных уравнений I рода (к которым относятся (1), (2)) является некорректно поставленной задачей [3].

Схема регистрации $f(x, y)$ и цифровая форма методов обработки изображений обуславливают следующую дискретную модель формирования изображения (конечномерную аппроксимацию интегра-

лов (1), (2)) [4]. Из значений изображений $\varphi(x', y')$, $f(x, y)$ на сетках размером $M_x \times M_y$, $N_x \times N_y$ формируются векторы φ , f размерностью $M = M_x \times M_y$, $N = N_x \times N_y$ соответственно. Тогда, введя матрицу K размером $N \times M$, аппроксимирующую интегральные операторы (1), (2), приходим к системе

$$K\varphi = f, \quad (3)$$

составленной из N уравнений относительно M неизвестных. К такой же системе приходим при решении одномерных интегральных уравнений I рода (задача восстановления сигналов). В общем случае эта система несовместна, возможно, вырождена, а матрица K прямоугольная. Поэтому в качестве решения системы (3) принимают нормальное псевдорешение φ^+ [3, 5, 6], которое всегда существует и единственно. К сожалению, вместо точной правой части f доступен вектор

$$\tilde{f} = f + \eta, \quad (4)$$

где η – случайный вектор «шума измерений», обусловленный ошибками дискретизации, шумами измерительной аппаратуры и т. д. Известно, что нахождение псевдорешения является неустойчивой задачей (малые ошибки исходных данных могут вызвать большие ошибки в решении), и поэтому для устойчивого нахождения псевдорешения при неточных данных используют методы регуляризации [3, 6, 7].

В качестве приближения к искомому псевдорешению φ^+ берут регуляризованное решение φ_α системы (3), определяемое из «новой» системы: $(K^T W_f K + \alpha W_\varphi) \varphi_\alpha = K^T W_f \tilde{f}$, где α – параметр регуляризации, индекс T означает транспонирование соответствующей матрицы. Матрица W_f определяется на основе априорной информации о числовых характеристиках вектора шума η и, как правило, с точностью до константы равна V_η^{-1} , где V_η – корреляционная матрица вектора шума. Матрица W_φ размером $M \times M$ характеризует априорную гладкость изображения $\varphi(x, y)$, в частности порядок регуляризации. Задавая различным образом W_φ , W_f , можно получить широкий спектр регуляризованных решений: от регуляризованного по А. И. Тихонову до байесовского [5, 6].

Как правило, недостаток априорной информации об искомом решении φ «заставляет» задать фиксированную матрицу W_φ исходя из требуемого порядка регуляризации и подбором только одного параметра α получить приемлемые по точности регуляризованные решения. Существующие алгоритмы позволяют найти α , гарантирующее оптимальность регуляризованного решения по порядку (выбор α из принципа невязки [7]), или оценить оптимальное α , доставляющее минимум среднеквадратической ошибке (выбор α из критерия оптимальности [6]).

Естественно, что такая «глобальная» регуляризация имеет меньшую точность по сравнению с оптимальной «локальной» регуляризацией, осуществляемой соответствующим подбором всех эле-

ментов матрицы W_ϕ (например, байесовское решение). Однако требуемая для такого выбора W_ϕ априорная информация на практике отсутствует. Поэтому были предложены различные подходы к итерационному уточнению этой априорной информации с использованием доступной информации [6, 8–10]. Так, в работе [6, с. 181] предложена процедура итерационного уточнения локального отношения шум/сигнал при вычислении каждого коэффициента дискретного преобразования Фурье регуляризованного решения. Аналогичная процедура в терминах сингулярного разложения матрицы $K^T K$ рассматривалась в [10].

В данной работе на основе сингулярного разложения матрицы системы (3) и результатов [11] определяются предельные точки итерационной процедуры уточнения локального отношения шум/сигнал, что существенно уменьшает вычислительные затраты на реализацию итерационных алгоритмов локальной регуляризации.

