

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

*М. Я. Леонов*

(Львов)

На основе синтеза гипотезы максимальных растягивающих напряжений и макроскопической теории распространения трещин формулируется задача о возникновении и распространении мельчайших трещин как разрывная задача теории упругости.

Обычно предполагается, что хрупкое разрушение происходит, когда максимальное напряжение, определенное методами линейной теории упругости, достигает сопротивления отрыву [1]. Эта гипотеза хорошо отражает результаты экспериментов при некоторых ограничениях, накладываемых на другие главные напряжения и градиенты поля напряжений.

При наличии достаточно неоднородного поля напряжений хрупкое разрушение сопровождается образованием трещин. У концов этих трещин, как правило, закон Гука неприменим. Область, в которой это имеет место, обычно считается бесконечно малой по сравнению с размерами трещины. Теории, в которых принимается это допущение, будем называть макроскопическими. Они неприменимы к решению основной задачи теории хрупкого разрушения: определить нагрузки, при которых возникают и распространяются мельчайшие трещины. Математическая формулировка этой задачи является основной целью работы.

Основоположником макроскопической теории распространения трещин является Гриффитс<sup>1</sup>. Он предполагал, что энергия, затрачиваемая на образование новых поверхностей при распространении трещин, равна поверхностной энергии, умноженной на площадь вновь образованных поверхностей. Это предположение было бы правильным, если при разрушении не происходили микропластические деформации. Однако малые пластические деформации при разрушении реальных твердых тел всегда происходят, и энергия, затрачиваемая на эти деформации при хрупком разрушении важнейших технических материалов, может значительно превосходить поверхностную энергию. По предложению Орована теорию Гриффитса можно формально применять и для этих случаев, заменив поверхностную энергию другой характеристикой материала, включающей в себя энергию, израсходованную на пластические деформации, возникающие при распространении трещин (литература по этому вопросу приведена в статье [3]). Твердые тела, для которых справедлив этот принцип Орована, ниже называются реальными хрупкими телами. Из сказанного следует, что для определения условий распространения трещин в реальных хрупких телах можно пользоваться моделью идеального хрупкого тела, которая и используется в дальнейшем.

**§ 1. Исходные положения.** Простейшей моделью хрупкого тела является тело, обладающее следующими свойствами: а) максимальные растягивающие напряжения не превосходят сопротивления отрыву  $\sigma_0$ ; б) зависимость между деформациями и напряжениями описывается законом Гука, если растягивающие напряжения не достигают величины  $\sigma_0$ ; в) в модели образуются щели, когда максимальное напряжение, определенное методами линейной теории упругости, превосходит  $\sigma_0$ ; г) поверхности щели могут или притягиваться с напряжением  $\sigma_0$ , если интервал между ними не превосходит некоторой величины  $\delta$ , или не взаимодействовать в противном случае.

По принципу Орована работу  $G$ , затраченную на увеличение трещины на единицу площади в реальном теле (эту работу назовем энергией разрушения), нужно приравнять удвоенной поверхностной энергии модели, т. е.

$$\delta\sigma_0 = G \quad (1.1)$$

Зная сопротивление отрыву и определяя энергию разрушения  $G$ , можно найти  $\delta$ .

<sup>1</sup> Лакопическое изложение теории Гриффитса дано в работах [2, 3]. Силовой метод решения задачи макроскопической теории распространения трещин разработан Г. И. Баренблатом [4] на основе идей, предложенных С. А. Христиановичем в связи с изучением разрыва нефтеносных пластов.

Область, где интервал между поверхностями щели превосходит  $\delta$ , называется областью нарушенных связей, или трещиной. Остальные участки щелей называются областями ослабленных связей. В реальном теле в этих областях должен находиться слой материала, деформированного за пределы упругости.

Разрушение (локальное) определяется как явление перехода точек области ослабленных связей в область нарушенных связей. Чтобы определить условия такого разрушения, необходимо решить следующую задачу.

*Первая задача статики хрупкого тела.* Найти значения параметров, определяющих нагрузку, при которых имеет место решение задачи линейной теории упругости, непрерывное в области, занятой телом, за исключением некоторых поверхностей, на которых нормальное напряжение достигает максимального значения, равного сопротивлению отрыву  $\sigma_0$ . На этих поверхностях компоненты нормальных перемещений испытывают разрыв, не превосходящий величину  $\delta$ .

