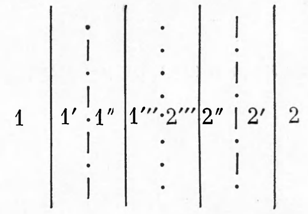
К ВОПРОСУ О РАСЩЕПЛЕНИИ НЕЭВОЛЮЦИОННЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

К. П. Черкасова

(Харьков)

Как показали А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский и Р. В. Половин [1], задача о малых возмущениях магнитогидродинамической ударной волны имеет единственное решение лишь в том случае, если ударная волна является эволюционной. Из этого можно сделать вывод о том, что неэволюционная ударная волна всегда расщепляется, а эволюционная ударная волна расщепиться не может. Прямое доказательство последнего утверждения было дано лишь в некоторых частных случаях [2, 3]. Распад произвольного разрыва, на котором не выполняются граничные условия, рассмотрен в работе [4].

Целью настоящей заметки является доказательство сформулированного выше утверждения при произвольном направлении магнитного поля и произвольной амплитуде ударной волны в случае, когда альфвеновская скорость значительно меньше скорости звука.



Схематически возможная картина расщепления здесь представляется справа.

Сплошными линиями изображены быстрые и медленные магнитозвуковые (ударные или автомодельные) волны, пунктиром — контактный разрыв, штрих-пунктирными линиями — альфвеновские разрывы. Индексы 1 и 2 соответственно относятся к областям впереди и позади исходной волны.

Уравнения для семи искомых амплитуд получаются из того условия, что сумма скачков каждой из семи магнитогидродинамических величин

$$(v_x,\ v_y,\ v_z,\ H_y,\ H_z,\ \rho,\ p)$$

должна равняться первоначальному скачку:

$$\sum_{i=1}^{7} \Delta_i H_y = H_{y2} - H_{y1}, \qquad \sum_{i=1}^{7} \Delta_i p = p_2 - p_1 \qquad \text{и т. д.} \tag{1}$$

Обозначения общеизвестны; ось x направлена от области *1* к области *2* перпендикулярно поверхности разрыва, поверхность разрыва покоится относительно выбранной системы координат. Отметим, что, не нарушая общности, можно считать $v_z \equiv 0$, $H_z \equiv 0$ до и после расщепления.

Скачки магнитогидродинамических величин на исходной волне определяются соотношениями [5]

$$\Delta\rho = \frac{U_{1y}{}^2}{2c_1{}^2}\rho_1(1-\alpha^2)\left\{1 + \frac{2U_{1x}{}^2 - (\gamma-1)(1-\alpha)U_{1y}^2}{2c_1{}^2} + \ldots\right\} \tag{2}$$

$$\Delta p = \frac{1}{2}U_{1y}^2\rho_1(1-\alpha^2)\left\{1 + \frac{U_{1x}{}^2}{c_1{}^2} + \ldots\right\} \tag{3}$$

$$\Delta v_x = -\frac{1}{2}\frac{U_{1x}U_{1y}{}^2}{c_1{}^2}(1-\alpha^2)\left\{1 + \frac{4U_{1x}^2 + U_{1y}^2[\alpha^2 - (3-2\gamma)\alpha - 2\gamma]}{4c_1{}^2} + \ldots\right\} \tag{4}$$

$$\Delta v_y = -U_{1y}(1-\alpha)\left\{1 + \alpha(1+\alpha)\frac{U_{1y}{}^2}{4c_1{}^2} + \right.$$

$$\left. + (1+\alpha)\frac{2\alpha U_{1x}{}^2U_{1y}{}^2 - {}^1/_4\, U_{1y}{}^4[3\alpha^3 - (4\gamma+1)\alpha^2 + 2(2\gamma-3)\alpha + 6]}{8c_1{}^4} + \ldots\right\} \tag{5}$$

$$\Delta H_y = -H_{1y}(1-\alpha) \tag{6}$$

Здесь введены обозначения

$$c_1{}^2 = \frac{\gamma p_1}{\rho_1}, \qquad \alpha \equiv \frac{H_{2y}}{H_{1y}}, \qquad \frac{U_1}{c_1} \ll 1, \qquad U_1 \equiv \frac{H_1}{\sqrt{4\pi\rho_1}}.$$

Отметим, что эволюционной ударной волне соответствует $\alpha > 0$, неэволюционной $\alpha < 0$.

Скачки на медленной волне, бегущей влево, определяются формулами (2)—(6), в которых следует заменить

$$\alpha \quad \text{на} \quad \alpha_- \equiv H_{1y}''/H_{1y}''', \qquad U_1 \quad \text{на} \quad U_1'', \quad \rho_1 \quad \text{на} \quad \rho_1'' \quad \text{и т. д.}$$

Скачки на медленной волне, бегущей вправо, определяются теми же соотношениями (2)—(6), только в (4), (5) нужно изменить справа знак на обратный и всюду заменить α на $\alpha_+ \equiv H_{2y}''/H_{2y}'''$, U_1 на U_2'', ρ_1 на ρ_2'' и т. д.