1. Оптимальная локальная регуляризация. Предположим, что вектор шума η в представлении (4) имеет нулевое среднее и корреляционную матрицу V_η , допускающую запись

$$V_\eta = \sigma_\eta^2 C_\eta. \quad (5)$$

Здесь C_η – «нормированная» (к максимальной дисперсии σ_η^2) корреляционная матрица. Тогда регуляризованное решение ϕ_α системы (3) при $W_f = V_\eta^{-1}$ можно записать в виде [5]

$\phi_\alpha = V \text{diag}\{r_1(\alpha), \dots, r_M(\alpha)\} U^T C_\eta^{-1/2} \tilde{f}$, где U, V – ортогональные матрицы, входящие в сингулярное разложение матрицы:

$$C_\eta^{-1/2} K = U \Lambda V^T, \quad (6)$$

Λ – матрица размером $N \times M$, у которой $\{\Lambda\}_{j,j} = \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, M$, а остальные элементы равны нулю. Величины λ_j называются сингулярными числами. Регуляризуемый множитель $r_j(\alpha)$ имеет вид

$$r_j(\alpha) = \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \alpha m(\lambda_j)}, \quad j = 1, \dots, M, \quad (7)$$

а функция $m(\lambda) > 0$ – неубывающая функция, определяемая требуемой «гладкостью» проекций вектора ϕ (например, $m(\lambda) = 1$ соответствует регуляризации нулевого порядка). В общем случае $m(\lambda) = 1/\lambda^\gamma, \gamma \geq 0$, а соответствующая этой функции матрица W_ϕ определяется разложением

$$W_\phi = V \text{diag}\{m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_M)\} V^T.$$

Переход от «глобальной» регуляризации (меняется только один параметр α) к «локальной» можно осуществить, введя регуляризующие множители r_j вида

$$r_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + q_j}, \quad j = 1, \dots, M, \quad (8)$$

где стабилизирующий множитель q_j «настраивается» отдельно от каждого индекса j . Возникает вопрос: как осуществить такую настройку? Попытаемся ответить на него.

В качестве критерия точности решения

$$\hat{\phi} = V \text{diag} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + q_1}, \dots, \frac{\lambda_M}{\lambda_M^2 + q_M} \right\} U^T C_\eta^{-1/2} \tilde{f} \quad (9)$$

примем среднеквадратическую ошибку, определяемую функционалом $\Delta(\hat{\phi}) = M_\eta \left[\|\hat{\phi} - \phi^+\|^2 \right]$, где $M_\eta[\cdot]$ – оператор математического ожидания по распределению случайного вектора η .

Утверждение 1. Регуляризованное решение $\phi_{\text{опт}}$ доставляет минимум функционалу $\Delta(\hat{\phi})$ тогда и только тогда, когда регуляризующие множители r_j определяются как

$$r_j = r_{\text{опт}, j} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2(1 + S_j)}, \quad j = 1, \dots, M, \quad (10)$$

где величина

$$S_j = \sigma_\eta^2 / (\lambda_j x_j^+)^2 \quad (11)$$

тракуется как локальное отношение шум/сигнал, а x_j – проекции вектора: $x^+ = V^T \phi^+$, ϕ^+ – искомое нормальное псевдорешение системы (3) при точно заданной правой части. Доказательство утверждения 1 приводится в приложении.

Решение $\phi_{\text{опт}}$ можно назвать оптимальным, а процедуру его построения – оптимальным локальным регуляризующим алгоритмом.

Вычислительные эксперименты, проведенные для различных матриц K и векторов ϕ , показали существенное увеличение точности (в десятки и сотни раз) оптимального локального регуляризующего алгоритма по сравнению с алгоритмом глобальной регуляризации при оптимальном параметре регуляризации. К сожалению, вычисление $r_{\text{опт}, j}$ на практике не реализуемо из-за незнания вектора $x^+ = V^T \phi^+$. Поэтому рассмотрим возможность оценивания отношения шум/сигнал на основе полученных ранее регуляризованных решений.

2. Итерационное уточнение локальных отношений шум/сигнал. Пусть $\phi^{(0)}$ – некоторое решение, сходящееся к нормальному псевдорешению ϕ^+ при $\sigma_\eta^2 \rightarrow 0$. Тогда определим новое решение $\phi^{(1)}$ с регуляризующими множителями:

$$r_j^{(1)} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2(1 + \hat{S}_j^{(0)})}, \quad j = 1, \dots, M,$$

где $\hat{S}_j^{(0)} = \sigma_\eta^2 / (\lambda_j x_j^{(0)})^2$, $x^{(0)} = V\varphi^{(0)}$. Продолжая такое уточнение, приходим к следующей итерационной процедуре:

$$\hat{S}_j^{(n)} = \frac{\sigma_\eta^2}{(\lambda_j x_j^{(n)})^2}, \quad (12)$$

$$x_j^{(n+1)} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 (1 + \hat{S}_j^{(n)})} \tilde{y}_j, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где \tilde{y}_j – проекции вектора: $\tilde{y} = U^T C_\eta^{-1/2} \tilde{f}$.

