ПМТФ, № 4, 1965

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

В. В. Пухначев
(Новосибирск)

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости плоской стационарной детонационной волны в рамках следующей модели детонации [1]. В направлении оси z в области $z < 0$ течет идеальный совершенный газ с постоянной сверхзвуковой скоростью. В окрестности плоскости $z = 0$ находится сильный разрыв. За ним следует зона горения, в которой выполняется уравнение химической кинетики [2]

$$\frac{d\beta}{dt} = -L\beta^m p^{m-1} \exp \frac{-A}{\mu p \tau}$$

Здесь β — массовая концентрация непрореагировавших молекул, p — давление, τ — удельный объем; энергия активации A, средний молекулярный вес газа μ, порядок реакции m, коэффициент L — положительные постоянные, причем $m \geqslant 1$.

Химическая реакция заканчивается при $\beta = 0$. Детонация называется детонацией Чепмена—Жуге, если при $\beta = 0$ скорость потока равна местной скорости звука. В рассматриваемой модели существует одномерное стационарное решение уравнений гидродинамики и кинетики

$$w = w_* (1 - cx^{-1}), \qquad p = p_* (1 + \gamma c x^{-1}) \tag{0.1}$$

$$\tau = \tau_* (1 - cx^{-1}), \qquad \beta = x^{-2} \qquad (c = (M^2 - 1)(\gamma M^2 + 1)^{-1})$$

Здесь w — скорость потока, M — число Маха в области $z < 0$. Индексом $*$ отмечаются величины в точке Жуге. Функция $x = x(z)$ определена соотношением

$$\int\limits_{1/x}^{1} y^{1-2m} (1 - cy)(1 + \gamma cy)^{1-m} \exp [a (1 + \gamma cy)^{-1} (1 - cy)^{-1}]\, dy = \sigma z$$

$$\left(a = \frac{A}{\mu p_* \tau_*}, \quad \sigma = \frac{p_*^{\,m-1} L}{2 w_*}\right)$$

В работе исследуется устойчивость основного решения (0.1) системы уравнений гидродинамики и химической кинетики по отношению к малым возмущениям. Ниже предполагается, что газ течет в круглой цилиндрической трубе радиуса r_0. Течение рассматривается в цилиндрической системе координат с осью z на оси трубы. Считая, что малые возмущения течения, сосредоточенные в области $z > 0$, представляют суперпозицию цилиндрических гармоник, будем изучать поведение отдельной гармоники. В этом случае уравнение возмущенной поверхности разрыва имеет вид

$$z_0 = \varepsilon r_0 \exp (\lambda r_0^{-1} w_* t + in\varphi)\, J_n (\xi_{nk} r r_0^{-1})$$

Здесь λ — комплексный параметр, n — натуральное число, ξ_{nk} — k-й корень уравнения $dJ_n(x)/dx = 0$, $|\varepsilon| \ll 1$.

В результате линеаризации уравнений гидродинамики и кинетики вблизи основного решения и отделения переменных задача об отыскании малых возмущений сводится к следующей краевой задаче для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Найти совокупность функций $y_j(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$, удовлетворяющих в интервале $(1, \infty)$ системе уравнений

$$d\mathbf{y} / dx = [\lambda s A_1 (x) + \xi_{nk} s A_2 (x) + A_3 (x)] \mathbf{y} \tag{0.2}$$

и следующим краевым условиям.

(1) Условия сохранения массы, импульса, энергии и концентрации при переходе через разрыв, что в терминах функций $y_i(x)$ означает

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \equiv \lambda s \mathbf{a}_1 + \xi_{nk} s \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \quad \text{при } x = 1 \tag{0.3}$$

(2) Условия ограниченности возмущений вектора скорости, давления и плотности и обращения в нуль возмущения концентрации в точке Жуге, что означает

$$y_j(x) \quad (2 \leqslant j \leqslant 4), \qquad \sqrt{x}\, y_1 (x) \text{ ограничены}, \qquad x^{-1} y_5 (x) \to 0 \quad \text{при } x \to \infty \tag{0.4}$$

Здесь вектор $\mathbf{y}(x)$ имеет элементы

$$y_i(x) \quad (1 \leqslant i \leqslant 5); \; s = \exp a/\sigma r_0$$

Элементы матриц $A_j(x)$ и векторов $\mathbf{a}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ зависят от параметров γ, c, a, m, которые ниже считаются фиксированными. Выражения для $A_j(x)$, $\mathbf{a}_j$ опускаются из-за их громоздкости.