Максимальная нагрузка, при которой возможно решение этой задачи, называется предельной.

При разгрузке тела, деформированного за пределы упругости, закономерности деформации резко изменяются. Следовательно, нагрузки, о которых здесь идет речь, должны обеспечивать монотонность роста интервалов между поверхностями щелей. При этом должны быть наложены некоторые ограничения на скорость роста нагрузки и длительность ее действия.

**§ 2. Простейшая осесимметричная задача.** Предположим, что в неограниченном теле имеется дискообразная трещина (область нарушенных связей) радиуса  $a$ . На бесконечности к телу приложены нормальные напряжения, перпендикулярные трещине (фиг. 1). Требуется определить предельное напряжение  $s$  для упрощенной модели хрупкого тела.

Как бы ни была мала нагрузка  $s$ , у краев трещины возникнут деформации, превосходящие предел пропорциональности, т. е. возникнет область ослабленных связей. Предполагается, что эта область представляет собой кольцо ( $a < r < R$ ,  $z = 0$ ), т. е.

$$\sigma_z(r, 0) = \begin{cases} s & (r \leq a) \\ \sigma_0 & (a < r \leq R) \end{cases}$$

Вычитая из рассматриваемого напряженного состояния соответствующее однородное состояние, получим вспомогательное напряженное состояние, исчезающее на бесконечности и определяемое условием

$$p(r) = \begin{cases} s & (r \leq a) \\ s - \sigma_0 & (a < r \leq R) \end{cases} \quad (2.1)$$

Фиг. 1

Здесь  $p$  — давление на поверхности щели для вспомогательной задачи.

Воспользовавшись результатом работы [5] (формула 38), нормальное перемещение на поверхности щели определим по формуле

$$w(r) = 4 \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^{\tau} p(\sqrt{r^2 \sin^2 \alpha + t^2}) dt \quad (\tau = \sqrt{R^2 - r^2} \sin \alpha) \quad (2.2)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Для рассматриваемой задачи получим

$$w(a) = 4 \frac{1 - \nu^2}{\pi E} [s \sqrt{R^2 - a^2} - \sigma_0 (R - a)] \quad (2.3)$$

Полагая  $2w(a) = \delta$ , найдем

$$s \sqrt{R^2 - a^2} - \sigma_0 (R - a) = \frac{\pi E \delta}{8(1 - \nu^2)} \quad (2.4)$$

В это условие входит неизвестный радиус  $R$  внешнего контура области ослабленных связей. Для его определения потребуем выполнения условия  $\sigma_{\max} \leq \sigma_0$ . Для этого предположим, что на поверхности упругого полупространства  $z \geq 0$  в области  $r \geq R$  расположен плоский штамп ( $w = 0$ ), а на остальной части поверхности полупространства приложено нормальное давление (2.1).

Очевидно, что напряжение под штампом равно напряжению в плоскости  $z = 0$ , вызванному давлением (2.1) на рассматриваемую щель. Это напряжение можно определить, пользуясь результатами [6], т. е.

$$\sigma_z(r, 0) = \frac{2}{\pi \sqrt{r^2 - R^2}} \left[ s \left( R - \sqrt{r^2 - R^2} \operatorname{arctg} \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} \right) - \sigma_0 \left( \sqrt{R^2 - a^2} - \sqrt{r^2 - R^2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R^2 - a^2}{r^2 - R^2}} \right) \right] \quad (2.5)$$

Ввиду того, что напряжение в сплошной части тела не должно превосходить сопротивления отрыву, необходимо потребовать, чтобы сумма, заключенная в прямых скобках в последней формуле, при  $r = R$  обращалась в нуль, т. е.

$$R = \frac{a}{\sqrt{1 - (s/\sigma_0)^2}} \quad (2.6)$$

При этом из формулы (2.5) следует, что напряженное состояние будет удовлетворять условию  $\sigma_{\max} \leq \sigma_0$  (предполагается, что  $s \leq \sigma_0$ ).

