

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кузина З. Н., Леонов А. И., Марков А. А. Нелинейные волны в упруговязком стержне и задача об ударе стержня конечной длины о жесткую преграду.— ПМТФ, 1978, № 1.
2. Flory P. J. Principles of Polymer Chemistry. Ithaca, 1953.
3. Boa-Teh Chu. Transverse shock waves in incompressible elastic solids.— «J. Mech. Phys. Solids», 1967, vol. 15, p. 1—14.
4. Blatz P. J., Sharda S. C., Tshoegl N. W. Strain energy function for rubberlike materials, based on a generalized measure of strain.— «Trans. Soc. Rheol.», 1974, vol. 18, N 1, p. 145—161.
5. Леонов А. И. Неравновесная термодинамика и реология упруговязких полимерных сред. Препринт лекций в Международной школе «Проблемы тепло- и массопереноса в реологически сложных средах», ИТМО АН БССР им. А. В. Лыкова. Минск. 16—28 апреля (1975).
6. Leonov A. J. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media.— «Rheologica Acta», 1976, Bd 15, N. 2, S. 85—98.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1954.
8. Галли Г. Я. Об ударных волнах в средах с произвольным уравнением состояния.— «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, вып. 6, с. 1106—1109.

УДК 534.514

### ДИСПЕРСИЯ СКОРОСТИ И РАССЕЯНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ

А. А. Усов, Т. Д. Шермергор

(Москва)

Рассеяние волн на неоднородностях среды может быть рассчитано различными методами. Анализ наиболее часто используемых приближений проведен в [1, 2]. Коэффициент рассеяния ультразвуковой волны в композитах рассчитывался в работах [3—6]. При этом в [3] принималось условие малости концентрации одного из компонентов, а в [6] рассчитывались лишь асимптотики длинных и коротких волн. Попытка расчета коэффициента рассеяния продольных и поперечных ультразвуковых волн во всем диапазоне длин волн предпринята в работах [4, 5]. Расчет проводился в приближении учета парных корреляций между модулями упругости и плотностью. В работе [4] вычисления проведены при использовании гауссовой зависимости для координатной части бинарных корреляционных функций, что не соответствует композиционным материалам, а в [5] не приведен явный вид функции, позволяющей перейти от асимптотики длинных волн к коротковолновой асимптотике. Кроме того, в обеих отмеченных работах не рассматривалась дисперсия скорости распространения волны.

Ниже проводится расчет коэффициента рассеяния и дисперсии скорости продольных волн во всем диапазоне длин волн при произвольных концентрациях компонентов.

1. Методом, развитым в работах [7—9], проведем перенормировку уравнений движения

$$L_{il}u_l = 0, \quad L_{il} \equiv \nabla_k \lambda_{iklm} \nabla_m + \rho \omega^2 \delta_{il},$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор смещения;  $\lambda_{iklm}$  — тензор модулей упругости;  $\rho$  — плотность среды;  $\omega$  — циклическая частота.

Обозначая регулярные составляющие операторов и функций угловыми скобками, а случайные — штрихами, во втором приближении теории случайных функций найдем

$$(1.1) \quad \langle L_{il} \rangle \langle u_l \rangle + \langle L'_{ip}(\mathbf{r}) \int G_{ps}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) L'_{sl}(\mathbf{r}_1) \langle u_l(\mathbf{r}_1) \rangle d\mathbf{r}_1 \rangle = 0,$$

где  $L'_{ip} = L_{ip} - \langle L_{ip} \rangle$ ;  $G_{ps}$  — функция Грина регулярного оператора  $\langle L_{il} \rangle$ , определенная равенством

$$\langle L_{ip} \rangle G_{ps} = -\delta(\mathbf{r})\delta_{is}.$$

Здесь и далее усреднение проводится по области, намного превышающей пространственный масштаб корреляций, но существенно меньшей расстояний, на которых заметно изменяются регулярные составляющие функций.

Из уравнения (1.1) видно, что регулярная составляющая вектора смещения для плоской волны может быть записана в виде

$$(1.2) \quad \langle u_l(\mathbf{r}) \rangle = A_l(\mathbf{q})e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}},$$

где  $A_l(\mathbf{q})$  — амплитуда волны для среднего вектора смещения;  $\mathbf{q}$  — волновой вектор, а сомножитель  $e^{i\omega t}$  вследствие однородности уравнения (1.1) опущен.