Возникает вопрос о предельной точке последовательности решений $\varphi^{(n)} = Vx^{(n)}$. Введем величины $\tilde{S}_j^+ = \sigma_\eta^2 / \tilde{y}_j^2$, $\hat{S}_j^{(0)} = \sigma_\eta^2 / (\lambda_j x_j^{(0)})^2$ и квадратное уравнение

$$(\hat{S}_j^*)^2 + \left(2 - \frac{1}{\tilde{S}_j^+}\right) \hat{S}_j^* + 1 = 0, \quad (14)$$

корни которого обозначим как $\hat{S}_{j,1}^*$ и $\hat{S}_{j,2}^*$, $\hat{S}_{j,1}^* \leq \hat{S}_{j,2}^*$. Справедливо следующее

Утверждение 2. Пусть решение $\varphi^{(n)}$ определяется как

$$\varphi^{(n)} = V \text{diag} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 (1 + \hat{S}_1^{(n-1)})}, \dots, \frac{\lambda_M}{\lambda_M^2 (1 + \hat{S}_M^{(n-1)})} \right\} U^T C_\eta^{-1/2} \tilde{f}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\hat{S}_j^{(n-1)}$ – элемент последовательности (12). Тогда для любого начального приближения $\varphi^{(0)}$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)} = \varphi^* = Vx^*$,

где вектор x^* имеет проекции

$$x_j^* = \begin{cases} \lambda_j \tilde{y}_j / (\lambda_j^2 (1 + \hat{S}_{j,1}^*)), & \text{если } \tilde{S}_j^+ \leq 1/4, \quad 0 \leq \hat{S}_j^{(0)} < \hat{S}_{j,2}^*, \\ \lambda_j \tilde{y}_j / (\lambda_j^2 (1 + \hat{S}_{j,2}^*)), & \text{если } \tilde{S}_j^+ \leq 1/4, \quad \hat{S}_j^{(0)} = \hat{S}_{j,2}^*, \\ 0, & \text{если } \tilde{S}_j^+ \leq 1/4, \quad \hat{S}_j^{(0)} > \hat{S}_{j,2}^*, \\ 0, & \text{если } \tilde{S}_j^+ > 1/4. \end{cases} \quad (15)$$

Доказательство утверждения 2 приведено в приложении.

Результаты утверждения позволяют, не выполняя итераций (12), (13), сразу вычислить предельную точку x^* и соответственно вектор решений $\varphi^* = Vx^*$.

З а м е ч а н и е. Из (15) видно, что:

– проекция $x_j^* = 0$, если: а) отношение шум/сигнал $\tilde{S}_j^+ = \sigma_\eta^2 / \tilde{y}_j^2$ для проекции правой части y_j больше 1/4 или б) отношение

шум/сигнал $\hat{S}_j^{(0)} = \sigma_\eta^2 / (\lambda_j x_j^{(0)})^2$ у начального приближения $x^{(0)} = V^T \varphi^{(0)}$ больше $\hat{S}_{j,2}^*$;

– при уменьшении дисперсии σ_η^2 будет возрастать количество проекций x_j^* , отличных от нуля.

Утверждение 3. Если начальное приближение $\varphi^{(0)}$ сходится к точному псевдорешению φ^+ , т. е. $M\left[\|\varphi^{(0)} - \varphi^+\|^2\right] \rightarrow 0$ при $\sigma_\eta^2 \rightarrow 0$, то имеет место сходимость $M\left[\|\varphi^* - \varphi^+\|^2\right] \rightarrow 0$ при $\sigma_\eta^2 \rightarrow 0$.

Доказательство утверждения 3 приведено в приложении.

Результаты двух последних утверждений позволяют сделать вывод, что решение φ^* является регуляризованным решением системы (3), так как удовлетворяет двум достаточным условиям [3]:

- а) существует для любой правой части \tilde{f} ;
- б) сходится к искомому нормальному псевдорешению системы (3) при стремлении уровня шума к нулю.

Поэтому предложенный алгоритм построения φ^* можно назвать локальным регуляризирующим алгоритмом с итерационным уточнением.

3. Обобщения локального регуляризирующего алгоритма. Подход, положенный в основу вышерассмотренного алгоритма, позволяет использовать его в других задачах и вычислительных схемах, некоторые из них приводятся далее.