Из формул (2.4) и (2.6) следует, что

$$\sqrt{1 - (s/\sigma_0)^2} = 1 - \frac{c}{a} \quad \left( c = \frac{\pi E \delta}{8(1 - \nu^2)\sigma_0} \right) \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) допускает реальные значения для искомой величины  $s$  только при  $a \geq c$ , т. е.

$$s|_{a \geq c} = \sigma_0 \sqrt{(c/a)(2 - c/a)} \quad (2.8)$$

Замечаем, что

$$[ds/da]_{a=c} = 0, \quad [ds/da]_{a > c} < 0 \quad (2.9)$$

т. е. при  $a > c$  предельная нагрузка уменьшается с ростом размеров зоны нарушенных связей. Следовательно, при действии предельной нагрузки равновесие неустойчиво.

Рассмотрим теперь случай  $a < c$ . При действии нагрузки  $s = \sigma_0$  внешняя граница области ослабленных связей уходит в бесконечность ( $R = \infty$ ). В этом случае формула (2.3) дает

$$2w(a) = 8 \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \sigma_0 a \quad (s = \sigma_0, R = \infty) \quad (2.10)$$

т. е. при достижении разрушающей нагрузки интервал между поверхностями щели в области ослабленных связей не достигает критического значения  $\delta$ , если  $a < c$ .

Из всего сказанного следует, что для рассматриваемого примера разрушающая нагрузка не зависит от радиуса трещины, пока  $a \leq c$ , а при  $a > c$  эта нагрузка определяется формулой (2.8). Предельным диаметром трещины, не понижающим прочности тела на разрыв, будет

$$D = 2c = \frac{\pi E \delta}{4(1 - \nu^2)\sigma_0} \quad (2.11)$$

Полагая  $\delta \approx 10^{-3}$  мм,  $E/\sigma_0 \approx 10^3$ , найдем  $D \approx 1$  мм.

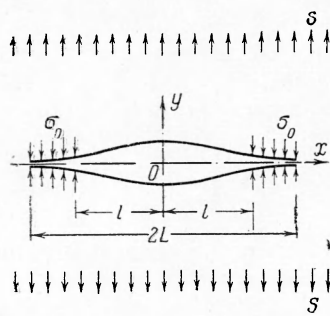
Эффект, аналогичный указанному, наблюдается в чугунах, в которых наличие достаточно малых концентраторов напряжений не понижает их прочности.

*Примечание.* Задача о разрыве неограниченного тела с дискообразной трещиной рассматривалась в макроскопической постановке Саком [3]. Если считать  $a \gg c$  и положить  $\delta = 2T/\sigma_0$ , где  $T$  — поверхностная энергия рассматриваемой модели твердого тела, то из формулы (2.8) получим формулу Сака

$$s \approx \sqrt{\frac{\pi E \delta \sigma_0}{4(1-\nu^2)}} = \sqrt{\frac{\pi E T}{2(1-\nu^2)}} \quad (2.12)$$

Применительно к задачам, связанным с прочностью горных пород, исследуемых без учета сил сцепления, действующих на поверхности трещин, задача о дискообразной трещине рассматривалась в работе [7], в которой получен результат (2.6) из условия плавного смыкания трещины.

**§ 3. Задача Гриффитса.** В неограниченном хрупком теле имеется начальная трещина (зона нарушенных связей) длиной  $2l$ . Это тело растягивается на бесконечности напряжением, перпендикулярным трещине. Требуется определить предельную величину этого напряжения.



Фиг. 2

В рассматриваемом случае у концов трещины всегда возникнут деформации за пределом пропорциональности, т. е. возникнет зона ослабленных связей, а граничные условия для рассматриваемой задачи представятся в виде

$$Y_y(x, \pm 0) = \begin{cases} 0, & |x| \leq l \\ \sigma_0, & l < |x| \leq L \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $l$  — полудлина зоны нарушенных связей,  $L$  — подлежащая определению полудлина расширенной щели, включающей зону ослабленных связей (фиг. 2).