Вынося с помощью соотношения (1.2) значение  $\langle u_l \rangle$  за знак интеграла, находим перенормированный оператор уравнения движения  $L_{il}^*$ :

$$(1.3) \quad \begin{aligned} L_{il}^* \langle u_l \rangle &= 0, \quad L_{il}^* = \langle L_{il} \rangle + \tilde{L}_{il}, \quad \langle L_{il} \rangle = \langle \lambda_{iklm} \rangle \nabla_{km} + \omega^2 \langle \rho \rangle \delta_{il}; \\ \tilde{L}_{il} &= A_{ikpq}^{rst} I_{pqrs} \nabla_{km} - 2i\omega^2 A_{rsm} (I_{i}rs) \nabla_m + \omega^4 A_{il}. \end{aligned}$$

Здесь  $\nabla_{km} \equiv \nabla_k \nabla_m$ , а по индексам, заключенным в круглые скобки, проводится симметризация. Оператор (1.3) записан в предположении разделения тензорной и координатной зависимостей бипарных корреляционных функций, причем для различных корреляционных функций принята одинаковая координатная зависимость:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{iklm}(\mathbf{r}_1) \lambda'_{pqrs}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle &= A_{pqrs}^{ilm} \varphi(\mathbf{r}), \\ \langle \lambda'_{iklm}(\mathbf{r}_1) \rho'(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle &= A_{iklm} \varphi(\mathbf{r}), \quad \langle \rho'(\mathbf{r}_1) \rho'(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle = A \varphi(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Интегралы  $I$  определены следующими равенствами:

$$\begin{aligned} I_{pqrs} &= \int G_{pr} \nabla_{qs} (\varphi \cos \mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ I_{pql} &= \int G_{pl} \nabla_q (\varphi \sin \mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad I_{il} = \int G_{il} \varphi \cos \mathbf{q}\mathbf{r} d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Корреляционные тензоры  $A_{pqrs}^{ilm}$ ,  $A_{iklm}$  и  $A$  для композитов равны

$$(1.4) \quad \begin{aligned} A_{pqrs}^{ilm} &= h_1 \delta_{ik} \delta_{lm} \delta_{pq} \delta_{rs} + 2h_2 (\delta_{ik} \delta_{lm} \delta_{p(r} \delta_{s)q} + \delta_{i(l} \delta_{m)k} \delta_{pq} \delta_{rs}) + \\ &\quad + 4h_3 \delta_{i(l} \delta_{m)k} \delta_{p(r} \delta_{s)q}, \\ A_{iklm} &= h_4 \delta_{ik} \delta_{lm} + 2h_5 \delta_{i(l} \delta_{m)k}, \quad A = h_6; \\ (1.5) \quad h_1 &= \langle \lambda' \lambda' \rangle, \quad h_2 = \langle \lambda' \mu' \rangle, \quad h_3 = \langle \mu' \mu' \rangle, \\ h_4 &= \langle \lambda' \rho' \rangle, \quad h_5 = \langle \mu' \rho' \rangle, \quad h_6 = \langle \rho' \rho' \rangle, \end{aligned}$$

где для двухфазных композитов среднее значение, дисперсия и ковариация произвольных величин  $\xi$  и  $\eta$  выражаются через объемные концентрации компонентов  $\bar{v}_i$  при помощи соотношений

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \langle \xi \rangle &= \bar{v}_1 \xi_1 + \bar{v}_2 \xi_2, \quad \langle \xi' \xi' \rangle = \bar{v}_1 \bar{v}_2 (\xi_1 - \xi_2)^2, \\ \langle \xi' \eta' \rangle &= \bar{v}_1 \bar{v}_2 (\xi_1 - \xi_2)(\eta_1 - \eta_2). \end{aligned}$$

Примем, что границы раздела между компонентами композита резкие. Тогда, если в пространственном распределении компонентов отсутствует ближний и дальний порядок (полностью разупорядоченная структура), то явный вид функции  $\varphi(\mathbf{r})$  может быть принят экспоненциальным [7—11]

$$(1.7) \quad \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(r) = \exp(-r/a),$$

где  $a$  — радиус корреляций.