Значение λ, при котором задача (0.2) — (0.4) разрешима, называется собственным числом. Наличие среди множества собственных чисел хотя бы одного с $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ означает неустойчивость основного решения (0.1).

Исследование асимптотического поведения решений системы (0.2) при $x \to \infty$ приводит к следующему результату [1]:

при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ система (0.2) имеет четыре линейно независимых решения, удовлетворяющих условию (0.4);

при $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ система (0.2) имеет одно решение, удовлетворяющее условию (0.4).

Таким образом, характер краевой задачи (0.2) — (0.4) существенно различен в случаях $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ и $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. В последнем случае задача на собственные значения, вообще говоря, не имеет решения, так как при $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ условия (0.3), (0.4) для системы пятого порядка (0.2) эквивалентны восьми однородным краевым условиям.

Задача об отыскании собственных чисел с неотрицательной вещественной частью сводится к решению уравнения

$$F(\lambda) \equiv \det Y(\lambda, x_0) = 0 \tag{0.5}$$

Здесь первый столбец матрицы Y представляет значение при $x = x_0 \geqslant 1$ решения задачи Коши (0.3) для системы (0.2), а последние четыре столбца матрицы Y суть значения при $x = x_0$ четырех линейно независимых решений системы (0.2), удовлетворяющих условию (0.4).

1. Исследуем качественные свойства задачи на собственные значения (0.2) — (0.4). Обозначим через M_{nk} множество собственных чисел λ, соответствующих фиксированным значениям n, k, и положим $\rho = \xi_{nk} s$. Тогда имеют место следующие утверждения.

1°. Каждое из множеств M_{nk} ограничено. Диаметр d_{nk} множества M_{nk} допускает оценку

$$d_{nk} \leqslant c_0 \max(\xi_{nk}, s^{-1}) \qquad (c_0 = \mathrm{const})$$

2°. Каждое из множеств M_{nk} симметрично относительно оси $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$.

3°. Каждое из множеств M_{nk} замкнуто, дискретно и не имеет точек сгущения вне оси $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$.

4°. Множество M_{01} содержит точку $\lambda = 0$ (отметим, что $\xi_{01} = 0$).

5°. Если $c \geqslant {}^1/_2$, для любого $\alpha > 0$ существует такое $\rho_*(\alpha)$, что при $\rho \geqslant \rho_*(\alpha)$ в области B_α, определенной неравенствами

$$\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0, \qquad |\lambda / \xi_{nk} \pm {}^1/_2 i \sqrt{\gamma + 1}| \geqslant \alpha$$

собственных чисел нет.

6°. Если $c < {}^1/_2$, то существует такое значение ρ_0, что при $\rho \geqslant \rho_0$ в области $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ собственных чисел нет.

Ниже приводятся доказательства этих утверждений.

Утверждение 2° следует из того, что коэффициенты системы (0.2) и данные Коши (0.3) вещественны при вещественных λ.

Для доказательства утверждения 3° заметим, что каждая внутренняя точка полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ является внутренней точкой одной из областей $D_{\alpha/2}$, G_α, H_α, определенных соответственно формулами

$$2|\lambda| \geqslant \xi_{nk}\alpha > 0, \qquad 2|\lambda - \xi_{nk}| \geqslant \xi_{nk}\alpha, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$$

$$|\lambda - \xi_{nk}| \leqslant \xi_{nk}\alpha < \xi_{nk}, \qquad |\lambda| \leqslant \xi_{nk}\alpha, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$$

Как показано в работе [1], собственные числа $\lambda \in D_{\alpha/2}$ $(\lambda \in G_\alpha$, $\lambda \in H_\alpha)$ суть нули функции, аналитической внутри области $D_{\alpha/2}$ $(G_\alpha$, $H_\alpha)$ и непрерывной на ее границе. Случай $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ рассматривается аналогично.