На альфвеновском разрыве, бегущем влево, выполняются соотношения:

$$\Delta_A{}^- H_y = H_{1y}'(\eta_- - 1), \qquad \Delta_A{}^- v_y = U_{1y}'(\eta_- - 1) \tag{7}$$

на альфвеновском разрыве, бегущем вправо

$$\Delta_A{}^+ H_y = H_{2y}'(\eta_+ - 1) \tag{8}$$
$$\Delta_A{}^+ v_y = -U_{2y}'(\eta_+ - 1)$$

где $\eta_\varepsilon = -1$ означает, что альфвеновский разрыв поворачивает магнитное поле на 180°, а $\eta_\varepsilon = +1$ соответствует отсутствию альфвеновского разрыва. Скачки остальных величин равны нулю.

На быстрых магнитозвуковых волнах все скачки выражаются через скачок плотности

$$\Delta_+{}^- H_y = H_{1y}\frac{\Delta_+{}^-\rho}{\rho_1} + \ldots \qquad \Delta_+{}^- v_x = -c_1\frac{\Delta_+{}^-\rho}{\rho_1} + \ldots \tag{9}$$
$$\Delta_+{}^- p = c_1^2\Delta_+{}^-\rho + \ldots \qquad \Delta_+{}^- v_y = \frac{U_{1x}U_{1y}}{c_1}\frac{\Delta_+{}^-\rho}{\rho_1} + \ldots$$

$$\Delta_+{}^+ H_y = H_{2y}\frac{\Delta_+{}^+\rho}{\rho_1} + \ldots = \alpha H_{1y}\frac{\Delta_+{}^+\rho}{\rho_1} + \ldots, \qquad \Delta_+{}^+ p = c_1^2\Delta_+{}^+\rho + \ldots \tag{10}$$
$$\Delta_+{}^+ v_x = c_1\frac{\Delta_+{}^+\rho}{\rho_1} + \ldots, \qquad \Delta_+{}^+ v_y = -\frac{U_{x1}U_{2y}}{c_1}\frac{\Delta_+{}^+\rho}{\rho_1} + \ldots = -\frac{\alpha U_{1x}U_{1y}}{c_1}\frac{\Delta_+{}^+\rho}{\rho_1} + \ldots$$

Нижний индекс минус относится к медленной волне, индекс плюс — к быстрой волне; индекс A — к альфвеновскому разрыву; верхний индекс минус относится к волне, бегущей влево, индекс плюс — к волне, бегущей вправо.

Таким образом, искомыми величинами будут семь неизвестных

$$\Delta_+{}^-\rho, \ \eta_-, \ \alpha_-, \ \Delta_k\rho, \ \alpha_+, \ \eta_+. \ \Delta_+^+\rho.$$

Будем искать $\Delta_+{}^\varepsilon\rho, \alpha_\varepsilon, \Delta_k\rho$ в виде разложения в ряд по степеням $\beta = U_1/c_1$

$$\frac{\Delta_+{}^\varepsilon\rho}{\rho_1} = \lambda_\varepsilon{}^{(0)} + \lambda_\varepsilon{}^{(1)}\beta + \ldots, \qquad \alpha_\varepsilon = \alpha_\varepsilon{}^{(0)} + \alpha_\varepsilon{}^{(1)}\beta + \ldots, \qquad \frac{\Delta_k\rho}{\rho_1} = k^{(0)} + k^{(1)}\beta + \ldots \tag{11}$$

Используя формулы (2)—(10), составляем уравнения (1) и, подставляя (11) в полученные уравнения, ищем последовательно $\lambda_\varepsilon^{(i)}$. $\alpha_\varepsilon^{(i)}$. $k^{(i)}$. Нулевое приближение дает систему уравнений

$$\lambda_-{}^{(0)} - \lambda_+{}^{(0)} = 0, \qquad \lambda_-{}^{(0)} + \lambda_+{}^{(0)} = 0, \qquad k^{(0)} = 0$$
$$\eta_-\alpha_-{}^{(0)}\lambda_-{}^{(0)} + \eta_+\alpha_+{}^{(0)}\lambda_+{}^{(0)} + \eta_-\alpha_-{}^{(0)} - \eta_+\alpha_+{}^{(0)}\alpha = 0 \tag{12}$$
$$\left[\frac{1}{2}\eta_-\alpha_-{}^{(0)} - \frac{1}{2}\right]\lambda_-{}^{(0)} + \left[\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\eta_+\alpha_+{}^{(0)}\alpha\right]\lambda_+{}^{(0)} + \quad \eta_-\alpha_-{}^{(0)} + \eta_+\alpha_+{}^{(0)}\alpha - 2\alpha = 0$$

