

**УСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ  
ПРОТЕКАНИЯ ЭКЗОТЕРМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ  
ПРИ РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ПОДАЧЕ РЕАГЕНТОВ**

*А. С. Бабаджанян, В. А. Вольперт, Вл. А. Вольперт,  
С. П. Даветян, И. Н. Меграбова  
(Черноголовка)*

В работе [1] изучены стационарные режимы работы цилиндрического и сферического реакторов. Активная зона реактора расположена между двумя коаксиальными цилиндрами (концентрическими сферами). Рассмотрены два способа организации процесса. При одном исходные реагенты подаются в реактор через внутреннюю поверхность, при другом — через внешнюю. Задача решалась в простейшей постановке, предполагавшей постоянство теплофизических параметров и одностадийный характер химического превращения. Кроме того, предполагалось, что скорость движения среды направлена вдоль радиуса и не зависит от угла, а в случае цилиндрических реакторов не учитывалось влияние торцов на распределение скоростей в реакторе.

В настоящей работе подробно исследована устойчивость стационарных режимов работы цилиндрического реактора с внутренней подачей относительно малых возмущений температуры и положения зоны реакции. Обсуждаются также некоторые вопросы устойчивости стационарных режимов работы других типов реакторов.

В обычных приближениях теории горения система нестационарных дифференциальных уравнений, описывающих работу цилиндрического реактора с внутренней подачей для случая конденсированных исходных реагентов и продуктов реакции, имеет в двумерной постановке вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} - u \frac{r_0}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + q\varphi(a) \Phi(T), \quad (1)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -u \frac{r_0}{r} \frac{\partial a}{\partial r} - \varphi(a) \Phi(T), \quad (2)$$

$$r = r_0: a = 1, T = T_H, \quad (3)$$

$$r = r_1: \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $T$  — температура;  $a$  — концентрация исходного вещества;  $\kappa$  — коэффициент температуропроводности;  $q = Q/c$ ;  $Q$  — тепловой эффект реакции;  $c$  — теплоемкость;  $r$ ,  $\varphi$  — радиальная и угловая координаты;  $t$  — время;  $u$  — скорость подачи реагента через боковую поверхность внутреннего цилиндра;  $\Phi(T)$  — температурная зависимость скорости тепловыделения;  $\varphi(a)$  — кинетика реакции;  $r_0$ ,  $r_1$  — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров;  $T_H$  — начальная температура исходных реагентов.

Предположение о сильной температурной зависимости скорости тепловыделения [1] позволило, воспользовавшись приближением поверхности горения [2—4], выразить стационарные решения задачи (1) — (4) через положение реакционной зоны  $R$

$$T_{ст}(r) = \begin{cases} T_H - q + q(r/R)^{u r_0 / \kappa}, & r_0 < r < R, \\ T_H, & R < r < r_1, \end{cases}$$

$$T_H = T_H + q - q(r_0/R)^{u r_0 / \kappa},$$

$$a_{ст}(r) = \begin{cases} 1, & r_0 < r < R, \\ 0, & R < r < r_1 \end{cases}$$

и выписать уравнение для нахождения  $R$

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha \exp(Z\rho^{-\alpha/\delta}), \\ \rho &= R/r_0, \quad \alpha = u/v, \quad \delta = \kappa/vr_0, \end{aligned} \quad (5)$$

которое затем исследовано. Здесь  $Z$  — температурный коэффициент скорости реакции;  $v$  — нормальная скорость распространения зоны реакции по неподвижной среде.

Ниже приближенно-аналитически и численно изучается устойчивость стационарного режима горения. В методическом отношении проводимое аналитическое исследование устойчивости опирается на использование того же приближения бесконечно узкой зоны реакции [4, 5], что и в стационарном случае. При этом для простоты предполагается нулевой порядок реакции и неограниченность реактора по  $r$ , граничное условие (4) заменяется условием ограниченности температуры при  $r \rightarrow \infty$ .

В соответствии с методом бесконечно узкой зоны реакции будем при исследовании нестационарной задачи (1), (2) считать зону реакции сосредоточенной, однако, в отличие от стационарного случая, ее положение зависит от времени и оно неоднородно по углу; уравнение для положения зоны реакции удобно записать так:

$$r = R + \xi(t, \varphi),$$

где  $\xi(t, \varphi)$  — смещение положения зоны реакции при нестационарном протекании процесса относительно стационарной зоны реакции. В областях прогрева ( $r_0 < r < R + \xi$ ) и продуктов реакции ( $R + \xi < r < \infty$ ) следует решать линейные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \approx \frac{r_0}{r} \frac{\partial T}{\partial r}, \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= -u \frac{r_0}{r} \frac{\partial a}{\partial r}, \end{aligned} \quad (6)$$

получаемые из (1), (2) отбрасыванием источника, решения которых должны сопрягаться при  $r = R + \xi$  по формулам

$$T|_{r=R+\xi-0} = T|_{r=R+\xi+0}, \quad (7)$$

$$\kappa \left\{ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R+\xi-0} - \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R+\xi+0} \right\} = q \left( \frac{ur_0}{R+\xi} - \frac{\partial \xi}{\partial t} \right), \quad (8)$$

$$\kappa \left\{ \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \Big|_{r=R+\xi-0} - \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \Big|_{r=R+\xi+0} \right\} = 2q \int_{T(t, R+\xi, \varphi)} \Phi(T) dT. \quad (9)$$