Доказательство утверждения 4° основано на том, что система уравнений гидродинамики и кинетики допускает преобразование переноса по оси z. Подвергая этому преобразованию основное решение (0.1), находим, что совокупность функций

$$u' = v' \equiv 0, \qquad w' = -cw_*x^{-2}r_0dx\,/\,dz, \qquad p' = \gamma cp_*x^{-2}r_0dx\,/\,dz \qquad (1.1)$$
$$\tau' = -c\tau_*x^{-2}r_0dx\,/\,dz, \qquad \beta' = 2x^{-3}r_0dx\,/\,dz$$

представляет решение линеаризированной системы. Это решение удовлетворяет законам сохранения на поверхности возмущенного разрыва $z_0 = \varepsilon r_0$. Таким образом, решение (1.1) описывает возмущение, которое испытывает основное решение при малом сдвиге ударного фронта вдоль оси z. Собственная функция $\mathbf{y}(x)$ задачи (0.2) — (0.4), соответствующая решению (1.1), имеет следующие элементы:

$$y_1 = -\frac{cx^{-2m+{}^3/_2}\,b(1)}{(x-c)\,b(x)}, \qquad y_2 = y_3 \equiv 0$$
$$y_4 = \frac{c^2(\gamma+1)\,x^{-2m+1}\,b(1)}{(x-c)\,b(x)}, \qquad y_5 - \frac{2x^{-2m+2}\,b(1)}{(x-c)\,b(x)} \qquad (1.2)$$
$$\left(b(x) = \left(\frac{x+\gamma c}{x}\right)^{1-m} \exp\left\{\frac{ac\,[-(\gamma-1)\,x+\gamma c]}{(x+\gamma c)(x-c)}\right\}\right)$$

Легко видеть, что соответствующее (1.2) собственное значение принадлежит множеству M_{01}.

Доказательство утверждения 1° проведем одновременно с доказательством утверждений 5°, 6°.

Утверждения 5°, 6° относятся к исследованию вопроса об устойчивости детонации по отношению к мелкомасштабным возмущениям. Дело в том, что при фиксированных γ, c, a, m справедливо соотношение

$$\rho = \xi_{nk}s = l\xi_{nk}\delta = ld\xi_{nk}r_0^{-1}$$

Здесь d — эффективная ширина зоны химической реакции [2], а l — постоянная. Параметр $d\xi_{nk}r_0^{-1}$ имеет простой геометрический смысл: он характеризует отношение ширины зоны реакции к поперечному масштабу возмущений поверхности разрыва. Таким образом, отсутствие собственных чисел задачи (0.2) — (0.4) с $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ при $\rho \to \infty$ означает устойчивость основного решения (0.1) по отношению к мелкомасштабным возмущениям.

Переходим к доказательству утверждений 1°, 5°, 6°. Система уравнений (0.2) и условия (0.3) при $\xi_{nk} \neq 0$ могут быть записаны в виде

$$d\mathbf{y}\,/\,dx = \{\rho\,[\nu A_1(x) + A_2(x)] + A_3(x)\}\,\mathbf{y} \qquad (\nu = \lambda\xi_{nk}^{-1}) \qquad (1.3)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \equiv \rho\,(\nu\,\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3 \quad \text{при} \quad x = 1 \qquad (1.4)$$

В соответствии с этим задача об определении собственных чисел $\lambda\,(\xi_{nk}, s)$ может быть переформулирована как задача о нахождении собственных чисел $\nu\,(\rho)$. Определим области $B_{2,\alpha}$, $B_{3,\alpha}$ и $B_{1,\alpha}{}^\circ$ плоскости ν соотношениями

$$1 - c - \alpha \leqslant \operatorname{Re}\nu \leqslant 1 + \alpha, \qquad |\operatorname{Im}\nu| \leqslant \alpha \qquad (\text{область } B_{2,\alpha})$$
$$0 \leqslant \operatorname{Re}\nu \leqslant \alpha, \qquad \operatorname{Im}\nu\,| \leqslant {}^1/_2\sqrt{\gamma+1} + \alpha \qquad (\text{область } B_{3,\alpha})$$
$$\operatorname{Re}\nu \geqslant 0, \quad \nu \overline{\in} B_{2,\alpha} \cup B_{3,\alpha} \quad (0 < \alpha < {}^1/_2(1-c)) \qquad (\text{область } B_{1,\alpha}{}^\circ)$$

и обозначим через $B_{1,\alpha}$ замыкание области $B_{1,\alpha}{}^\circ$.