Вклад в рассеяние и дисперсию скорости дает корреляционная добавка  $\tilde{L}_{il}(\mathbf{r})$ . В пространстве Фурье оператор  $\tilde{L}_{il}(\mathbf{r})$  может быть представлен в виде

$$(1.8) \quad \tilde{L}_{il}(\mathbf{q}) = -q^2 [\Lambda(x)l_{il} + M(x)\delta_{il}], \quad l_{il} = l_i l_i, \quad l_i = q_i/q.$$

Тогда аналогично [7] коэффициент рассеяния и скорость продольных волн будут равны

$$(1.9) \quad a\gamma_i(x) = \frac{\pi Q(x)}{2\langle\rho\rangle c^2}, \quad Q(x) = \text{Im}(\Lambda + M), \quad c^2 = c_i^2 = \frac{\langle\lambda + 2\mu\rangle}{\langle\rho\rangle};$$

$$(1.10) \quad c_l(x) = c \left(1 + \frac{R(x)}{2\langle\rho\rangle c^2}\right), \quad R(x) = 1 + x \frac{d}{dx} \text{Re}(\Lambda + M), \quad x = qa = \frac{\omega a}{c},$$

где  $\Lambda = \Lambda(x)$ ;  $M = M(x)$ .

Из последних выражений следует, что для вычисления коэффициента рассеяния продольных ультразвуковых волн достаточно найти функцию  $Q(x)$ , а для вычисления дисперсии скорости — функцию  $R(x)$ . Для приведения оператора  $\tilde{L}_{il}$  к виду (1.8) воспользуемся выражением (1.2). Это позволяет преобразовать оператор  $\tilde{L}_{il}$ :

$$(1.11) \quad \tilde{L}_{il}(\mathbf{q}) = -q^2 (l_{km} A_{ikpq}^{rsim} I_{pqrs} + 2qc^2 l_k A_{ikpq} I_{pql} - q^2 c^4 A I_{il}).$$

Во втором слагаемом последнего выражения симметризация не проводится, так как тензор  $l_k A_{ikpq} I_{pql}$ , согласно (1.8), симметричен относительно перестановки индексов  $i$  и  $l$ .

2. Вычислим интегралы  $I_{pqrs}$ ,  $I_{pql}$  и  $I_{il}$ . Для этого воспользуемся известным выражением функции Грина  $G_{pr}$  [7] и явным значением  $\varphi(\mathbf{r})$ , согласно (1.7). Сделаем также замену переменных  $\mathbf{q} = q\mathbf{l}$ ,  $\xi = q\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$ . Тогда будем иметь

$$(2.1) \quad I_{pqrs} = \int [n_{pr}g(\xi c) + \delta_{pr}f(\xi c)] \frac{\partial^2}{\partial \xi_q \partial \xi_s} \left[ \exp\left(-\frac{\xi}{x}\right) \cos(\xi\mathbf{l}) \right] \xi d\xi d\Omega_n,$$

$$I_{pql} = \frac{1}{q} \int [n_{pl}g(\xi c) + \delta_{pl}f(\xi c)] \frac{\partial}{\partial \xi_q} \left[ \exp\left(-\frac{\xi}{x}\right) \sin(\xi\mathbf{l}) \right] \xi d\xi d\Omega_n,$$

$$I_{il} = \frac{1}{q^2} \int [n_{il}g(\xi c) + \delta_{il}f(\xi c)] \exp\left(-\frac{\xi}{x}\right) \cos(\xi\mathbf{l}) \xi d\xi d\Omega_n;$$

$$(2.2) \quad g(\xi c) = \frac{1}{4\pi \langle\rho\rangle c^2 \xi^2} \{ [3(1 + ik\xi) - k^2 \xi^2] e^{-ik\xi} - [3(1 + i\xi) - \xi^2] e^{-i\xi} \},$$

$$f(\xi c) = \frac{1}{4\pi \langle\rho\rangle c^2 \xi^2} \{ (1 + i\xi) e^{-i\xi} - (1 + ik\xi - k^2 \xi^2) e^{-ik\xi} \},$$

где

$$(2.3) \quad n_{pl} = n_p n_l; \quad k = c/c_l; \quad c_l^2 = \langle\mu\rangle/\langle\rho\rangle; \quad d\Omega_n = d\mathbf{r}/r^2 dr = d\xi/\xi^2 d\xi.$$

Способ вычисления интегралов (2.1) описан в работе [9]. Проводя соответствующий расчет, получим

$$(2.4) \quad I_{pqrs} = d_1 l_{pqrs} + d_2 (l_{pr} \delta_{sq} + l_{ps} \delta_{rq} + l_{pq} \delta_{rs} + l_{rs} \delta_{pq} + l_{rq} \delta_{ps} + l_{sq} \delta_{pr}) + d_3 (\delta_{pq} \delta_{rs} + \delta_{pr} \delta_{qs} + \delta_{ps} \delta_{qr}) + d_4 l_{qs} \delta_{pr} + d_5 \delta_{pr} \delta_{sq},$$

$$I_{pql} = \frac{1}{2qc^2} [d_6 l_{pql} + d_7 (l_p \delta_{lq} + l_q \delta_{pl} + l_l \delta_{pq}) + d_8 l_q \delta_{pl}], \quad I_{il} = -\frac{1}{q^2 c^4} (d_9 l_{il} + d_{10} \delta_{il}),$$