Условие (7) означает непрерывность нестационарной температуры в зоне реакции; (8) дает связь между разностью потоков тепла по обе стороны зоны реакции и нестационарной скоростью горения и получается, если рассмотреть уравнения (1), (2) в зоне реакции (т. е. перейти к координатам, связанным с зоной реакции и соответствующим пространственным и температурным масштабам), сохранить в них только старшие по ширине зоны реакции члены и проинтегрировать соответствующую линейную комбинацию уравнений; (9) находится домножением уравнения (1), рассмотренного в зоне реакции, на  $\partial T/\partial r$ , выделением старших членов и интегрированием по зоне реакции.

При исследовании устойчивости стационарного решения к малым возмущениям считаем, следуя [5], что малое смещение положения стационарной зоны реакции задается в виде

$$\xi(t, \varphi) = \varepsilon \exp(\omega t + ik\varphi), \quad (10)$$

где  $\varepsilon$  — малая амплитуда;  $\omega$  — искомая частота возмущений;  $k$  — волновое число (из условия периодичности по углу  $k$  должно быть целым,

неотрицательным; случай  $k=0$  отвечает одномерной неустойчивости,  $k=1, 2, 3, \dots$  — двумерной).

Решения нестационарных уравнений (1), (2) ищутся в виде суммы стационарного распределения и малых возмущений

$$\begin{aligned} T(t, r, \varphi) &= T_{\text{ст}}(r) + \tilde{T}(r) \exp(\omega t + ik\varphi), \\ a(t, r, \varphi) &= a_{\text{ст}}(r) + \tilde{a}(r) \exp(\omega t + ik\varphi). \end{aligned} \quad (11)$$

Условие полноты реагирования в зоне реакции позволяет считать, что  $\tilde{a} = 0$ . Подстановка (11) в (6) дает уравнение для  $T$

$$\kappa \frac{d^2 \tilde{T}}{dr^2} + \frac{\kappa - ur_0}{r} \frac{d\tilde{T}}{dr} - \left( \omega + \frac{\kappa}{r^2} k^2 \right) \tilde{T} = 0. \quad (12)$$

Если ввести безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} x = rur_0/\kappa R, \quad \Omega = \omega \kappa R^2 / u^2 r_0^2, \quad x_2 = ur_0/\kappa, \\ \tilde{T}(r) = q\Theta(x), \end{aligned} \quad (13)$$

то (12) может быть записано в виде

$$\Theta' - \frac{x_2 - 1}{x} \Theta' - \left( \Omega + \frac{x_2^2}{x^2} \right) \Theta = 0, \quad (14)$$

и в качестве двух его линейно-независимых решений можно выбрать [6]

$$\Theta_i(x) = x^{x_2/2} H_v^{(i)}(x \sqrt{-\Omega}) \quad (i = 1, 2),$$

где  $H_v^{(1)}, H_v^{(2)}$  — функции Ханкеля первого и второго рода, имеющие порядок

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{x_2^2 + 4k^2}. \quad (15)$$

Выбор в качестве линейно-независимых решений уравнения (14) именно функций Ханкеля объясняется тем, что одна из них стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , а другая — к бесконечности, тогда как для других пар линейно-независимых решений оба стремятся к бесконечности, что затрудняет работу.

Вопрос о том, какая из функций Ханкеля стремится к нулю, решается в зависимости от знака мнимой части ее аргумента [7]. Для определенности считаем, что  $\text{Im } \Omega > 0$ , а при извлечении корня выбираем ветвь, для которой  $\text{Im } \sqrt{-\Omega} < 0$ . Тогда к нулю стремится функция Ханкеля второго рода и решение  $\Theta$  (14) имеет в областях прогрева и продуктов реакции вид

$$\Theta(x) = \begin{cases} c_1 \Theta_1 + c_2 \Theta_2, & x_1 < x < x_2 + \xi ur_0/\kappa R, \\ c_3 \Theta_2, & x > x_2 + \xi ur_0/\kappa R. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь  $x_1 = ur_0^2/\kappa R$ ;  $c_1, c_2, c_3$  — неизвестные константы, связь между которыми дают условия срачивания в зоне реакции; наличие только одного из двух линейно-независимых решений в зоне продуктов связано с условием ограниченности температуры на бесконечности.

Подстановка (11) в (7) — (9) и линеаризация по  $\xi$  и  $\tilde{T}$  приводят к условиям сопряжения малых возмущений температуры при  $r = R$ :

$$\begin{aligned} \tilde{T}(R-0) - \tilde{T}(R+0) + T'_{\text{ст}}(R-0) \varepsilon &= 0, \\ \kappa [\tilde{T}'(R-0) - \tilde{T}'(R+0)] + \kappa T'_{\text{ст}}(R-0) \varepsilon &= -q\varepsilon(\omega + ur_0/R^2), \\ \kappa T'_{\text{ст}}(R-0) [T''_{\text{ст}}(R-0) \varepsilon + \tilde{T}'(R-0)] &= q\Phi(T_{\text{ст}}) \tilde{T}(R+0). \end{aligned} \quad (17)$$