Учитывая равенство нулю касательных напряжений в щели, приходим к определенной задаче теории упругости для трещины, решенной Мусхелишвили [8] в общем случае нагружения. Применительно к рассматриваемым граничным условиям это решение было использовано в работе [9]. В указанной работе условие ограниченности напряжений дает <sup>1</sup>

$$L = l \sec \frac{\pi s}{2\sigma_0} \quad (3.2)$$

Кроме того, можно вычислить перемещение

$$v(l, 0) = -l\sigma_0 \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \ln \cos \frac{\pi s}{2\sigma_0} \quad (3.3)$$

Максимальный интервал между поверхностями щели в зоне ослабленных связей будет равен  $2v(l, 0)$ . Приравнявая его значению  $\delta$ , получим предельное напряжение <sup>2</sup>

$$s = \frac{2}{\pi} \sigma_0 \arccos \exp\left(-\frac{\pi E \delta}{8l(1-\nu^2)\sigma_0}\right) \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что при неограниченном уменьшении длины зоны нарушенных связей предельная нагрузка пластинки с трещиной стремится к прочности бездефектной пластинки, а с ростом этого размера прочность пластинки монотонно уменьшается. При действии предельной нагрузки равновесие неустойчиво.

Используя формулы (3.2), (3.4), найдем, что перед разрушением длина зоны ослабленных связей будет

$$d = L - l = l(e^{c/l} - 1) \quad \left(c = \frac{\pi E \delta}{8(1-\nu^2)\sigma_0}\right) \quad (3.5)$$

причем эта длина неограниченно возрастает при  $l \rightarrow 0$ .

<sup>1</sup> Дополнительные исследования показывают, что при условии (3.2) максимальное напряжение в любой точке пластинки не превосходит  $\sigma_0$ .

<sup>2</sup> Этот результат получен П. М. Витвицким и автором этой статьи.

При  $l \rightarrow \infty$  из формулы (3.4) получим результат Гриффитса [2].

$$s \approx \sqrt{\frac{E\delta\sigma_0}{\pi l(1-\nu^2)}} = \sqrt{\frac{2ET}{\pi l(1-\nu^2)}} \quad (3.6)$$

Здесь  $T$  — поверхностная энергия рассматриваемой модели тела.

§ 4. Вторая задача статики хрупкого тела. *Пример.* Если при действии предельной нагрузки равновесие тела неустойчиво, то нагрузка называется критической. В рассмотренных здесь примерах имеет место этот случай. Однако это не является общим правилом.

Предположим, что предельная нагрузка будет докритической. Тогда при достаточно малой сверхпредельной нагрузке возможно устойчивое равновесие. При дальнейшем увеличении нагрузки равновесие может оказаться неустойчивым или невозможным. Определение такой нагрузки требует решения следующей задачи.

*Вторая задача статики хрупкого тела.* Найти значения параметров, определяющих нагрузку, при которых имеет место решение задачи линейной теории упругости, непрерывное в области, занятой телом, за исключением некоторых поверхностей, на которых нормальные перемещения испытывают разрыв, образуя в теле щель. Нормальные напряжения на поверхности этой щели достигают максимального значения  $\sigma_0$  там, где интервал между ними не больше  $\delta$ , и равно нулю — в противном случае.

Данная задача отличается от первой тем, что в ней область нарушенных связей возникает в сплошной части тела под действием нагрузки (в предыдущих примерах эта область существовала до приложения нагрузки как полость, т. е. не принадлежала телу).

*Пример.* Рассмотрим неограниченное тело, в которое внедрена материальная полуплоскость<sup>1</sup>. Если бы тело оставалось сплошным и его деформация подчинялась закону Гука, то нормальные напряжения в точках, лежащих на продолжении внедренной полуплоскости, равнялись бы<sup>[10]</sup>

$$\sigma(l) = \frac{E\lambda}{4\pi(1-\nu^2)l} \quad (4.1)$$

Здесь  $l$  — расстояние от границы внедренной полуплоскости,  $\lambda$  — ее толщина. Если на бесконечности приложены растягивающие напряжения  $s$ , нормальные к внедренной полуплоскости, то вместо (4.1) имеем

$$\sigma(l) = s + \frac{E\lambda}{4\pi(1-\nu^2)l} \quad (4.2)$$

При достаточно малых  $l$  напряжения, определяемые этой формулой, будут превосходить сопротивление отрыву  $\sigma_0$ . Будем предполагать, что эта величина мала по сравнению с  $E$ , так что размеры области, в которой нарушаются условия применимости закона Гука, будут велики по сравнению с  $\lambda$ . В такой постановке задача частично рассматривалась в работе [10].