Восстановление изображений с использованием дискретного преобразования Фурье. Известно, что стационарная измерительная система описывается интегральным уравнением с разностным ядром вида (2). В этом случае эффективные вычислительные схемы построения регуляризованных решений основаны на двумерном дискретном преобразовании Фурье (ДПФ) и алгоритме быстрого преобразования Фурье (подробнее см. [5, 7]). В общем случае регуляризирующий алгоритм можно представить выражением

$$\hat{\varphi} = W^{-1} R W C_\eta^{-1/2} \tilde{f}, \quad (16)$$

где W^{-1} , W – матрицы обратного и прямого ДПФ; R – матрица регуляризирующих множителей, i, j -й элемент которой имеет вид:

$$R_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j}}{|\lambda_{i,j}|^2 + q_{i,j}} = \frac{\lambda_{i,j}}{|\lambda_{i,j}|^2 (1 + \hat{S}_{i,j})}. \quad (17)$$

Величины $\lambda_{i,j}$ – коэффициенты ДПФ от двумерного разностного ядра, которые в общем случае являются комплексными величинами. Из сравнений (16), (17) с (9), (8) видна возможность использования алгоритма итерационного уточнения локального отношения шум/сигнал $\hat{S}_{i,j}^{(n)}$ для определения стабилизирующего множителя

$q_{i,j}$ и вычисления коэффициентов ДПФ $\Phi^*(i,j)$ предельного регуляризованного решения $\Phi^*(x,y)$ на основе соотношений (15).

Сглаживание зашумленных изображений. Эффективные алгоритмы фильтрации зашумленных изображений $\tilde{f}(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y)$ строятся на основе ДПФ, их можно также представить в виде (16), где элементы матрицы фильтрующих множителей R будут иметь вид

$$R_{i,j} = \frac{1}{1 + q_{i,j}} = \frac{1}{1 + \hat{S}_{i,j}}. \quad (18)$$

Поэтому для задания локальных отношений шум/сигнал $\hat{S}_{i,j}$ вновь можно использовать предельные точки итерационной процедуры вида $\hat{S}_{i,j}^{(n+1)} = \sigma_\eta^2 / |F^{(n)}(i,j)|^2$, где $F^{(n)}(i,j)$ – коэффициенты ДПФ сглаженного изображения при $\hat{S}_{i,j} = \hat{S}_{i,j}^{(n)}$. В качестве начальных значений $\hat{S}_{i,j}^{(0)}$ принимаются $\hat{S}_{i,j}^{(0)} = \sigma_\eta^2 / |\tilde{F}(i,j)|^2$, где $\tilde{F}(i,j)$ – коэффициенты ДПФ исходного зашумленного изображения.

4. Оценивание дисперсии шума. Предлагаемый подход к построению локальных алгоритмов восстановления и сглаживания изображений требует задания дисперсии шума σ_η^2 , входящей в корреляционную матрицу (5). Заметим, что требование задания дисперсии или уровня шума присуще и другим подходам к построению регуляризирующих алгоритмов (метод невязки, выбор α из принципа невязки и т. д.). К сожалению, в ряде случаев достоверное задание дисперсии шума невозможно, поэтому предлагается алгоритм оценивания дисперсии шума на основе «высокочастотных» компонентов правой части операторных уравнений (1)–(3). Для конкретности вернемся к системе (3) и сингулярному разложению (6).

Вектор $\tilde{y} = U^T C_\eta^{-1/2} \tilde{f}$ можно представить в виде

$$\tilde{y} = \Lambda V \Phi + U^T C_\eta^{-1/2} \eta = \Lambda x + n. \quad (19)$$

Случайный вектор $n = U^T C_\eta^{-1/2} \eta$ имеет нулевое среднее $M[n] = 0$ (при предположении $M[\eta] = 0$) и корреляционную матрицу

$$V_n = M[nn^T] = U^T C_\eta^{-1/2} M[\eta\eta^T] C_\eta^{-1/2} U = \sigma_\eta^2 I. \quad (20)$$

Следовательно, проекции вектора n не коррелированы между собой и имеют дисперсию σ_η^2 . С учетом структуры матрицы Λ (последние $N-M$ строк равны нулю) соотношения (19) можно представить в виде $\tilde{y}_j = \lambda_j x_j + n_j$, $j = 1, 2, \dots, M$; $\tilde{y}_j = n_j$, $j = M+1, \dots, N$.