Отсюда имеем

$$k^{(0)} = \lambda_+{}^{(0)} = \lambda_-{}^{(0)} = 0, \qquad \eta_- = \frac{\alpha}{\alpha_-{}^{(0)}}, \qquad \eta_+ = \frac{1}{\alpha_+{}^{(0)}} \tag{13}$$

Из того, что получающиеся медленные магнитозвуковые волны должны быть эволюционными, следует

$$\alpha_\varepsilon{}^{(0)} > 0$$

Но η_ε может принимать только два значения: +1 или —1, поэтому

$$\alpha_-^{(0)} = |\alpha|, \qquad \alpha_+^{(0)} = 1, \qquad \eta_+ = 1, \qquad \eta_- = \frac{\alpha}{|\alpha|} \tag{14}$$

Таким образом, в нулевом приближении неэволюционная ударная волна расщепляется на альфвеновский 180° — разрыв, бегущий в ту же сторону, что исходная волна, и следующую за ним медленную магнитозвуковую волну со скачком плотности, равным скачку плотности на исходной поверхности разрыва. Альфвеновский разрыв, бегущий в противоположную сторону, и все остальные волны отсутствуют. Эволюционная ударная волна не расщепляется.

Далее находим

$$\lambda_\varepsilon^{(1)} = \lambda_\varepsilon^{(2)} = \lambda_\varepsilon^{(3)} = \lambda_\varepsilon^{(4)} = 0, \qquad \alpha_\varepsilon^{(1)} = \alpha_\varepsilon^{(2)} = \alpha_\varepsilon^{(3)} = 0$$

$$k^{(1)} = k^{(2)} = k^{(3)} = 0, \qquad \lambda_\varepsilon^{(5)} = \frac{3-2\gamma}{16} \cos\theta \sin^4\theta \, (|\alpha| - \alpha) \tag{15}$$

$$\alpha_-^{(4)} = (1-\alpha^2)\frac{\sin^2\theta}{16}\left[2\cos^2\theta - \frac{3\alpha^2+4\gamma-6}{4}\sin^2\theta\right](\alpha - |\alpha|)$$

$$\alpha_+^{(4)} = \frac{\alpha_-^{(4)}}{|\alpha|}, \qquad k^{(4)} = \frac{1}{4}\sin^4\theta\,(\gamma-1)(1-\alpha^2)(\alpha-|\alpha|)$$

Из этих формул непосредственно следует, что эволюционная ударная волна в этом приближении не расщепляется. Из рассмотрения структуры уравнений легко заключить, что и дальнейшие приближения для эволюционной волны также приведут к тривиальному решению.

Что касается неэволюционной волны, то из формул (13)—(15) можно найти скачки плотности (амплитуды) на всех образующихся в результате расщепления волнах и контактном разрыве в первом неисчезающем приближении

$$\Delta_-^-\rho = \frac{U_{1y}^2}{2c_1^2}(1-\alpha^2)\rho_1, \qquad \Delta_-^+\rho = \frac{\alpha^2 U_1^2 U_{1y}^4}{8c_1^6}\left[2\cos^2\theta - \frac{3\alpha^2+4\gamma-6}{4}\sin^2\theta\right]\rho_1$$

$$\Delta_+^\varepsilon\rho = \frac{3-2\gamma}{8}\,\frac{U_{1x}U_{1y}^4}{c_1^5}|\alpha|\rho_1, \qquad \Delta_k\rho = -\frac{U_{1y}^4}{2c_1^4}(\gamma-1)(1-\alpha^2)|\alpha|\rho_1 \tag{16}$$

Таким образом, при расщеплении исходной волны получаются все возможные разрывы, кроме одного — альфвеновского, — идущего в сторону, противоположную движению исходной волны. Из формул (16) видно, что медленная магнитозвуковая волна, движущаяся в ту же сторону, что исходная, обязательно будет ударной, остальные магнитозвуковые волны могут быть ударными или автомодельными в зависимости от значений γ и угла θ между направлением магнитного поля и нормалью к поверхности разрыва.

Автор благодарит А. И. Ахиезера и Р. В. Половина за полезные советы и дискуссии.

Поступила 30 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 3.
2. Любарский Г. Я., Половин Р. В. О расщеплении неустойчивых ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1959, т. 36, вып. 4.
3. Половин Р. В., Черкасова К. П. О расщеплении неэволюционных ударных волн. ЖЭТФ, 1961, т. 41, вып. 1.
4. Гогосов В. В. Распад произвольного разрыва в магнитной гидродинамике ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
5. Bazer J., Ericson W. B., Hydromagnetic shocks. Astroph. J., 1959, vol. 129, № 3.