Будем считать, что при указанных выше условиях в теле образуется щель неизвестной длины  $2L$ , причем область нарушенных связей возникает на некотором участке  $0 \leq l \leq L + b$ , а область ослабленных связей при  $L + b < l \leq 2L$ . Граничные условия для такой щели при обозначениях, принятых на фиг. 3, будут

$$Y_y(x, \pm 0) = \begin{cases} 0 & (-L < x < b) \\ \sigma_0 & (b < x < L) \end{cases} \quad (4.3)$$

Нормальные смещения границы рассматриваемой щели равны [10]

$$v(x, +0) = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{-L}^L p(\xi) \ln \frac{L^2 - x\xi - \sqrt{(L^2 - x^2)(L^2 - \xi^2)}}{L^2 - x\xi + \sqrt{(L^2 - x^2)(L^2 - \xi^2)}} d\xi \quad (4.4)$$

<sup>1</sup> Эта полуплоскость может быть заполнена одним слоем атомов. Тогда граница указанной полуплоскости называется линейной дислокацией единичной мощности. Возможность применения упрощенной модели хрупкого тела в этом случае обеспечивается требованием, чтобы размеры щелей, которые в ней возникают, превосходили межуатомное расстояние в несколько раз.

Здесь  $p$  — давление на поверхности трещины, дополняющее напряжения (4.2) до напряжений, определяемых условием (4.3), т. е.

$$p(x) = \begin{cases} s + \frac{E\lambda}{4\pi(1-\nu^2)(L+x)} & (-L < x < b) \\ s + \frac{E\lambda}{4\pi(1-\nu^2)(L+x)} - \sigma_0 & (b < x < L) \end{cases} \quad (4.5)$$

Длина щели и граница между областями нарушенных и ослабленных связей (фронт разрушения) определяются из следующих условий: 1) расстояние между поверхностями трещины в граничной точке равняется его критическому значению:  $2v(b, 0) = \delta$ ; 2) напряжение на остром<sup>1</sup> конце щели должно быть ограничено<sup>2</sup> или [9].

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = L$$

Указанные условия дают

$$4\pi s \sqrt{L^2 - b^2} + \frac{E\lambda}{1-\nu^2} \arccos \frac{b}{L} - 4\sigma_0 \sqrt{L^2 - b^2} \arccos \frac{b}{L} = \frac{\pi E}{1-\nu^2} \delta$$

$$\pi s L + \frac{E\lambda}{4(1-\nu^2)} - \sigma_0 \left( L \arccos \frac{b}{L} + \sqrt{L^2 - b^2} \right) = 0 \quad (4.6)$$

При  $\lambda < \delta$  и  $s < \sigma_0$  область нарушенных связей не возникает, причем первое из уравнений (4.6) отбрасывается, а последняя формула ( $b = -L$ ) дает

$$L = \frac{\lambda E}{4\pi(1-\nu^2)(\sigma_0 - s)} \quad (4.7)$$

Предполагая, что фронт разрушения существует при  $s < \sigma_0$ , обозначим

$$\arccos \frac{b}{L} = \beta \quad (4.8)$$

При этом условия (4.6) представляется в виде

$$L = \frac{\lambda E}{4(1-\nu^2)[\sigma_0(\sin \beta + \beta) - \pi s]} \quad (4.9)$$

$$\frac{s}{\sigma_0} = \frac{\delta \sin \beta + \beta - (\lambda/\pi\delta)\beta^2}{\sin \beta - \beta + (\pi\delta/\lambda)}$$

В интервале  $0 < \beta < \pi$  правая часть этого равенства достигает максимума при  $\beta = \pi\delta/\lambda$ , т. е.

$$\left(\frac{s}{\sigma_0}\right)_{\max} = \frac{\delta}{\lambda} \quad (\delta < \lambda)$$

Максимальное напряжение, при котором еще возможно равновесие рассматриваемого тела, будет

$$s_m = \begin{cases} \sigma_0 \delta / \lambda & (\delta < \lambda) \\ \sigma_0 & (\delta > \lambda) \end{cases} \quad (4.10)$$

Размер щели при предельной нагрузке определим по формуле (4.9), т. е.

$$L_m = \frac{\lambda E}{4(1-\nu^2)\sigma_0 \sin \frac{\pi}{\lambda} \delta} \quad (\delta < \lambda) \quad (4.11)$$

<sup>1</sup> Исследование напряжений около тупого конца дислокационной трещины дано в работе [11].