Из (20) следует

$$M \left[\sum_{j=M+1}^N \tilde{y}_j^2 \right] = \sigma_\eta^2 (N - M).$$

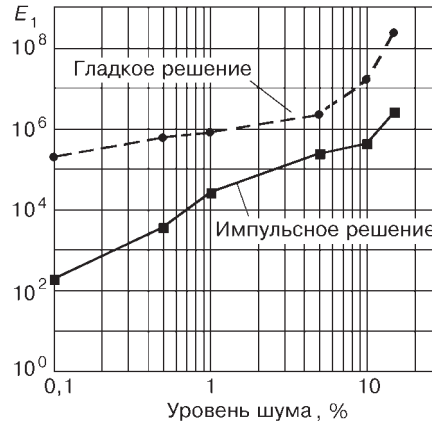


Рис. 1. Отношение среднеквадратических ошибок нерегуляризованного псевдорешения $\tilde{\varphi}^+$ и предлагаемого решения φ^* при различных уровнях шума

Следовательно, в качестве оценки $\hat{\sigma}_\eta^2$ для дисперсии σ_η^2 можно принять величину $\hat{\sigma}_\eta^2 = \frac{1}{N - M} \sum_{j=M+1}^N \tilde{y}_j^2$.

5. Результаты вычислительного эксперимента. Для проверки работоспособности и свойств предлагаемого алгоритма локальной регуляризации был проведен обширный вычислительный эксперимент. Приведем результаты одного из этих экспериментов.

Матрица K системы (3) имела размер 200×120 и число обусловленности $\approx 10^5$. В качестве вектора φ были приняты два вектора: 1) «гладкое» решение (экспоненциальная зависимость); 2) «импульсное» решение (имеющее два импульса).

Значение точной правой части $f = K\varphi$ искажалось нормально распределенным шумом с нулевым средним и дисперсией σ_η^2 , которая задавалась по относительному уровню шума $\delta_\eta = \|\hat{f} - f\| / \|f\| = 0,001, 0,005, 0,01, 0,05, 0,1, 0,15$, что соответствует 0,1, 0,5, 1, 5, 10, 15 %. Так как регуляризованное решение, построенное по случайному вектору \tilde{f} , является также случайным вектором и, следовательно, норма ошибки решения – случайной величиной, то приводимые ниже характеристики выражаются через математические ожидания норм ошибки решения. Оценка математического ожидания осуществлялась по 50 реализациям соответствующего регуляризованного решения.

Введем величину

$$E_1 = \frac{M \left[\|\tilde{\varphi}^+ - \varphi^+\|^2 \right]}{M \left[\|\varphi^* - \varphi^+\|^2 \right]},$$

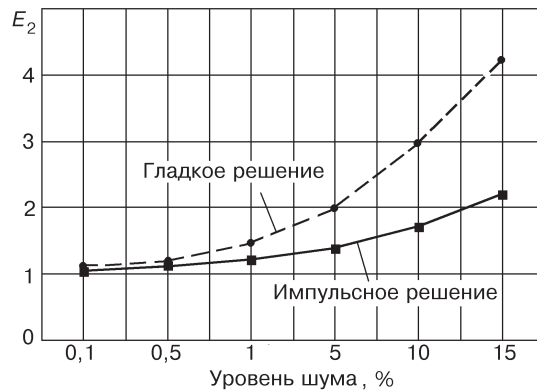


Рис. 2. Отношение средневквдратических ошибок решений, построенных предложенным локальным регуляризирующим алгоритмом и байесовским регуляризирующим алгоритмом

показывающую относительное увеличение ошибки нерегуляризованного решения $\tilde{\varphi}^+$ (псевдорешение, построенное по «зашумленной» правой части) по сравнению с локальным регуляризованным решением φ^* (соотношения (15) с начальным приближением $\varphi^{(0)} = \tilde{\varphi}^+$). На рис. 1 показана зависимость E_1 от уровня шума для гладкого и импульсного решений. Хотя с уменьшением шума «выигрыш» локальной регуляризации уменьшается, все равно он весьма существен.

Очевидно, что решение φ^* имеет ошибку больше чем решение $\varphi_{\text{опт}}$ из-за замены точного отношения шум/сигнал на предельные точки итерационной процедуры (12), (13). Поэтому введем величину

$$E_2 = \frac{M \left[\left\| \varphi^* - \varphi^+ \right\|^2 \right]}{M \left[\left\| \varphi_{\text{опт}} - \varphi^+ \right\|^2 \right]},$$

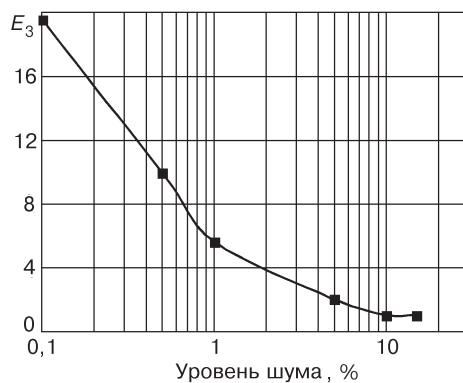


Рис. 3. Отношение средневквдратических ошибок решений, построенных предложенным локальным регуляризирующим алгоритмом и глобальным регуляризирующим алгоритмом