Ниже будет доказано, что для любого $\alpha > 0$ существует такое $\rho_1(\alpha)$, что при $\rho \geqslant \rho_1(\alpha)$ в области $B_{1,\alpha}$ собственных чисел нет. Доказательство отсутствия собственных чисел $\nu \in B_{2,\alpha}$ при больших значениях ρ

очень похоже на доказательство предыдущего утверждения. Исследование задачи (0.2) — (0.4) в случае $\rho \to \infty$, $\nu \in B_{3,\alpha}$ здесь опускается.

Итак, пусть $\nu \in B_{1,\alpha}$. Как показано в работе [1], существует неособое при $x \geqslant 1$, $\nu \in B_{1,\alpha}$ линейное преобразование

$$\mathbf{y} = M(x, \nu)\,\mathbf{u}$$

приводящее систему (0.2) к виду

$$d\mathbf{u} / dx = [\rho W(x, \nu) + P(x) + x^{-3/2} Q(x, \nu) + x^{-2} R(x, \nu)]\,\mathbf{u} \qquad (1.5)$$

Здесь элементы диагональных матриц $W(x,\nu)$, $P(x)$ определены так:

$$w_{11} = \nu b(x)\, x^{2m-3} \left\{ \frac{x}{c(\gamma+1)} [1 + \gamma c x^{-1} + v(x, \nu)] - 1 \right\}$$

$$w_{22} = \nu b(x)\, x^{2m-3} \left\{ \frac{x}{c(\gamma+1)} [1 + \gamma c x^{-1} - v(x, \nu)] - 1 \right\} \qquad (1.6)$$

$$w_{jj} = -\nu b(x)\, x^{2m-3} \qquad (3 \leqslant j \leqslant 5)$$

$$(v(x, \nu) = \{(1 + \gamma c x^{-1})(1 - c x^{-1})[1 + c(\gamma + 1) x^{-1} (1 - c x^{-1}) \nu^{-2}]\}^{1/2})$$

$$p_{11} = {}^1/_2 x, \quad p_{55} = -(2m - 1) / x, \quad p_{jj} = 0 \quad (2 \leqslant j \leqslant 4) \qquad (1.7)$$

а элементы $q_{ik}(x, \nu)$, $r_{ik}(x, \nu)$ $(1 \leqslant i, k \leqslant 5)$ матриц Q, R при любом $\nu \in B_{1,\alpha}$ раскладываются в ряды по степеням x^{-1}, $x \geqslant 1$ и при любом $x \geqslant 1$ аналитичны по ν внутри области $B_{1,\alpha}$ и непрерывны на ее границе. Среди функций $q_{ik}(x, \nu)$ отличны от нуля лишь q_{1i}, q_{i1} $(2 \leqslant i \leqslant 5)$; далее, $r_{1i}(x, \nu) = r_{i1}(x, \nu) = 0$ $(2 \leqslant i \leqslant 5)$.

В работе [1] показано, что если решение $\mathbf{y}(x, \nu)$ системы (0.2) удовлетворяет условию (0.4), то и решение $\mathbf{u}(x, \nu) = M^{-1}(x, \nu)\,\mathbf{y}(x, \nu)$ системы (1.5) удовлетворяет этому условию, и обратно. Отсюда следует, что исходная задача (0.2) — (0.4) эквивалентна следующей краевой задаче: найти вектор-функцию $\mathbf{u}(x, \nu)$, удовлетворяющую в интервале $(1, \infty)$ уравнению (1.5) и условиям (0.4) при $x \to \infty$ и

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \equiv [M(1, \nu)]^{-1} \mathbf{y}_0(\nu) \quad \text{при } x = 1 \qquad (1.8)$$

Вектор $\mathbf{u}_0$ допускает представление

$$\mathbf{u}_0 = \rho \mathbf{u}_1(\nu) + \mathbf{u}_2(\nu) \qquad (1.9)$$

причем элементы векторов $\nu^{-1}\mathbf{u}_1(\nu)$, $\mathbf{u}_2(\nu)$ регулярны в области $B_{1,\alpha}$ и непрерывны на ее границе; функция $\nu^{-1} u_{11}(\nu)$ не имеет нулей в области $B_{1,\alpha}$.