<sup>2</sup> Указанное условие в данной задаче эквивалентно условию  $\sigma_{\max} \leq \sigma_0$ .

Наименьший размер щели в момент разрушения будет при  $\lambda = 2\delta$ ; в этом случае имеем

$$s_m = \frac{\sigma_0}{2}, \quad L_m = \frac{\lambda E}{4(1-\nu^2)\sigma_0} \quad (\lambda = 2\delta) \quad (4.12)$$

Заметим, что в последнем случае поверхностная энергия рассматриваемой модели и модели, в которой притяжение поверхностей щели изменяется по закону

$$\sigma = \left(1 - \frac{2\nu}{\lambda}\right) \sigma_0 \quad (4.13)$$

где  $2\nu$  представляет расстояние между поверхностями щели в деформированном состоянии, будут одинаковы. При допущении  $E = 10\sigma_0$  формула (4.12) дает

$$L_m = \frac{10\lambda}{4(1-\nu^2)} \approx 2.7\lambda$$

Этот результат, как и вывод о величине разрушающей нагрузки ( $s_m = 1/2 \sigma_0$ ), практически совпадает с результатами работ [10, 12], в которых рассматривалось притяжение поверхностей щели по закону (4.13). Этот факт подтверждает целесообразность введения упрощенной модели хрупкого тела для исследования развития мельчайших трещин (в данном примере размеры областей ослабленных и нарушенных связей одинаковы, причем рассматриваемый дефект понижает прочность тела только в два раза). Заметим, что для макроскопических трещин совпадение результатов решения задачи о разрушающей нагрузке обеспечивается при соблюдении только одного условия — равенства поверхностных энергий моделей, — в то время как для мельчайших трещин для этого еще требуется равенство сопротивлений отрыву.

**§ 5. О величине зоны ослабленных связей.** 1°. Размер зоны ослабленных связей в предыдущем примере характеризуется величиной  $L - b$ , которую будем обозначать через  $d$ .

Рассмотрим пока случай  $\lambda \leq \delta$  ( $b = -L$ ), причем формула (4.7) дает

$$d(\lambda) = \frac{\lambda E}{2\pi(1-\nu^2)(\sigma_0 - s)} \quad (5.1)$$

Для ненагруженного тела имеем

$$d(\delta) = \frac{\delta E}{2\pi(1-\nu^2)\sigma_0} \quad (s = 0, \lambda = \delta) \quad (5.2)$$

В случае тела, нагруженного предельной нагрузкой (4.10), имеем

$$d = \begin{cases} \infty & (\lambda \leq \delta) \\ \frac{\lambda E}{4(1-\nu^2)\sigma_0} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\lambda} \delta & (\lambda \geq \delta) \end{cases} \quad (5.3)$$

Последняя формула вытекает из результатов (4.8), (4.11) при  $\beta = \pi\delta/\lambda$ . При очень больших  $\lambda$  получим

$$\delta |_{\lambda \gg \delta} = \frac{\pi E \delta}{8(1-\nu^2)\sigma_0} \equiv c \quad (5.4)$$

т. е. размер зоны ослабленных связей в этом случае приблизительно в 2.5 раза больше размера в случае (5.2).

2°. В случае осесимметричной нагрузки из формул (2.6) и (2.8) можно получить радиус внешнего круга, ограничивающего зону ослабленных связей при разрушающей нагрузке

$$R = \frac{a}{1 - c/a} \quad (c \leq a) \quad (5.5)$$

Учитывая, что  $R = \infty$  при  $a \leq c$ ,  $s = \sigma_0$ , найдем, что перед разрушением размер зоны ослабленных связей ( $d = R - a$ ) будет

$$d = \begin{cases} \infty & (a \leq c) \\ \frac{c}{1 - c/a} & (a \geq c) \end{cases} \quad (5.6)$$

При  $a \gg c$  из последнего следует  $d = c$ . Тот же результат получается из формулы (3.5) при  $l \gg c$ .