показывающую относительное увеличение ошибки решения ϕ^* по сравнению с «идеальным» решением $\phi_{\text{опт}}$. На рис. 2 представлены зависимости E_2 от уровня шума и гладкости решения. Видно, что локальную регуляризацию целесообразно использовать при среднем уровне шума (меньше 10 %). Это подтверждается результатами и других вычислительных экспериментов.

Для ответа на вопрос о том, насколько решение ϕ^* точнее локального регуляризованного решения ϕ_α , построенного при оптимальном параметре регуляризации $\alpha_{\text{опт}}$, введем

$$E_3 = \frac{M \left[\left\| \phi_{\alpha_{\text{опт}}} - \phi^+ \right\|^2 \right]}{M \left[\left\| \phi^* - \phi^+ \right\|^2 \right]}.$$

Чем больше эта величина единицы, тем предпочтительней является алгоритм локальной регуляризации. На рис. 3 приведены зависимости E_3 от уровня шума для гладкого и импульсного решений. Для высокого уровня шума (10–15 %) решения $\phi_{\alpha_{\text{опт}}}$, ϕ^* имеют одинаковую точность, а при меньшем уровне шума видно преимущество решения ϕ^* .

Заключение. Предложенный локальный регуляризирующий алгоритм, использующий оценки отношения шум/сигнал, не требует априорной информации о характеристиках искомого решения и при невысоком уровне шума незначительно уступает по точности байесовскому оптимальному решению и существенно точнее алгоритмов глобальной регуляризации. Затраты машинного времени на построение решения ϕ^* не превосходят затрат на построение глобального регуляризованного решения ϕ_α с выбором параметра регуляризации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Первоначально получим выражение для функционала $\Delta(\hat{\phi})$. В силу ортогональности матрицы V (см. разложение (6)) имеет место равенство

$$\Delta(\hat{\phi}) = M_\eta \left[\left\| \hat{\phi} - \phi^+ \right\|^2 \right] = M_\eta \left[\left\| \hat{x} - x^+ \right\|^2 \right],$$

где $\hat{x} = \text{diag} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + q_1}, \dots, \frac{\lambda_M}{\lambda_M^2 + q_M} \right\} U^T C_\eta^{-1/2} \tilde{f}$. Выражение (5), разложение (6) и представление $U^T C_\eta^{-1/2} \tilde{f} = \Lambda x + U^T C_\eta^{-1/2} \eta$ позволяют получить

$$\Delta(\hat{\phi}) = M_{\eta} \left[\left\| \hat{x} - x^+ \right\| \right]^2 = \sum_{j=1}^M \left[\frac{q_j^2 (x_j^+)^2}{(\lambda_j^2 + q_j)^2} + \sigma_{\eta}^2 \frac{\lambda_j^2}{(\lambda_j^2 + q_j)^2} \right]. \quad (\text{П1})$$

Условия $\frac{\partial}{\partial q_j} \Delta(\hat{\phi}) = 0$, $j = 1, \dots, M$, являются необходимыми и достаточными для минимума $\Delta(\hat{\phi})$, и непосредственным дифференцированием (П1) получаем $q_{\text{опт}, j} = \sigma_{\eta}^2 / (x_j^+)^2$, $j = 1, \dots, M$.

Подставляя это выражение в регуляризующий множитель $\lambda_j / (\lambda_j^2 + q_j)$, находим

$$r_{\text{опт}, j} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \sigma_{\eta}^2 / (x_j^+)^2} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 (1 + \sigma_{\eta}^2 / (\lambda_j x_j^+)^2)}.$$

Вводя величину (11), приходим к условию (10) утверждения 1.