В соответствии с результатами [1], для любого $\nu \in B_{1,\alpha}$ существуют четыре линейно независимых решения $\mathbf{u}_k(x, \nu, \rho)$ $(2 \leqslant k \leqslant 5)$ уравнения (1.5), удовлетворяющих условию (0.4).

Рассмотрим матрицу $U(\nu, \rho)$, которая имеет своим первым столбцом вектор $\mathbf{u}_0(\nu, \rho)$ и своими последними столбцами векторы $\mathbf{u}_k(1, \nu, \rho)$ $(2 \leqslant k \leqslant 5)$. Легко видеть, что собственные числа $\nu \in B_{1,\alpha}$ задачи (1.5), (1.8), (0.4) суть корни уравнения

$$S(\nu, \rho) \equiv \det U(\nu, \rho) = 0 \qquad (1.10)$$

Будет показано, что при больших значениях $|\rho\nu|$ это уравнение не имеет решений в области $B_{1,\alpha}$.

Отметим, что для любых $x \in (1, \infty)$, $\nu \in B_{1,\alpha}$ выполнены неравенства

$$\operatorname{Re}[w_{11}(x, \nu) - w_{ii}(x, \nu)] \geqslant 0, \quad p_{11}(x) - p_{ii}(x) \geqslant 0 \quad (2 \leqslant i \leqslant 5) \qquad (1.11)$$

При помощи подстановки

$$u_i = \eta_{i1} \exp \left[\int_1^x (\rho w_{11} + p_{11})\, dx \right] \qquad (1 \leqslant i \leqslant 5)$$

сведем систему (1.5) к системе интегральных уравнений

$$\eta_{11}(x, \nu) = 1 - \int_x^\infty \sum_{k=1}^5 f_{1k}(t, \nu)\, \eta_{k1}(t, \nu)\, dt \tag{1.12}$$

$$\eta_{i1}(x, \nu) = \int_1^x \exp \{[\rho w_{ii}(\tau, \nu) + p_{ii}(\tau) -$$

$$- \rho w_{11}(\tau, \nu) - p_{11}(\tau)]\, d\tau\} \sum_{k=1}^5 f_{ik}(t, \nu)\, \eta_{k1}(t, \nu)\, dt \qquad (2 \leqslant i \leqslant 5)$$

$$(f_{ik} = t^{-3/2} q_{ik} + t^{-2} r_{ik})$$

Используя (1.11), можно показать, что для любого $\alpha > 0$ существует такое $N(\alpha)$, что при $x \in (1, \infty)$, $\nu \in B_{1,\alpha}$, $|\rho\nu| \geqslant N(\alpha)$ система (1.12) имеет решение вида

$$\eta_{i1}(x, \nu) = [\delta_{i1} + O(|\rho\nu|^{-1})] \exp \left[\int_1^x t^{-2} r_{11}(t, \nu)\, dt \right] \qquad (1 \leqslant i \leqslant 5)$$

при $|\rho\nu| \to \infty$. Этому решению соответствует решение системы (1.5), имеющее асимптотическое представление (1.13)

$$u_{i1}(x, \nu) = [\delta_{i1} + O(|\rho\nu^{-1}|)] \exp \left\{ \int_1^x [\rho w_{11}(t, \nu) + p_{11}(t) + t^{-2} r_{11}(t, \nu)] dt \right\}$$

для любых $x \in (1, \infty)$, $\nu \in B_{1,\alpha}$ и таких ρ, что $|\rho\nu| \geqslant N(\alpha)$ при $|\rho\nu| \to \infty$.