где  $d_n = a_n + ib_n$ ; величины  $a_n$  и  $b_n$  равны

$$(2.5) \quad \langle \rho \rangle c^2 a_1 = \frac{5}{16x^4} [-14u + (-23 + 16k^2 + 7k^4)x^2] - v_{30}(1 + 5x^2) + v_1 - v_2 v_3 + v_4 v_5, \quad \langle \rho \rangle c^2 a_2 = \frac{4}{16x^4} [10u + (13 - 8k^2 - 5k^4)x^2] + v_2 v_6 - v_4 v_7,$$

$$\langle \rho \rangle c^2 a_3 = \frac{4}{16x^4} [-2u + (k^2 - 1)x^2] - v_2 v_8 + v_4 v_9, \quad \langle \rho \rangle c^2 a_4 = -\frac{3k^2}{2x^2} - v_1 + v_2 v_{10}, \quad \langle \rho \rangle c^2 a_5 = \frac{k^2}{2x^2} - v_2 v_{11},$$

$$\frac{\langle \rho \rangle}{2} a_6 = \frac{15u}{8x^3} + v_{30}(1 + 3x^2) - v_{18} + v_2 v_{19} - v_4 v_{20}, \quad \frac{\langle \rho \rangle}{2} a_7 = -\frac{3u}{8x^2} - v_2 v_{21} + v_4 v_{22},$$

$$\frac{\langle \rho \rangle}{2} a_8 = v_{18} - \frac{k^2 v_2}{x}, \quad \frac{\langle \rho \rangle}{c^2} a_9 = v_{23} - v_{30} x^2 - v_2 v_{24} + v_4 v_{25}, \quad \frac{\langle \rho \rangle}{c^2} a_{10} = -v_{23} + v_2 v_{26} - v_4 v_{27};$$

$$(2.6) \quad \langle \rho \rangle c^2 b_1 = \frac{5}{48x} (21v_0 + 76 - 21k - 34k^3 - 21k^5) - v_{12} + 2x^3 v_{30} - v_3 v_{13} - v_5 v_{14}, \quad \langle \rho \rangle c^2 b_2 = \frac{4}{48x} (-15v_0 - 44 + 15k + 14k^3 + 15k^5) + v_6 v_{13} + v_7 v_{14}, \quad \langle \rho \rangle c^2 b_3 = \frac{1}{48x} (3v_0 + 4 - 3k + 2k^3 - 3k^5) - v_9 v_{12} - v_9 v_{14}, \quad \langle \rho \rangle c^2 b_4 = \frac{3k^3}{2x} + v_{12} + v_{10} v_{13}, \quad \langle \rho \rangle c^2 b_5 = -\frac{k^3}{2x} - v_{11} v_{13},$$

$$\frac{\langle \rho \rangle}{2} b_6 = -5v_{31} + v_{28} - v_{30} x (1 + 2x^2) + v_{13} v_{19} + v_{14} v_{20},$$

$$\frac{\langle \rho \rangle}{2} b_7 = v_{31} - v_{13} v_{21} - v_{14} v_{22}, \quad \frac{\langle \rho \rangle}{2} b_8 = -v_{28} - \frac{k^2 v_{13}}{x},$$

$$\frac{\langle \rho \rangle}{c^2} b_9 = \frac{3}{2x} (1 - k) + 2x^3 v_{30} - v_{29} - v_{13} v_{24} - v_{14} v_{25},$$

$$\frac{\langle \rho \rangle}{c^2} v_{10} = \frac{1}{2x} (k - 1) + v_{29} + v_{13} v_{26} + v_{14} v_{27},$$

где

$$(2.7) \quad v = 1 + k^2; \quad u = 1 - k^2; \quad w = (1 + 2vx^2 + u^2 x^4)^{-1};$$

$$x^4 v_0 = 1 - k + 2x^2 (2 - k - k^3); \quad v_1 = wk^2 [1 + (2 + 3k^2)x^2 + ux^4];$$

$$2v_2 = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - ux^2};$$

$$16x^7 v_3 = 5[7 + 21vx^2 + 3(7 + 10k^2 + 7k^4)x^4 + (7 + 9k^2 + 9k^4 + 7k^6)x^6];$$

$$2v_4 = \operatorname{arctg} 2x; \quad 16x^7 v_5 = 5(7 + 42x^2 + 72x^4 + 32x^6);$$