Доказательство утверждения 2. В общем случае проекции вектора $x^{(0)} = V\varphi^{(0)}$ можно определить соотношениями

$$x_j^{(0)} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \alpha m(\lambda_j)} \tilde{y}_j = \frac{1}{1 + \frac{\alpha m(\lambda_j)}{\lambda_j^2}} \tilde{x}_j^+, \quad (\text{П2})$$

где $\tilde{x}_j^+ = \tilde{y}_j / \lambda_j$ – проекции нормального псевдорешения при неточно заданной правой части. Тогда проекции $x_j^{(n+1)}$ для последующих приближений $\varphi^{(n+1)}$ вычисляются на основе выражения

$$x_j^{(n+1)} = \frac{1}{1 + \sigma_{\eta}^2 / (\lambda_j x_j^{(n)})^2} \tilde{x}_j^+.$$

Возведя обе части в степень (-2) и умножив на $\sigma_{\eta}^2 / \lambda_j^2$, приходим к следующему итерационному отношению:

$$\hat{S}_j^{(n+1)} = (1 + \hat{S}_j^{(n)})^2 \tilde{S}_j^+, \quad (\text{П3})$$

где $\tilde{S}_j^+ = \sigma_{\eta}^2 / \tilde{y}_j^2$, $\hat{S}_j^{(n)} = \sigma_{\eta}^2 / (\lambda_j x_j^{(n)})^2$. Для упрощения дальнейших записей индекс j временно опустим.

Видно, что итерационный процесс (П3) зависит от двух параметров \tilde{S}^+ , $\hat{S}^{(0)}$. Пусть $\hat{S}^{(n)}$, $\hat{S}_1^{(n)}$ – две последовательности, генерируемые (П3) для двух значений $\hat{S}^{(0)} \leq \hat{S}_1^{(0)}$ соответственно при одном и том же \tilde{S}^+ . Тогда справедливо неравенство

$$\hat{S}^{(n)} \leq \hat{S}_1^{(n)} \text{ при любом } \tilde{S}^+. \quad (\text{П4})$$

Аналогично

$$\hat{S}^{(n)} \leq \hat{S}_1^{(n)}, \text{ если } \tilde{S}^+ \leq \tilde{S}_1^+ \text{ и при любом } \hat{S}^{(0)} > 0. \quad (\text{П5})$$

Стационарные точки последовательности (П3) определяются корнями уравнения

$$\hat{S}^* = (1 + \hat{S}^*)^2 \tilde{S}^+. \quad (\text{П6})$$

После преобразования приходим к квадратному уравнению

$$(\hat{S}^*)^2 + \left(2 - \frac{1}{\tilde{S}^+}\right) \hat{S}^* + 1 = 0,$$

корни которого определяются в виде $\hat{S}_{1,2}^* = \frac{1 - 2\tilde{S}^+ \pm \sqrt{1 - 4\tilde{S}^+}}{2\tilde{S}^+}$ и $\hat{S}_1^* < \hat{S}_2^*$.

Первоначально рассмотрим ситуацию $\tilde{S}^+ \leq 1/4$ и выделим при этом три случая.

С л у ч а й 1: $0 < \hat{S}^{(n)} \leq \hat{S}_1^*$ для любого n . Так как \hat{S}_1^* – корень уравнения (П6), то для любого $\hat{S}^{(n)} \leq \hat{S}_1^*$ выполняется $\tilde{S}^+(1 + \hat{S}^{(n)})^2 \geq \hat{S}^{(n)}$. Из (П3) следует, что $\hat{S}^{(n+1)} > \hat{S}^{(n)}$. Если $\hat{S}^{(0)} = \hat{S}_1^*$, то $\hat{S}^{(n)} = \hat{S}_1^*$ для любого n . Тогда из этих фактов и свойства (П4) вытекает неравенство $\hat{S}^{(n)} \leq \hat{S}^{(n+1)} \leq \hat{S}_1^*$ и монотонная сходимость

$$\lim \hat{S}^{(n)} = \hat{S}_1^* \text{ при } \hat{S}^{(0)} \leq \hat{S}_1^*. \quad (\text{П7})$$

С л у ч а й 2: $\hat{S}_1^* < \hat{S}^{(n)} \leq \hat{S}_2^*$ для любого n . Тогда имеет место $\hat{S}^{(0)}(1 + \hat{S}^{(n)})^2 \leq \hat{S}^{(n)}$ и $\hat{S}^{(n+1)} \leq \hat{S}^{(n)}$. Аналогично случаю 1 доказывается неравенство $\hat{S}_1^* \leq \hat{S}^{(n+1)} \leq \hat{S}^{(n)} \leq \hat{S}_2^*$ и монотонная сходимость

$$\lim \hat{S}^{(n)} = \hat{S}_1^*, \text{ если } \hat{S}_1^* < \hat{S}^{(0)} \leq \hat{S}_2^*. \quad (\text{П8})$$