Подстановка (13), (16) в (17) и учет граничных условий (3) дают систему однородных линейных уравнений относительно  $c_1, c_2, c_3$  и безраз-

мерной амплитуды фронта  $\tilde{\varepsilon} = x_2 \varepsilon / R$ :

$$\begin{aligned} c_1 \Theta_1(x_1) + c_2 \Theta_2(x_1) &= 0, \\ c_1 \Theta_1(x_2) + (c_2 - c_3) \Theta_2(x_2) + \tilde{\varepsilon} &= 0, \\ c_1 \Theta_1'(x_2) + (c_2 - c_3) \Theta_2'(x_2) + \tilde{\varepsilon} (1 + \Omega) &= 0, \\ c_1 \Theta_1'(x_2) + c_2 \Theta_2'(x_2) + (1 - x_2^{-1}) \tilde{\varepsilon} &= Z c_3 \Theta_2(x_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Входящая сюда комбинация параметров

$$Z = \frac{\kappa R^2}{u^2 r_0^2} \Phi(T_r) = \frac{q}{Z} \Phi(T_r) \int_0^{T_r} \Phi(T) dT$$

есть температурный коэффициент скорости реакции. Отметим, что  $Z$  может быть определен экспериментально как чувствительность скорости горения к изменению начальной температуры, что позволяет сравнивать результаты об устойчивости с экспериментальными данными даже в том случае, когда точный вид зависимости  $\Phi(T)$  неизвестен.

Условие разрешимости системы (18) — равенство нулю соответствующего определителя — приводит к дисперсионному соотношению

$$\begin{aligned} \frac{4i}{\pi x_2} \left( \Omega + \frac{1}{x_2} \right) &= \left\{ \left( Z - \frac{1}{2} \right) H_v^{(2)}(x_2 \sqrt{-\Omega}) - \sqrt{-\Omega} H_v^{(2)'}(x_2 \sqrt{-\Omega}) \right\} \times \\ &\times \left\{ \left( \Omega + \frac{1}{2} \right) H_v^{(1)}(x_2 \sqrt{-\Omega}) - \sqrt{-\Omega} H_v^{(1)'}(x_2 \sqrt{-\Omega}) - \right. \\ &\left. - \left[ \left( \Omega + \frac{1}{2} \right) H_v^{(2)}(x_2 \sqrt{-\Omega}) - \sqrt{-\Omega} H_v^{(2)'}(x_2 \sqrt{-\Omega}) \right] H_v^{(1)}(x_1 \sqrt{-\Omega}) / H_v^{(2)} \times \right. \\ &\left. \times (x_1 \sqrt{-\Omega}) \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

в которое в качестве параметров входят величины  $x_1, x_2$  — безразмерные внутренний радиус реактора и радиус фронта,  $Z$ , искомая частота возмущений  $\Omega$  и волновое число  $k$ . Соотношение (19) позволяет делать выводы об устойчивости фронта горения. Если параметры задачи таковы, что все  $\Omega$ , находимые из (19), имеют отрицательные действительные части, то стационарный фронт горения при этих значениях параметров устойчив. Если хотя бы одно  $\Omega$  имеет положительную действительную часть — стационарный фронт неустойчив. Границе устойчивости отвечает случай  $\text{Re } \Omega = 0$  при условии, что все остальные  $\Omega$ , находимые из (19), имеют отрицательные действительные части. При этом будем разделять случаи, когда на границе устойчивости  $\Omega = 0$  (монотонная потеря устойчивости) и чисто мнимое (колебательная потеря устойчивости).

Для нахождения границ монотонной потери устойчивости воспользуемся асимптотическим представлением функций Ханкеля [7]:

$$H_v^{(j)}(p) \sim \frac{(-1)^{j+1}}{\pi i} \Gamma(v) (p/2)^{-v}, \quad j = 1, 2, p \rightarrow 0, \quad (20)$$

где  $\Gamma(v)$  — гамма-функция. Подстановка (20) в (19) дает  $Z = 0$ . Как будет видно из дальнейшего, собственное значение, которое равно нулю при  $Z = 0$ , оказывается в левой полуплоскости комплексной плоскости при  $Z > 0$  и не влияет на устойчивость в этой области параметров.

Для нахождения границ периодической неустойчивости следует положить в (19)  $\Omega = i\psi$ . Соотношение (19) относительно  $\psi$  является уравнением в специальных функциях и достаточно сложно для изучения. Его исследование проводилось двумя способами: во-первых, с помощью асимптотических представлений функций Ханкеля оно сводилось к более простому выражению, которое могло быть затем аналитически исследовано; во-вторых, с помощью прямого численного решения исходного уравнения. Полученные двумя способами результаты затем сопоставлялись.