$$\begin{aligned}
 16x^7v_6 &= 5 + 15vx^2 + 3(5 + 6k^2 + 5k^4)x^4 + (5 + 3k^2 + \\
 &+ 3k^4 + 5k^6)x^6; \quad 16x^7v_7 = 5 + 30x^2 + 48x^4 + 16x^6; \\
 16x^7v_8 &= 1 + 3vx^2 + (3 + 2k^2 + 3k^4)x^4 + u(1 - k^4)x^6; \\
 16x^7v_9 &= 1 + 6x^2 + 8x^4; \quad 2x^3v_{10} = 3k^2(1 + vx^2); \\
 3v_{11} &= v_{10}; \quad v_{12} = 2k^5x^3w; \quad 4v_{13} = \ln\{w[1 + (k - 1)^2x^2]^2\}; \\
 4v_{14} &= -\ln v_{30}; \quad v_{18} = wk^2[1 + (1 + v)x^2 + ux^4]; \\
 8x^5v_{19} &= 3[5 + 10vx^2 + (5 + 6k^2 + 5k^4)x^4]; \quad 8x^5v_{20} = \\
 &= 3(5 + 20x^2 + 16x^4); \quad 8x^5v_{21} = 3 + 6vx^2 + (3 + 2k^2 + \\
 &+ 3k^4)x^4; \quad 8x^5v_{22} = 3 + 12x^2 + 8x^4; \quad v_{23} = wk^2x^2(1 + ux^2); \\
 k^2v_{24} &= v_{10}; \quad 2x^3v_{25} = 3(1 + 2x^2); \quad 3k^2v_{26} = v_{10}; \quad 3v_{27} = v_{25}; \\
 v_{28} &= wk^3x(1 + vx^2); \quad v_{29} = 2k^3x^3w; \quad v_{30} = (1 + 4x^2)^{-1}; \\
 8x^3v_{31} &= 3[1 - k + (2 - k - k^3)x^2].
 \end{aligned}$$

В формулах (2.7) данной работы исправлены опечатки, допущенные в работе [9] для  $P_4$  и  $u_2$ . Правильные выражения для них получаются из  $v_4$  и  $v_2$  данной работы путем замены  $v_4 = P_4$ ,  $v_2 = u_2$ ,  $x = 1/s$ ,  $k = \kappa$ , в [9] в формуле (2.7)  $\rho^2cb_4$  следует читать  $\rho c^2b_4$ , в формуле (2.3) в выражении для  $R_5$  в последней квадратной скобке  $+ J_s - J_s \beta(3 + 2\beta^2)$  следует читать  $+ J_c - J_s \beta(3 + 2\beta^2)$ .

3. Перейдем непосредственно к вычислению функций  $Q(x)$  и  $R(x)$ . Для этого подставим в выражение (1.11) найденные значения интегралов  $I_{pqrs}$ ,  $I_{pqi}$  и  $I_{il}$  (2.4) и воспользуемся выражениями (1.4). Это позволяет оператор  $\tilde{L}_{il}(\mathbf{q})$  представить в виде (1.8). При этом функции  $Q(x)$  и  $R(x)$  оказываются равными

$$(3.1) \quad Q(x) = \sum_1^{10} D_n b_n, \quad R(x) = \sum_1^{10} D_n \chi_n,$$

где

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad \chi_n &\equiv (1 + xd/dx)a_n; \quad D_1 = h_1 + 4h_2 + 4h_3; \\
 D_2 &= 2(5h_1 + 16h_2 + 12h_3); \quad D_3 = 15h_1 + 20h_2 + 12h_3; \\
 D_4 &= h_1 + 4h_2 + 4h_3; \quad D_5 = 3h_1 + 4h_2 + 4h_3; \quad D_6 = h_4 + 2h_5; \\
 D_7 &= 5h_4 + 6h_5; \quad D_8 = h_4 + 2h_5; \quad D_9 = D_{10} = h_6.
 \end{aligned}$$

Функции  $\chi_n$  найдем, подставляя в первое из равенств (3.2) выражения (2.5), (2.7),