Если $\hat{S}^{(0)} = \hat{S}_2^*$, то

$$\hat{S}^{(n)} \equiv \hat{S}_2^*. \quad (\text{П9})$$

С л у ч а й 3: $\hat{S}^{(n)} > \hat{S}_2^*$ для любого n . Тогда $\hat{S}^{(0)}(1 + \hat{S}^{(n)})^2 \leq \hat{S}^{(n)}$ и $\hat{S}^{(n+1)} > \hat{S}^{(n)}$, из чего следует предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = \infty \text{ при } \hat{S}^{(0)} > \hat{S}_2^*. \quad (\text{П10})$$

Ч а с т н ы й с л у ч а й [10]: $\hat{S}^{(0)} = \tilde{S}^+$ (т. е. в качестве начального вектора $\Phi^{(0)}$ берется «неустойчивое» псевдорешение $\tilde{\Phi}^+$). Тогда справедливо неравенство $\hat{S}^{(n)} \leq \hat{S}^{(n+1)} \leq \hat{S}_1^*$ и имеет место сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = \hat{S}_1^* \text{ при } \tilde{S}^+ \leq 1/4.$$

С л у ч а й 4: $\tilde{S}^+ > 1/4$. Эти значения соответствуют комплексным корням, что противоречит определению S , и поэтому будем полагать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = \infty \text{ при } \tilde{S}^+ > 1/4. \quad (\text{П11})$$

Обобщая пределы (П7), (П8), (П10), (П11) и тождество (П9), приходим к результатам утверждения 2.

Доказательство утверждения 3. Первоначально заметим, что для сходимости (17) необходимо и достаточно выполнения предельных соотношений

$$\lim \hat{S}_{1,j}^* = 0 \text{ и } \hat{S}_j^{(0)} < \hat{S}_{2,j}^* \text{ при } \sigma_\eta^2 \rightarrow 0. \quad (\text{П12})$$

Если имеет место сходимость (16), то а) $\hat{S}_j^{(0)} \geq \tilde{S}_j^+$; б) $\lim \hat{S}_j^{(0)} = 0$ при $\sigma_\eta^2 \rightarrow 0$. Поэтому рассмотрим предельные значения корней $\hat{S}_{1,j}^*$, $\hat{S}_{2,j}^*$ при $\tilde{S}_j^+ \rightarrow 0$. Для краткости записи индекс j будем опускать.

При достаточно малых значениях \tilde{S}^+ справедливо представление $(1 - 4\tilde{S}^+)^{1/2} \cong 1 - 2\tilde{S}^+ - 4(\tilde{S}^+)^2 - 24(\tilde{S}^+)^3 - \dots$. Тогда

$$\lim_{\tilde{S}^+ \rightarrow 0} \hat{S}_1^* = \lim_{\tilde{S}^+ \rightarrow 0} \frac{1 - 2\tilde{S}^+ - (1 - 4\tilde{S}^+)^{1/2}}{2\tilde{S}^+} \cong \lim_{\tilde{S}^+ \rightarrow 0} \left[-\frac{4(\tilde{S}^+)^2 + 24(\tilde{S}^+)^3}{2\tilde{S}^+} \right] = 0 \quad (\text{П13})$$

По аналогии можно доказать предел

$$\lim_{\sigma_\eta^2 \rightarrow 0} \hat{S}_2^* = \infty. \quad (\text{П14})$$

Тогда из существования пределов (П13), (П14) и условий (П12) следует среднеквадратическая сходимость решения ϕ^* .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971.
2. Васильченко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
4. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982. Кн. 1.
5. Воскобойников Ю. Е. Методы решения некорректных задач параметрической идентификации. Новосибирск: НГТУ, 1996.

6. **Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И.** Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984.
7. **Морозов В. А., Гребенников А. И.** Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. М.: МГУ, 1992.
8. **Арсенин В. Я., Тимонов А. А.** О построении регуляризирующих операторов, близких к оптимальному, для одномерных и многомерных интегральных уравнений I рода типа свертки // ДАН СССР. 1985. **284**, № 6. С. 1289.
9. **Арсенин В. Я., Криксин Ю. А., Тимонов А. А.** Метод локальной регуляризации линейных операторных уравнений I рода и его приложение // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. **28**, № 6. С. 793.
10. **Hemmerle W. J.** An explicit solution for generalized ridge regression // Technometrics. 1975. **17**, N 3. P. 309.
11. **Воскобойников Ю. Е., Мухина И. Н.** Асимптотическая локальная регуляризация плохо обусловленных систем алгебраических уравнений // Тр. XI Байкальской междунар. школы-семинара. Иркутск, 1998. Т. 4. С. 86.

Поступила в редакцию 1 февраля 1999 г.