Если скорость  $u$  подачи реагента достаточно велика, то большими оказываются и безразмерный радиус фронта горения  $x_2$  и, следовательно,  $v$ . Поэтому можно воспользоваться равномерными асимптотическими разложениями функций Ханкеля и их производных при больших значениях порядка и аргумента [7]. Не приводя полностью асимптотические разложения, для написания которых необходимо также использовать асимптотики функций Эйри, ограничимся записью двух старших по  $1/v$  членов:

$$\begin{aligned} H_v^{(1)}(vp) &\sim G^{-1} \sqrt{\frac{2}{\pi v \gamma}} \left(1 - \frac{I_1}{v}\right), \\ H_v^{(2)}(vp) &\sim Gi \sqrt{\frac{2}{\pi v \gamma}} \left(1 + \frac{I_1}{v}\right), \\ \frac{p}{2} H_v^{(1)'}(vp) &\sim G^{-1} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi v}} \left(1 + \frac{I_2}{v}\right), \\ \frac{p}{2} H_v^{(2)'}(vp) &\sim Gi \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi v}} \left(-1 + \frac{I_2}{v}\right), \quad v \gg 1, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{5}{24\gamma^3} - \frac{1}{8\gamma}; \quad I_2 = \frac{7}{24\gamma^3} - \frac{3}{8\gamma}; \\ \gamma &= \sqrt{1 - p^2}; \quad G = \left(\frac{1 + v}{p}\right)^v \exp(-\gamma v). \end{aligned} \quad (22)$$

Отметим, что неявно входящая в дисперсионное соотношение величина  $k$  не идентична волновому числу в задаче о распространении зоны реакции по неподвижной среде. Действительно, если в задаче о распространении зоны реакции волновое число характеризует искривление фронта горения и равно количеству гармоник на отрезке фронта длиной  $2\lambda$ , то  $k$  связано с угловой переменной  $\varphi$  и равно количеству гармоник, укладывающихся на всем протяжении фронта, длина которого равна  $2\lambda x_2$ . Таким образом, для правильного сопоставления этих двух задач следует считать, что  $k = s x_2$  и тогда

$$v = x_2/2 \cdot \sqrt{1 + 4s^2}.$$

Полагая

$$p = 2\sqrt{-\Omega}/\sqrt{1 + 4s^2}$$

в (21), (22) и подставляя в (19), получим

$$\begin{aligned} 4\beta\Omega &= (2Z - 1 + \beta)(2\Omega + 1 - \beta) + F/v, \\ \beta &= \sqrt{1 + 4\Omega + 4s^2}, \quad F = 2\sqrt{1 + 4s^2}(-\beta + 2\Omega(\Omega + Z)/\beta^2). \end{aligned} \quad (23)$$

В (23) не входит безразмерный внутренний радиус реактора  $x_1$ . Формально это связано с тем, что содержащие его члены уравнения (19) экспоненциально малы по  $v$  при  $v \rightarrow \infty$ . Физически это означает, что когда фронт расположен далеко от входа в реактор, расстояние до входа не сказывается на поведении фронта. Можно также ожидать, что при больших радиусах фронта, когда кривизна фронта мала и не влияет существенно на устойчивость, результаты об устойчивости фронта горения должны совпадать с полученными при исследовании волны горения, распространяющейся по неподвижной среде [8]. Действительно, если в (23) принять  $v \rightarrow \infty$ , получится дисперсионное соотношение [8], причем граница устойчивости и частота на границе задаются формулами

$$\begin{aligned} Z &= \frac{5}{2} + \frac{\xi}{2} + \frac{1}{\xi}, \quad \psi^2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(1 + 2\xi), \\ \xi &= \sqrt{1 + 4s^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для одномерной устойчивости ( $s = 0$ ,  $\xi = 1$ ) имеем  $Z = 4$ ,  $\psi^2 = 3$ ; минимальное значение  $Z$  как функции  $s$  достигается при  $s = 0,5$  ( $x_2 = 2k$ ) и равно 3,91.

Учет двух старших по  $1/\nu$  членов позволяет выяснить поведение границ устойчивости при больших, но конечных  $\nu$  и проводится следующим образом. Подставим в функцию  $F$ , входящую в уравнение (23), величины  $Z$  и  $\Omega = i\psi$ , задаваемые (24); внесенные при этом ошибки будут порядка отбрасываемых членов  $\nu^{-2}$ . Выделяя в полученном уравнении вещественную и мнимую части и проводя несложные, но громоздкие вычисления, найдем с точностью до  $\nu^{-2}$  границу устойчивости и частоту на границе

$$Z = \frac{5}{2} + \frac{\xi}{2} + \frac{1}{\xi} - \frac{1}{2\nu\xi} \left\{ \left(1 - \frac{2}{\xi^2}\right) \frac{F_1 + F_2}{2(\xi + 2)} + F_2 \right\}, \quad (25)$$

$$\psi^2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)^2 (1 + 2\xi) - \frac{1}{4} (1 + \xi) (\xi^2 + 4\xi + 2) \frac{F_1 + F_2}{\nu\xi(\xi + 2)};$$

$$F_1 = (\xi + 1) (-4\xi^5 - 15\xi^4 - 15\xi^3 + 8\xi^2 + 14\xi + 4) (\xi^2 + 4\xi + 2)^{-2},$$

$$F_2 = \xi (3\xi^4 + 4\xi^3 - 15\xi^2 - 20\xi - 6) (\xi^2 + 4\xi + 2)^{-2}.$$

В частности, граница одномерной устойчивости ( $\xi = 1$  в (25)) задается как

$$Z = 4 + 0,52/x_2, \quad (26)$$

а минимум зависимости  $Z$  от  $x_2$  при достаточно больших  $k$  достигается при

$$x_2 = 2k - 0,23 \quad (27)$$

и равен

$$Z = 3,91 + 0,16/k. \quad (28)$$

Таким образом, при достаточно больших радиусах фронта режим стабилизированного горения оказывается более устойчивым относительно одномерных возмущений, чем распространение того же фронта по неподвижной среде (см. (26)).