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad \langle \rho \rangle c^2 \chi_1 &= \frac{5}{16x^4} [42u + (23 - 16k^2 - 7k^4)x^2] + \frac{15v_2}{8x^7} [7 + 14vx^2 + \\
 &+ (7 + 10k^2 + 7k^4)x^4] - \frac{15v_4}{8x^7} (7 + 28x^2 + 24x^4) - v_{30}^2 (1 + 11x^2 + 20x^4) + \\
 &+ v_{15} - v_3v_{16} + v_5v_{17}, \\
 \langle \rho \rangle c^2 \chi_2 &= \frac{4}{16x^4} [-30u + (-13 + 8k^2 + 5k^4)x^2] - \frac{3v_2}{8x^7} [5 + 10vx^2 + \\
 &+ (5 + 6k^2 + 5k^4)x^4] + \frac{3v_4}{8x^7} (5 + 20x^2 + 16x^4) + v_6v_{16} - v_7v_{17}, \quad \langle \rho \rangle c^2 \chi_3 = \\
 &= \frac{u}{16x^4} (6 + vx^2) + \frac{v_2}{8x^7} [3 + 6vx^2 + (3 + 2k^2 + 3k^4)x^4] - \frac{v_4}{8x^7} (3 + 12x^2 + 8x^4) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -v_8v_{16} + v_9v_{17}, \quad \langle \rho \rangle c^2 \chi_4 = \frac{3k^2}{2x^3} (x - 2v_2) - v_{15} + v_{10}v_{16}, \\
\langle \rho \rangle c^2 \chi_5 &= \frac{v_9}{2x^3} (2v_2 - x) - v_{11}v_{16}, \quad \frac{\langle \rho \rangle}{2} \chi_6 = -\frac{15u}{8x^2} + v_{30}^2 (1 + 5x^2 + 12x^4) + \\
& + \frac{5}{x^2k^2} (k^2v_4v_{25} - v_2v_{10}) - v_{32} + v_{16}v_{19} - v_{17}v_{20}, \quad \frac{\langle \rho \rangle}{2} \chi_7 = \frac{3u}{8x^2} + \frac{1}{v_9^2x^2} (v_2v_{10} - \\
& - k^2v_4v_{25}) - v_{16}v_{21} + v_{17}v_{22}, \quad \frac{\langle \rho \rangle}{2} \chi_8 = v_{32} - \frac{k^2v_{16}}{x}, \quad \frac{\langle \rho \rangle}{c^2} \chi_9 = \frac{3}{x^3} (v_2 - v_4) - \\
& - v_{30}^2x^2 (3 + 4x^2) + v_{33} - v_{16}v_{24} + v_{17}v_{25}, \\
\frac{\langle \rho \rangle}{c^2} \chi_{10} &= \frac{1}{x^3} (v_4 - v_2) - v_{33} + v_{16}v_{26} - v_{17}v_{27},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
(3.4) \quad v_{15} &= w^2k^2[1 + (4 + 7k^2)x^2 + (6 + 11k^2 + 3k^4)x^4 + \\
& + (4 + k^2 - 2k^4 - 3k^6)x^6 + (1 - 3k^2 + 3k^4 - k^6)x^8]; \\
v_{16} &= wx[1 - (k^2 - 1)x^2]; \quad v_{17} = xv_{30}; \quad v_{32} = w^2k^2[1 + \\
& + (4 + k^2)x^2 + (6 + 7k^2 - k^4)x^4 + (2 + 3k^2 - 6k^4 + k^6)x^6 + \\
& + (1 - 3k^2 + 3k^4 - k^6)x^8]; \quad v_{33} = w^2k^2x^2[3 + (7 - 3k^2)x^2 + \\
& + (5 + 2k^2 - 7k^4)x^4 + (1 - 3k^2 + 3k^4 - k^6)x^6].
\end{aligned}$$

Остальные  $v_i$  определяются выражениями (2.7).

Таким образом, безразмерный коэффициент рассеяния продольных волн  $a\gamma_l(x_l)$  определяется формулами (1.9), третьей из формул (1.10), первой из формул (3.1), формулами (3.2), (1.5), (1.6), (2.6), (2.7), (2.3). Скорость распространения продольных волн  $c_l(x_l)$  определяется формулами (1.10), третьей из формул (1.9), второй из формул (3.1), формулами (2.3), (3.2), (1.5), (1.6), (3.3), (2.7), (3.4).