Из рассмотренных трех примеров следует, что формула (2.7) определяет размеры области ослабленных связей в случае наличия в теле достаточно больших дефектов при его разрушении. Размеры области нарушенных связей при этом должны значительно превосходить  $c$ . При этих условиях законно применение макроскопической теории развития трещин. Эти условия в рамках макроскопической теории определить невозможно.

**§ 6. К теории масштабного эффекта. Неучитываемые структурные дефекты.** Масштабный эффект состоит в уменьшении прочности хрупких материалов с увеличением геометрических параметров испытываемых тел. Помимо причин случайного и технологического характера, в масштабном эффекте ту или иную роль играют факторы, связанные с нелинейностью задачи хрупкого разрушения. В примере с разрушением тела, имеющего круглую трещину, это проявилось в том, что разрушающая нагрузка не зависит от диаметра трещины, пока его величина не превысит значения, определяемого формулой (2.11), а затем быстро уменьшается с ростом этого диаметра.

Известно, что структура нитевидных тел содержит относительно мало дефектов и это обеспечивает их высокую прочность при достаточно малых поперечных размерах. Повышенная однородность и прочность металлов достигается также при вакуумной плавке.

Назовем теоретической прочностью сопротивление отрыву бездефектного тела (ее можно определить как предельное сопротивление отрыву для нитевидных тел при неограниченном уменьшении их поперечных размеров). Если бы при исследовании разрушения тела учитывались бы все структурные дефекты, то в качестве параметра нужно было брать теоретическую прочность. Такое исследование требовало бы учета анизотропии и неоднородности тела. Это — область физики твердого тела и ее касаться не будем. В задачах механики влияние неучитываемых дефектов отражается на величине сопротивления отрыву.

Из рассмотренных выше примеров видно, что размеры зоны ослабленных связей перед разрушением неограниченно растут с уменьшением концентраторов напряжений. Следовательно, при разрушении тела в этих случаях  $\sigma_0$  будет величиной порядка технического сопротивления отрыву, определяемого для макроскопических тел.

В макроскопической теории распространения трещин малость размера области ослабленных связей (§ 5) может не обеспечивать законность применения усредненных механических характеристик. Однако формулы (2.12), (3.6) и (4.10) показывают, что в этом случае в разрушающую нагрузку аргументы  $\sigma_0$  и  $\delta$  входят только в виде их произведения. Следовательно, подбором параметра  $\delta$  при указанном выше  $\sigma_0$  можно обеспечить нужное значение этого произведения.

Из сказанного вытекает, что упрощенная модель хрупкого тела может давать усредненные количественные закономерности процессов трещинообразования и распространения макроскопических трещин.

Поступила  
29 III 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. У ж и к Г. В. Сопротивление отрыву и прочность металлов. Изд-во АН СССР, 1950.
2. С н е д д о н И. Преобразования Фурье. М., ИИЛ, 1955.
3. В и е с к н е р Н. F. The Propagation of Cracks and the Energy of Elast Deformation. Trans. ASME, 1958, vol. 80, № 6.
4. Б а р е н б л а т т Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, 1959, вып. 3—5.
5. Л е о н о в М. Я. К теории расчета упругих оснований. ПММ, 1939, т. III, вып. 2, стр. 65.
6. Л е о н о в М. Я. Метод инверсий в контактных задачах теории упругости. Науч. зап. Ин-та машиноведения и автоматики АН УССР, 1953, т. 1.
7. Б а р е н б л а т т Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. ПММ, 1956, вып. 4, § 2.
8. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1949.
9. Ж е л т о в Ю. П. и Х р и с т и а н о в и ч С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.
10. Л е о н о в М. Я., П а н а с ю к В. В. Розвиток найдрібніших тріщин в твердому тілі. Прикладна механіка, 1959, т. V, вип. 4.
11. В и т в и ц к и й П. М., Л е о н о в М. Я. Дислокація з еліптичною порожиною. ДАН УРСР, 1960, № 3.
12. П а н а с ю к В. В. Определение напряжений и деформаций вблизи мельчайшей трещины. Вопросы машиноведения и прочности в машиностроении. Изд-во АН УССР, 1960, вып. 6.