При непосредственном численном анализе дисперсионного соотношения (19) в нем разделялись вещественная и мнимая части, затем из полученных двух уравнений исключали  $Z$  и численно находили  $\psi$ . Программа расчетов была организована таким образом, что функции Ханкеля вычислялись в процедуре путем суммирования рядов и точность счета контролировалась. Кроме того, как известно, функции Ханкеля полуполого порядка выражаются через элементарные функции, что использовалось для непосредственного решения дисперсионного соотношения и проверки точности численных расчетов.

На рис. 1 показаны границы одномерной устойчивости, полученные численным решением уравнения (19). Области устойчивости расположены под приведенными кривыми, т. е. при меньших значениях  $Z$ . Видно, что при  $x_2 \approx x_1$  значения  $Z$  на границе устойчивости велики, при росте  $x_2$  они уменьшаются (кривая имеет минимум), а затем быстро выходят на величины, предсказанные асимптотическим анализом (штриховая линия, показывающая результаты асимптотического анализа, при  $x_2 > 5$  неразличима в масштабе рисунка; отличие результатов асимптотического анализа от численного счета составляет для небольших  $x_1$  и  $x_2$  несколько десятых долей процента). Отметим, что полученные численные результаты по устойчивости могут быть представлены и в координатах других параметров, которые связаны с  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $Z$  соотношениями (5). На рис. 2 приведены границы устойчивости на плоскости параметров  $(\alpha, \rho)$  при различных значениях  $\delta$ . Области устойчивости отвечают значениям, расположенные под указанными кривыми.

На рис. 3 показаны границы одномерной и двумерной неустойчивости. Области устойчивости расположены под кривыми. При  $x_2 > 2,12$  наблюдается преимущественное развитие двумерной неустойчивости: кривые, отвечающие  $k = 1, 2, 3, \dots$  лежат ниже границ одномерной неустойчивости, что подтверждает результаты асимптотического анализа. Заметим, что этот эффект в рассматриваемой задаче более выражен, чем в задаче о распространении волны горения по неподвижной среде [8, 9].

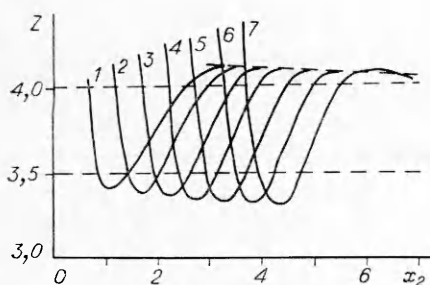


Рис. 1. Границы одномерной устойчивости стационарного фронта на плоскости параметров  $(x_2, Z)$  для различных значений  $x_1$ :

1 — 0,25, 2 — 0,75, 3 — 1,25, 4 — 1,75, 5 — 2,25, 6 — 2,75, 7 — 3,25.

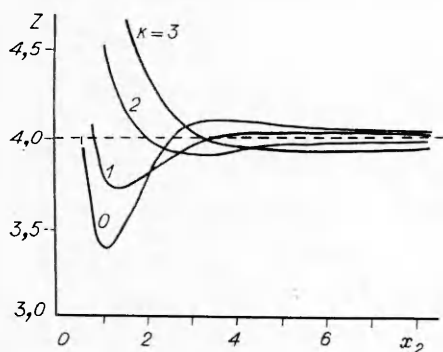


Рис. 3. Границы двумерной устойчивости стационарного фронта на плоскости параметров  $(x_2, Z)$  для различных значений  $k$  ( $x_1 = 0,25$ ).

При  $x_2 < 2,12$  увеличение  $Z$  от небольших значений приводит к одномерной потере устойчивости, при  $2,2 < x_2 < 2,8$  — к двумерной с  $k = 1$ , при  $2,8 < x_2 < 4,4$  — с  $k = 2$  и т. д. Отметим также неплохое численное совпадение полученных результатов с формулами (27), (28) уже при небольших  $k$ .

На основании линейного анализа можно предположить, что потеря устойчивости при увеличении  $Z$  для  $x_2 < 2,12$  приводит к установившемуся автоколебательному режиму, при котором фронт реакции, не будучи распределен по углу, колеблется относительно своего среднего значения, а в областях по  $x_2$ , где преобладает двумерная потеря устойчивости с волновым числом  $k$ , — к  $k$ -очаговому спиновому режиму, при котором  $k$  очагов повышенной температуры вращаются по углу с постоянной угловой скоростью. Эти предсказания должны быть проверены исследованием нелинейной устойчивости стационарного фронта, которое, однако, затруднено громоздкостью рассматриваемой задачи.