4. Если в формулах (2.6), (2.7), (3.3), (3.4) сделать предельные переходы при  $x \ll 1$  (длинные волны) и при  $x \gg 1$  (короткие волны), то получим известные предельные формулы [6]

$$(4.1) \quad \gamma_l = \frac{a^3\omega^4}{15 \langle \lambda + 2\mu \rangle^2} \left[ \frac{15h_1 + 20h_2 + 12h_3}{c_l^2} + 5h_6 + \frac{2c_l^3}{c_l^3} \left( \frac{4h_3}{c_l^2 c_l^2} + 5h_6 \right) \right];$$

$$(4.2) \quad c_l(a\omega) = c_l(1 - b_1 - 4\pi a^2 \omega^2 b_2) \quad (x \ll 1),$$

$$b_1 = \frac{1}{30 \langle \rho \rangle^2 c_l^2} \left[ \frac{8h_3}{c_l^2} + \frac{1}{c_l^2} (15h_1 + 20h_2 + 12h_3) \right],$$

$$\begin{aligned}
b_2 = \frac{1}{8\pi \langle \rho \rangle^2} \left\{ h_6 \left( \frac{2}{c_l^2} + \frac{1}{c_l^2} \right) + \frac{1}{35c_l^2} \left[ \frac{56h_3}{c_l^4} + \frac{8h_3}{c_l^2 c_l^2} + \frac{1}{c_l^4} (105h_1 + 196h_2 + \right. \right. \\
\left. \left. + 132h_3) \right] - \frac{2}{5c_l^2} \left[ \frac{4h_5}{c_l^2} + \frac{1}{c_l^2} (6h_5 + 5h_4) \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$(4.3) \quad \gamma_l = \frac{a\omega^2}{4 \langle \lambda + 2\mu \rangle^2} \left( \frac{h_1 + 4h_2 + 4h_3}{c_l^2} + c_l^2 h_6 - 2h_4 - 4h_5 \right) \quad (x \gg 1).$$

В области коротких волн в данном приближении дисперсия отсутствует. По этим предельным формулам и по общим формулам сделан расчет безразмерного коэффициента рассеяния  $a\gamma_l(x_l)$  и скорости распространения

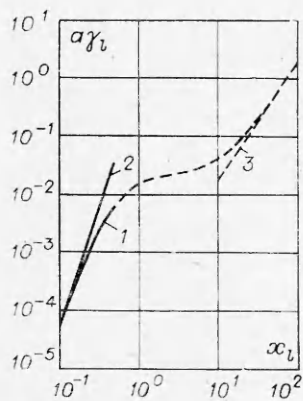
продольных ультразвуковых волн  $c_l(x_l)$  в композиционном материале вольфрам — медь. Плотности вольфрама и меди соответственно принялись равными [12]  $\rho_1 = 19,3 \text{ г/см}^3$  и  $\rho_2 = 8,9 \text{ г/см}^3$ , объемные концентрации  $\bar{v}_1 = 0,7$  и  $\bar{v}_2 = 0,3$  [13]. Упругие постоянные для монокристаллов вольфрама и меди (в единицах  $10^{11} \text{ дп/см}^2$ ) равны [14]  $c_{11}^{(1)} = 50,1$ ;  $c_{12}^{(1)} = 19,8$ ;  $c_{44}^{(1)} = 15,14$ ;  $c_{11}^{(2)} = 16,84$ ;  $c_{12}^{(2)} = 12,14$ ;  $c_{44}^{(2)} = 7,54$ , по ним найдены средние значения постоянных Ламэ при помощи соотношений [8]

$$\lambda_1 = \frac{1}{5} (c_{11}^{(1)} + 4c_{12}^{(1)} - 2c_{44}^{(1)}); \mu_1 = \frac{1}{5} (c_{11}^{(1)} - c_{12}^{(1)} + 3c_{44}^{(1)})$$

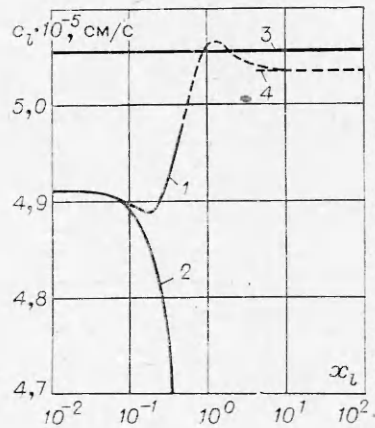
и аналогично для  $\lambda_2$  и  $\mu_2$ .