Произведем в системе (1.5) линейную подстановку $\mathbf{u} = L_0 \mathbf{v}$, где матрица L_0 имеет своим первым столбцом вектор $\mathbf{u}_1$ и своими последними столбцами векторы $\mathbf{e}_j$ $(2 \leqslant j \leqslant 5)$ ($\mathbf{e}_j$ — вектор со всеми нулевыми элементами, кроме j-го, равного единице). Система уравнений для функций v_i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ сводится к системе четвертого порядка

$$\frac{dv_i}{dx} = [\rho w_{ii}(x, \nu) + p_{ii}(x)]\, v_i + x^{-2} \sum_{k=2}^5 r_{ik}^\circ(x, \nu)\, v_k \qquad (2 \leqslant i \leqslant 5) \tag{1.14}$$

$$\left(r_{ik}^\circ(x, \nu) = r_{ik}(x, \nu) - q_{1k}(x, \nu) \frac{\sqrt{x}\, \eta_{i1}(x, \nu)}{\eta_{11}(x, \nu)} \qquad (2 \leqslant i, k \leqslant 5) \right)$$

и квадратуре

$$\frac{dv_1}{dx} = u_{11}^{-1} \sum_{k=2}^5 x^{-3/2} q_{ik} v_k$$

Отметим, что при любом $x \geqslant 1$ функции $r_{ik}^\circ(x, \nu)$ аналитичны по ν внутри области $B_{1,\alpha}$ и непрерывны на ее границе.

На основании (1.6), (1.7) для любых $x \geqslant 1$ и $\nu \in B_{1,\alpha}$ выполнены неравенства

$$\operatorname{Re} [\rho w_{ii}(x, \nu) + p_{ii}(x)] \leqslant 0 \qquad (2 \leqslant i \leqslant 5) \tag{1.15}$$

Пусть j $(2 \leqslant j \leqslant 5)$ фиксировано и $v_{ij}(x, \nu)$ $(2 \leqslant i \leqslant 5)$ есть решение задачи Коши

$$v_{ij} = \delta_{ij} \quad (2 \leqslant i \leqslant 5) \quad \text{при} \quad x = 1$$

для системы (1.14). На основании (1.15) заключаем, что функции $v_{ij}(x, \nu)$ $(2 \leqslant i \leqslant 5)$ равномерно ограничены при $x \in (1, \infty)$, $\nu \in B_{1,\alpha}$, $|\rho\nu| \geqslant N(\alpha)$. Решению v_{ij} $(2 \leqslant i \leqslant 5)$ системы (1.14) соответствует решение u_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ системы (1.5) вида (1.16)

$$u_{ij}(x, \nu) = v_{ij}(x, \nu) - u_{i1}(x, \nu) \int_x^\infty u_{11}^{-1}(t, \nu)\, t^{-3/2} \sum_{k=2}^5 q_{1k}(t, \nu)\, v_{kj}(t, \nu)\, dt$$

$$u_{1j}(x, \nu) = -u_{11}(x, \nu) \int_x^\infty u_{11}^{-1}(t, \nu)\, t^{-3/2} \sum_{k=2}^5 q_{1k}(t, \nu)\, v_{kj}(t, \nu)\, dt \quad (2 \leqslant i \leqslant 5)$$

Используя (1.13) и ограниченность $v_{ij}(x, \nu)$ при $x \in (1, \infty)$, $\nu \in B_{1,\alpha}$, $|\rho\nu| \geqslant N(\alpha)$, из (1.16) получаем (1.17)

$$u_{ij}(1, \nu, \rho) = \delta_{ij} + O(|\rho\nu|^{-2}), \quad u_{1j}(1, \nu, \rho) = O(|\rho\nu|^{-1}) \qquad (2 \leqslant i, j \leqslant 5)$$

для всех $\nu \in B_{1,\alpha}$, $|\rho\nu| \geqslant N(\alpha)$ при $|\rho\nu| \to \infty$.