Наряду с приближенно-аналитическим исследованием устойчивости стационарных режимов работы цилиндрического реактора с внутренней подачей проводился численный анализ задачи (1) — (4). При этом рассматривалась одномерная постановка, т. е. считалось, что температура и концентрация не зависят от угла  $\varphi$ , функция тепловыделения задавалась в виде

$$\varphi(a) \Phi(T) = ak_0 \exp(-E/R_0T),$$

где  $k_0$  — предэкспоненциальный множитель;  $E$  — энергия активации;  $R_0$  — газовая постоянная. В качестве начальных условий выбирались непрерывные кусочно-линейные функции так, что в окрестности входа в реактор начальные распределения температуры и концентрации совпадали с  $T_n$  и 1 соответственно, а основная часть реактора была заполнена продуктами горения при температуре  $T_n + q$ .

Задача решалась с переменным шагом по пространству и постоянным шагом по времени. Величина шага по пространству определялась скоростью изменения температуры и концентрации и выбиралась так, чтобы в зоне реакции было не менее десяти точек. Шаг по времени выбирался так, чтобы поток вещества проходил зону реакции не менее

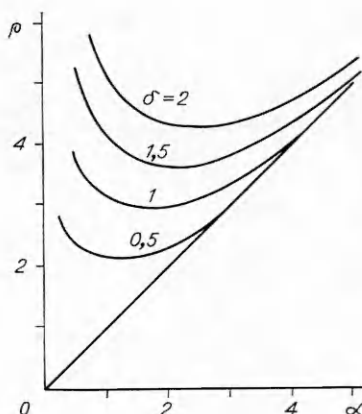


Рис. 2. Границы одномерной устойчивости стационарного фронта на плоскости параметров  $(\alpha, \rho)$  для различных значений  $\delta$ .

При  $x_2 < 2,12$  увеличение  $Z$  от небольших значений приводит к одномерной потере устойчивости, при  $2,2 < x_2 < 2,8$  — к двумерной с  $k = 1$ , при  $2,8 < x_2 < 4,4$  — с  $k = 2$  и т. д. Отметим также неплохое численное совпадение полученных результатов с формулами (27), (28) уже при небольших  $k$ .

На основании линейного анализа можно предположить, что потеря устойчивости при увеличении  $Z$  для  $x_2 < 2,12$  приводит к установившемуся автоколебательному режиму, при котором фронт реакции, не будучи распределен по углу, колеблется относительно своего среднего значения, а в областях по  $x_2$ , где преобладает двумерная потеря устойчивости с волновым числом  $k$ , — к  $k$ -очаговому спиновому режиму, при котором  $k$  очагов повышенной температуры вращаются по углу с постоянной угловой скоростью. Эти предсказания должны быть проверены исследованием нелинейной устойчивости стационарного фронта, которое, однако, затруднено громоздкостью рассматриваемой задачи.

Наряду с приближенно-аналитическим исследованием устойчивости стационарных режимов работы цилиндрического реактора с внутренней подачей проводился численный анализ задачи (1) — (4). При этом рассматривалась одномерная постановка, т. е. считалось, что температура и концентрация не зависят от угла  $\varphi$ , функция тепловыделения задавалась в виде

$$\varphi(a) \Phi(T) = ak_0 \exp(-E/R_0T),$$

где  $k_0$  — предэкспоненциальный множитель;  $E$  — энергия активации;  $R_0$  — газовая постоянная. В качестве начальных условий выбирались непрерывные кусочно-линейные функции так, что в окрестности входа в реактор начальные распределения температуры и концентрации совпадали с  $T_n$  и 1 соответственно, а основная часть реактора была заполнена продуктами горения при температуре  $T_n + q$ .

Задача решалась с переменным шагом по пространству и постоянным шагом по времени. Величина шага по пространству определялась скоростью изменения температуры и концентрации и выбиралась так, чтобы в зоне реакции было не менее десяти точек. Шаг по времени выбирался так, чтобы поток вещества проходил зону реакции не менее

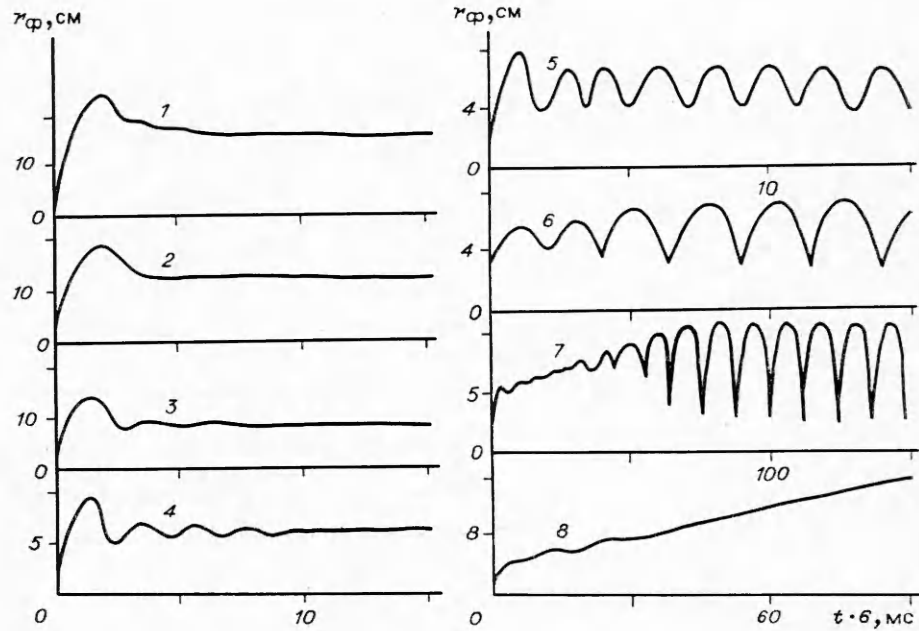


Рис. 4. Зависимость радиуса фронта  $r_f$  от времени для различных значений скорости подачи.