Результаты расчета представлены на фиг. 1, 2. На фиг. 1 в области  $x_l \geq 0,1$  кривые 1 и 2, рассчитанные соответственно по общим формулам данной работы и по предельной формуле длинных волн (4.1), различаются существенно. Кривая 3, построенная по предельной формуле коротких волн (4.3), в области  $x_l \geq 50$  полностью совпадает с кривой 1. Кривая 1 при  $x_l \geq 0,5$  дана штрихом, поскольку при больших  $x_l$  борновское приближение, использованное в расчете общих и предельных формул, оказывается неприменимым. Для оценки границы применимости метода учтем, что интенсивность рассеянной волны должна быть намного меньше падающей:  $I_r \ll I_0$ . Учитывая, что при  $r = L$  ( $L$  — длина образца)  $I_r = I_0 [1 - \exp(-2\gamma L)]$ , находим, что условием применимости борновского приближения будет  $2\gamma L \ll 1$ . Если учесть, что на длине образца должно быть достаточное число зерен неоднородности, и принять  $L \geq 10a$ , а также  $2\gamma L = 0,1$ , то для коэффициента рассеяния получим условие применимости теории  $a\gamma \leq 0,005$ , что для продольных волн в рассматриваемом композиционном материале соответствует величине  $x_l \leq 0,5$ . Отсюда для композита вольфрам — медь область применимости выполненного расчета определяется условием  $\lambda_l \geq 2\pi a / 0,5 \sim 10a$ .

Для скорости распространения продольных волн (фиг. 2) в области  $x_l \geq 0,1$  длинноволновая асимптотика 2 (построена по предельной формуле длинных волн (4.2)) и кривая 1 (построена по общей формуле) также существенно различаются. В области коротких волн при  $x_l \geq 10$  скорость уже не зависит от частоты. Видно, что в предельном случае  $qa \rightarrow 0$  скорость определяется эффективными параметрами среды, тогда как при  $qa \rightarrow \infty$  скорость продольных волн должна равняться средней. Непосредственным расчетом можно убедиться, что  $c_l(x_l)$  при  $qa \rightarrow \infty$  меньше, чем



Ф и г. 1



Ф и г. 2



для среды со средними параметрами  $\langle \lambda + 2\mu \rangle$  и  $\langle \rho \rangle$ , т. е. для коротких волн кривая 4 всегда должна лежать ниже, чем  $c_1$  (кривая 3).

В области применимости выполненного расчета дисперсия скорости в композите вольфрам — медь составляет  $\sim 2\%$ .

Поступила 3 V 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ravindra R. Usual assumptions in the treatment of wave propagation in heterogeneous elastic media. — «Pure and Applied Geophysics», 1968, vol. 70, N 2.
2. Keller J. B. Accuracy and validity of the Born and Rytov approximations. — «J. Opt. Soc. Amer.», 1969, vol. 59, N 8, pt 1.
3. Меркулова В. М. Акустические свойства некоторых твердых гетерогенных сред на ультразвуковых частотах. — «Акуст. журн.», 1965, т. 11, вып. 1.
4. Шуман Б. М. Распространение упругих волн в среде со случайными неоднородностями. — ПМ, 1968, т. 4, вып. 10.
5. Hudson J. A. The scattering of elastic waves by granular media. — «Quart. J. Mech. and Appl. Math.», 1968, vol. 21, N 4.
6. Усов А. А., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Дисперсия упругих волн в композиционных материалах. — В кн.: Сборник научных трудов по проблемам микроэлектроники (физ.-мат. серия). М., изд. Моск. ин-та электр. техн., 1969.
7. Лифшиц И. М., Пархомовский Г. Д. К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах. — ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 2.
8. Усов А. А., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах. — ПМТФ, 1972, № 2.
9. Усов А. А., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Рассеяние и дисперсия скорости ультразвуковых волн в поликристаллах орторомбической симметрии. — ПМТФ, 1976, № 3.
10. Чернов Л. А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., Изд-во АН СССР, 1958.
11. Pekeris C. L. Note on the scattering of radiation in an inhomogeneous medium. — «Phys. Rev.», 1947, vol. 71, N 4.
12. Перельман В. И. Краткий справочник химика. М. — Л., «Химия», 1964.
13. Бабичев Э. А., Коробенин В. М. Изучение коэффициентов термического расширения некоторых композиционных материалов. — «Электрон. техника. Материалы», 1970, т. 14, вып. 3.
14. Хантингтон Г. Упругие постоянные кристаллов. II. — УФН, 1961, т. LXXIV, вып. 3.

УДК 534.539.3

### КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО КРУГЛОЙ ЩЕЛЬЮ

Г. П. Коваленко

(Сумы)

Колебания твердого упругого однородного пространства, ослабленного круглой щелью, рассматривались в работе [1]. Решение соответственной статической задачи изложено в работах [2, 3]. Для среды, параметры Ламэ и плотность которой зависят от координаты  $z$ , аналогичная задача значительно усложняется и допускает эффективное аналитическое решение только для некоторых случаев зависимости указанных функций от  $z$  и фиксированных значений коэффициента Пуассона.

В данной работе рассматриваются статическая и динамическая задачи определения смещения в неоднородном упругом пространстве, ослабленном круглой щелью.