В силу (1.9), (1.17) справедливо представление

$$S(\nu, \rho) = \rho u_{11}(\nu) + O(1) \tag{1.18}$$

для всех $\nu \in B_{1,\alpha}$, $|\rho\nu| \geqslant N(\alpha)$ при $|\rho\nu| \to \infty$. Напомним, что для всех $\nu \in B_{1,\alpha}$ $(\alpha > 0)$ выполнено неравенство $|\nu^{-1}u_{11}(\nu)| \geqslant k(\alpha) > 0$. Учитывая это, на основании (1.18) заключаем: для любого $\alpha > 0$ существует такое $\rho_1(\alpha)$, что при $\rho \geqslant \rho_1(\alpha)$ в области $B_{1,\alpha}$ собственных чисел нет.

Другим следствием (1.18) является утверждение: собственные числа $\lambda(\xi_{nk}, s)$ задачи (0.2) — (0.4) с $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ удовлетворяют неравенству

$$|\lambda| \leqslant c_0 \max(\xi_{nk}, s^{-1}) \tag{1.19}$$

где c_0 не зависит от ξ_{nk}, s.

Можно показать, что все собственные числа $\lambda(\xi_{nk}, s)$ удовлетворяют неравенству (1.19). Для доказательства достаточно рассмотреть случай $\operatorname{Re}\nu < 0$. Собственные числа ν $(\operatorname{Re}\nu < 0)$ определяются из условия коллинеарности векторов $\mathbf{u}_0(\nu)$ и $\mathbf{u}_1(1, \nu)$, где $\mathbf{u}_1(x, \nu)$ — единственное решение уравнения (1.5), удовлетворяющее условию (0.4). Асимптотическое представление этого решения при $x \in (1, \infty)$, $|\nu| \geqslant \nu_0 > 1$, $|\rho\nu| \to \infty$ имеет вид (1.16). Сравнивая (1.9) и (1.16), находим, что при больших значениях $|\rho\nu|$ и $\operatorname{Re}\nu \leqslant 0$, $|\nu| \geqslant \nu_0$ векторы $\mathbf{u}_0(\nu)$ и $\mathbf{u}_1(1, \nu)$ не могут быть коллинеарны. Тем самым заканчивается доказательство утверждения 1°.

2. Сопоставим результаты математического исследования устойчивости детонации с известными в теории спиновой детонации опытными фактами. Заранее оговоримся, что такое сопоставление следует проводить весьма осторожно, так как рассматриваемая здесь математическая постановка задачи линейна, а явление спиновой детонации — существенно нелинейное.

Из многочисленных наблюдений спиновой детонации (см., например, [3]) известно, что с увеличением радиуса трубы r_0 или начального давления смеси p_0 при фиксированных прочих параметрах «число голов» спина увеличивается. Эти факты являются следствием основной экспериментальной закономерности в явлении спиновой детонации: размер «ячейки» (характерный поперечный размер структуры во фронте детонационной волны) по порядку величины равен ширине зоны химической реакции.

В рассматриваемой модели этой закономерности естественно поставить в соответствие следующий факт: при больших значениях безразмерной энергии активации a (характерных для большинства детонирующих газовых смесей) плоская стационарная детонационная волна неустойчива по отношению к возмущениям, характерный поперечный размер которых имеет порядок ширины зоны реакции, т. е. $d\xi_{nk}/r_0 \sim 1$.

С увеличением r_0 или p_0 левая часть этого соотношения уменьшается. Чтобы оно оставалось справедливым (т. е. выполнялось бы условие неустойчивости), следует увеличить величину ξ_{nk} или, при k фиксированном, величину n — аналог числа голов спина.

Следует отметить, что автор не располагает строгим доказательством утверждения, что основное решение, описывающее плоскую стационарную детонационную волну, неустойчиво лишь по отношению к возмущениям, для которых $d\xi_{nk}/r_0 \sim 1$. Для полного ответа на этот вопрос следовало бы установить устойчивость основного решения в случае $d\xi_{nk}r_0^{-1} \to 0$. Для этого, в свою очередь, необходима (но, вообще говоря, недостаточна) устойчивость основного решения по отношению к одномерным возмущениям ($\xi_{nk} = 0$). Последний вопрос, по-видимому, может быть решен только численно.