$u$ , м/с: 1 —  $3,33 \cdot 10^{-4}$ , 2 —  $2,5 \cdot 10^{-4}$ , 3 —  $1,67 \cdot 10^{-4}$ , 4 —  $1,06 \cdot 10^{-4}$ , 5 —  $8,33 \cdot 10^{-5}$ , 6 —  $4,17 \cdot 10^{-5}$ , 7 —  $1,93 \cdot 10^{-5}$ , 8 —  $9,67 \cdot 10^{-6}$ .

чем за десять шагов. Точность счета контролировалась уменьшением шагов.

Численный анализ проводился с целью изучения установившихся режимов работы реактора и выхода на них. При этом представляло интерес сравнение результатов численного и приближенно-аналитического исследования устойчивости стационарных режимов. Задавались характерные для распространения волны полимеризации метилметакрилата в плоском случае величины  $E = 8,4 \cdot 10^4$  Дж/моль,  $k_0 = 10^7$  с $^{-1}$ ,  $\kappa = 5 \cdot 10^{-7}$  м $^2$ /с,  $q = 170$  К [10],  $T_n = 300$  К,  $r_0 = 10^{-2}$  м,  $r_1 = 4 \cdot 10^{-1}$  м. В расчетах варьировалась скорость подачи  $u$  на входе в реактор.

На рис. 4 показана зависимость радиуса фронта от времени для различных значений скорости подачи. Под положением фронта понимается координата точки, в которой глубина превращения равна 0,5. При больших скоростях подачи температурный профиль, сохраняющий характерный для волны горения вид, выносится из реактора и устанавливается низкотемпературный режим с малой глубиной превращения.

Выбранным значениям параметров отвечает  $Z = 3,85$ , находящееся при достаточно больших скоростях подачи в области устойчивости (см. (26)), поэтому на рис. 4, 1—4 наблюдается выход на стационарные режимы. Уменьшение  $u$  соответствует приближению к области неустойчивости, и число колебаний, предшествующих выходу на стационар, увеличивается. При меньших значениях  $u$  стационарные режимы неустойчивы и на счете отмечаются установившиеся автоколебания, амплитуда и период которых возрастают при уменьшении  $u$ .

Дальнейшее снижение скорости подачи ведет к выходу на низкотемпературный режим (см. рис. 4, 8). Профиль температуры (рис. 5) имеет здесь качественно иной вид, чем в случае выноса фронта при больших скоростях: характерная для волны горения структура «размывается». Это можно связать с вырождением волны [11], поскольку введенная в этой работе величина  $\Gamma = R_0 T_r T_n / E (\Gamma_r - T_n)$ , ответственная за структуру волны, увеличивается с уменьшением  $u$ .

На рис. 6 сравниваются приближенно-аналитические и численные результаты, показаны зависимость  $r(u)$  и граница устойчивости, найден-



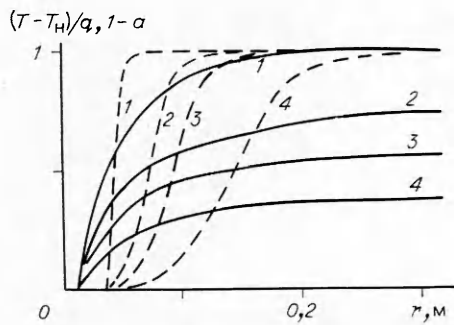


Рис. 5. Температурные (—) и концентрационные (---) профили в различные моменты времени в случае вырождения фронта горения;  $u = 9,67 \cdot 10^{-6}$  м/с.

$t, c:$  1 —  $6 \cdot 10^3$ , 2 —  $1,2 \cdot 10^5$ , 3 —  $2,4 \cdot 10^5$ , 4 —  $4,8 \cdot 10^5$ .

ные методом бесконечно узкой зоны реакции, а также численно определенные радиус фронта при устойчивом стационарном фронте, амплитуда колебаний в случае автоколебаний и область медленного выноса. Как видно из графика, полученные двумя способами результаты хорошо согласуются.

Проведенное исследование устойчивости стационарных режимов работы цилиндрического реактора с внутренней подачей позволяет высказать предположение об устойчивости стационарных режимов в случае сферического реактора. Аналогично можно предположить, что в широком диапазоне изменения параметров радиус внутренней сферы не оказывает существенного влияния на границы устойчивости и что при больших скоростях подачи, когда фронт имеет достаточно большой радиус, условия устойчивости близки к условиям устойчивости плоского фронта, распространяющегося по неподвижной среде.

Изучение стационарных режимов работы реакторов с внешней подачей [1] показало, что возможна неединственность фронтальных режимов. Один из них возникает, когда зона реакции расположена вблизи от входа в реактор и на температуру горения существенно влияют теплотери на входе. В других случаях фронт расположен далеко от входа и температура в зоне реакции близка к адиабатической. Простые физические соображения показывают, что эти режимы не могут быть устойчивы: при малом уменьшении радиуса фронта по сравнению с его стационарным значением фронт будет сноситься к центру реактора, поскольку скорость движения среды там выше. Аналогично при малом увеличении радиуса фронта он устремится к внешней поверхности реактора. Таким образом, для реакторов с внешней подачей устойчивыми могут быть только те стационарные режимы, для которых фронт расположен вблизи входа и изменение температуры горения оказывает стабилизирующее влияние.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаджанян А. С., Вольперт В. А., Вольперт Вл. А. и др. ФГВ, 1988, 24, 6.
2. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. ЖФХ, 1938, 12, 1, 100.
3. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Наука, 1967.
4. Зельдович А. Я., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др. Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
5. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Истратов А. Г. ПМТФ, 1962, 4, 21.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Физматгиз, 1961.
7. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.

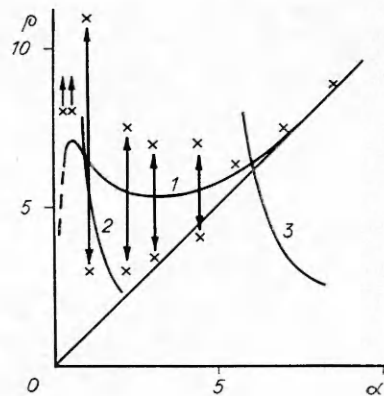


Рис. 6. Сравнение результатов приближенно-аналитического и численного исследования устойчивости стационарного фронта.

Стационарная зависимость (кривая 1) и границы устойчивости (2, 3) получены методом узкой зоны реакции. Точки — найденное численно положение зоны реакции, если стационарный фронт устойчив, амплитуда колебаний, если стационарный фронт неустойчив, а также вынос фронта.

8. Алдушин А. П., Каспарян С. Г. Докл. АН СССР, 1979, 241, 1, 67.
9. Махвиладзе Г. М., Новожилов Б. В. ПМТФ, 1971, 5, 51.
10. Манелис Г. Б., Смирнов Л. П. ФГВ, 1975, 11, 3, 354.
11. Алдушин А. П., Луговой В. Д., Мержанов А. Г. и др. Докл. АН СССР, 1978, 243, 6.

Поступила в редакцию 24/II 1987,  
после доработки — 28/IX 1987

УДК 536.46 — 534.222.2

## УСЛОВИЕ НАЧАЛА ВИБРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ ГАЗА В РАЗГЕРМЕТИЗИРОВАННОМ СОСУДЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

*В. А. Горев, В. В. Беляев, В. Н. Федотов*  
(Москва)

При горении газов в ограниченных сосудах и помещениях темп роста и величина максимального избыточного давления  $p$  сильно зависят от скорости горения смеси и площади отверстий, через которые истекают газы, а следовательно, сбрасывается давление. Один из наиболее интенсивных режимов горения — вибрационный, который ранее изучался в связи с устойчивостью работы двигателей. В работах [1—3] отмечен аномальный рост  $p$  при горении газов в разгерметизированных сосудах, причем указывается на присутствие акустических колебаний. В случае взаимодействия пламени с колеблющимся потоком для поддержания и усиления колебаний необходимо выполнение условий критерия Рэлея [4, 5].

Если до момента разгерметизации сосуда, т. е. в замкнутом сосуде, используемые рядом авторов модели хорошо описывают процесс роста давления при горении [6], то после вскрытия сбросного отверстия та же модель, хотя и учитывающая истечение газов, часто не в состоянии объяснить темп роста и падения величины  $p$ . Так, в [7] предполагается, что при разгерметизации сосуда горение интенсифицируется, причем коэффициент интенсификации (отношение скоростей горения после и до вскрытия сосуда) выбирается из условия совпадения максимальных избыточных давлений в эксперименте и по модели. Однако при таком описании динамики изменения величины  $p$  обнаруживается сильное расхождение во времени достижения  $p_{\max}$  после разгерметизации: при расчете пик давления наступает раньше, чем дает эксперимент.

Авторы работы [1] связывают ускорение горения газовых смесей в камере с отверстием с действием на фронт пламени волны разрежения, которая генерируется в момент смены истечения из сосуда холодной исходной смеси. В качестве второго механизма называется турбулизация пламени непосредственно у места истечения, вызванная разной скоростью движения горячих и холодных газов. Очевидно, эти механизмы должны проявиться в случае зажигания в центре сосуда раньше, чем при иницировании у стенки, противоположной отверстию. Однако осциллограммы давления, приведенные в [1], указывают на то, что рост величины  $p$  начинается при зажигании в плоскости, противоположной отверстию, через 0,45 с, а в случае зажигания в центре сосуда — через 0,6 с.

В работе [2] отмечается, что аномально быстрое увеличение  $p$  в сосуде (с размерами  $2 \times 2 \times 1,2$  м) сопровождалось акустическими колебаниями с частотой  $\sim 200$  Гц, что соответствует основной моде стоячей волны между стенками, расположенными на расстоянии 2 м. Изменив условия проведения опыта (боковые стенки, а также верх и низ камеры были покрыты стекловатой), авторы добились подавления колебаний, а вместе с этим и аномального роста давления.