Что касается количественного соответствия результатов линейной теории и экспериментальных данных, то маловероятно, чтобы такое соответствие могло иметь место в целом. Однако можно ожидать, что значение $|\,\mathrm{Im}\lambda_n\,|$ близко к величине безразмерной частоты n-головного спина ω_n. Действительно, расчеты показывают [1], что $|\,\mathrm{Im}\lambda_n\,| \sim \xi_{n1}$; с другой стороны, известно [3], что с хорошей точностью выполняется соотношение $\omega_n = \xi_{n1}$.

В заключение коснемся вопроса о возможности устойчивого распространения плоской стационарной детонационной волны.

Автором был проведен расчет на ЭВМ с целью обнаружения собственных чисел задачи (0.2) — (0.4) в области $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ в случае $a = 0$. Вычисления, проведенные при $\gamma = 1.2$, $c = 0.7925$, $a = 0$, $m = 1$ в широком диапазоне изменения $\xi_{n1}\delta$

$$0.35 \leqslant \xi_{n1}\delta \leqslant 4.2$$

показали, что в области $|\,\mathrm{Im}\lambda_n\,| \leqslant 3.5\xi_{n1}$; $\mathrm{Re}\,\lambda_n \leqslant 1.4\xi_{n1}$ собственных чисел λ_n не существует. (Здесь ширина зоны d определяется как расстояние, на котором $\beta = e^{-1}$.) Функция $|\,F(\lambda)\,|$ в указанной области возрастает с увеличением $\mathrm{Im}\lambda$ и быстро возрастает с увеличением $\mathrm{Re}\,\lambda$. Есть основания ожидать, что и вне указанной области собственных чисел λ_n с $\mathrm{Re}\,\lambda_n \geqslant 0$ не существует.

В дополнение к численному анализу задачи (0.2) — (0.4) в случае $a = 0$ удается доказать, что при $a = 0$, $\xi_{nk} > 0$ ($\xi_{nk} = 0$) не существует собственных чисел с $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$ ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$).

На основании сказанного, с известной осторожностью, можно говорить об устойчивости основного решения при $a = 0$. Из устойчивости при $a = 0$ следует устойчивость основного решения и при достаточно малых a. По-видимому, критическое значение a_*, определяющее границу устойчивости, меньше реальных значений a для известных детонирующих газовых смесей. Во всяком случае, представляет интерес задача об определении численного значения критического a_*. Однако решение этой задачи связано с большим объемом вычислений.

Другая потенциальная возможность существования устойчивой детонации — детонация в трубах малого радиуса.

Нами доказана устойчивость по линейному приближению основного решения в случае $d\xi_{nk}r_0^{-1} \to \infty$ для $c < 1/2$. Для $c \geqslant 1/2$ этот результат не является вполне строгим. У нас нет оснований считать, что значение $c = 1/2$ является физически исключительным. Можно ожидать, что и для $c \geqslant 1/2$ в случае $d\xi_{nk}r_0^{-1} \to \infty$ основное решение устойчиво. Отсюда, при наличии устойчивости по отношению к одномерным возмущениям ($\xi_{nk} = 0$), следует, что в трубах достаточно малого радиуса плоская стационарная детонационная волна устойчива по линейному приближению.

Было бы весьма интересно обнаружить этот факт экспериментально. Трудности, которые могут возникнуть при постановке соответствующего эксперимента, двух родов. Во-первых, в трубах с радиусом, меньшим некоторого критического, детонация вообще невозможна. Величина этого критического радиуса определяется факторами, которые в нашей модели не учитываются. Во-вторых, из устойчивости по линейному приближению, вообще говоря, не следует устойчивость по отношению к возмущениям с конечной амплитудой.

Автор выражает глубокую благодарность Л. В. Овсянникову, под руководством которого выполнялась эта работа.

Поступила 27 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухначев В. В. Об устойчивости детонации Чепмена—Жуге. ПМТФ, 1963, № 6.
2. Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. Теория детонации. Гостехиздат, 1955.
3. Войцеховский Б. В., Митрофанов В. В., Топчиян М. Е. Структура фронта детонации в газах. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1963.