

УДК (539.3+629.7.01) : 534.1

ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ПЛАСТИНУ, ЗАКРЕПЛЕННУЮ В ЖЕСТКОМ КАРКАСЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УПРУГИХ ПРОСЛОЕК И НАХОДЯЩУЮСЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЕГРАДАМИ

В. Н. Паймушин^{*,**}, Р. К. Газизуллин^{*}

* Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А. Н. Туполева, 420111 Казань, Россия

** Казанский федеральный университет, 420008 Казань, Россия
E-mails: vrpajmushin@mail.ru, gazizullin.rk@yandex.ru

Рассматривается задача о прохождении стационарной звуковой волны сквозь тонкую пластину бесконечных размеров, подкрепленную с двух сторон системой перекрестных абсолютно жестких ребер и находящуюся между двумя абсолютно жесткими преградами. Предполагается, что соединение пластины с ребрами, равномерно распределенными вдоль осей прямоугольной декартовой системы координат, осуществляется через мало-жесткие прослойки (основания) без проскальзывания. Динамическое деформирование пластины описывается линейризованными уравнениями классической теории пластин Кирхгофа — Лява, прослоек — двумерными и одномерными соотношениями, основанными на аппроксимациях перемещений точек покрытия и прослоек по толщине линейными функциями и учитывающими лишь деформации поперечного обжатия и поперечных сдвигов, а движение акустических сред — известными волновыми уравнениями. Решение задачи получено с использованием метода Ритца. На основе построенного решения проведено исследование влияния физико-механических и геометрических параметров рассматриваемой механической системы и частоты падающей на пластину звуковой волны на параметры звукоизоляции и напряженно-деформированного состояния пластины.

Ключевые слова: тонкая пластина, жесткий каркас, прослойка, ячейка периодичности, преграда, энергопоглощающее покрытие, модель Кирхгофа — Лява, трансверсально-мягкий материал, акустическая среда, частота колебаний, точное аналитическое решение.

DOI: 10.15372/PMTF20180421

Введение. При изготовлении конструкций различного назначения их герметичность при необходимости обеспечивается за счет использования специальных видов соединений элементов (клеевые слои, буферные слои из полимерных материалов типа лавсана, резины, герметика и т. д.). В таких конструкциях особую группу составляют изделия конструкционной оптики (иллюминаторы, обтекатели, остекления фонарей самолетов и др.), что обусловлено их функциональным назначением и физико-механическими свойствами материалов, из которых они изготовлены. При изготовлении изделий конструкционной оптики используются органические, кварцевые и силикатные стекла, которые могут разрушаться

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-19-00667).

под действием контактных напряжений (см. [1–3] и др.). Это обуславливает необходимость разработки особых узлов их соединения с другими элементами конструкций.

При решении задач механики для рассматриваемого класса элементов конструкций большое значение имеет постановка граничных условий, адекватно учитывающих способ их закрепления. Как показали исследования, результаты, получаемые при моделировании условий закрепления путем постановки традиционных граничных условий теории пластин и оболочек (жесткое защемление, шарнирное опирание и т. д.), существенно отличаются от экспериментальных данных. Поэтому были проведены систематические исследования задач о взаимодействии пластин и оболочек с тонкими слоями деформируемых оснований дискретной структуры (см. [4–7] и др.). Результаты этих исследований применяются при решении задач статической прочности элементов изделий конструкционной оптики летательных аппаратов [8]. Задачи о свободных и вынужденных колебаниях оболочек, находящихся на упругом основании, рассматривались в работах [9–12]. Однако исследование задач такого класса проводилось без учета влияния окружающей среды. Изучению условий закрепления оболочки в динамических задачах акустоупругости посвящены работы [13–17]. Заметим, что в этих задачах упругое основание представлялось преимущественно в виде пружин, расположенных вдоль контура пластины и имеющих комплексную жесткость.

Данная работа посвящена изучению задач динамической прочности элементов конструкций описанного выше класса. В ней продолжают исследования [18–21] в области акустоупругости пластин для случая маложестких опорных элементов (прослоек) малой ширины ($l \sim \varepsilon L$, $h_{(k)} \sim l$, $\varepsilon \ll 1$), приводится вариационная постановка задачи о прохождении моногармонической звуковой волны через прямоугольную пластину. Для пластины используется классическая модель Кирхгофа — Лява, для прослоек — модель трансверсально-мягкого основания. Поскольку опорные элементы, как правило, изготавливаются из материалов, имеющих большие значения параметров внутреннего трения (логарифмического декремента колебаний) по сравнению с широко используемыми металлическими или композитными конструкционными материалами, в работе основное внимание уделяется изучению влияния параметров внутреннего трения материала прослоек на параметр звукоизоляции пластины и на демпфирование ее вынужденных колебаний при моногармоническом акустическом воздействии.

1. Постановка задачи. Рассматривается пластина (рис. 1) бесконечной протяженности, имеющая толщину t и подкреплённая системой абсолютно жестких опорных ребер, расположенных на обеих поверхностях пластины. Предполагается, что соединение пластины с ребрами, равномерно распределёнными вдоль осей прямоугольной декартовой системы координат, осуществляется через маложесткие прослойки (основания) без проскальзывания. В пластине выделена ячейка периодичности ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$), для которой сформулирована задача о взаимодействии пластины с окружающими ее акустическими средами, для контура ячейки сформулирована задача о взаимодействии пластины с деформируемыми прослойками из трансверсально-мягкого материала. Будем считать, что между ребрами и пластиной находятся прослойки из маложесткого материала, имеющие прямоугольное поперечное сечение высотой h_0 и шириной Δ , а на расстояниях $z = -l_1$ и $z = l_2$ от пластины расположены преграды. Одна из этих преград (нижняя на рис. 1) является абсолютно жесткой и совершает в направлении оси z гармонические колебания с круговой частотой ω и амплитудой перемещений \tilde{U}_* , другая преграда (верхняя на рис. 1), также являющаяся абсолютно жесткой и неподвижной, имеет энергопоглощающее маложесткое деформируемое покрытие толщиной h_p . Будем считать, что у такого покрытия граничная плоскость $z = l_2 + h_p$ неподвижна, а точки граничной плоскости $z = l_2$ за счет деформаций прослойки имеют перемещения $V^p = V^p(x, y, \tau)$, $W^p = W^p(x, y, \tau)$.

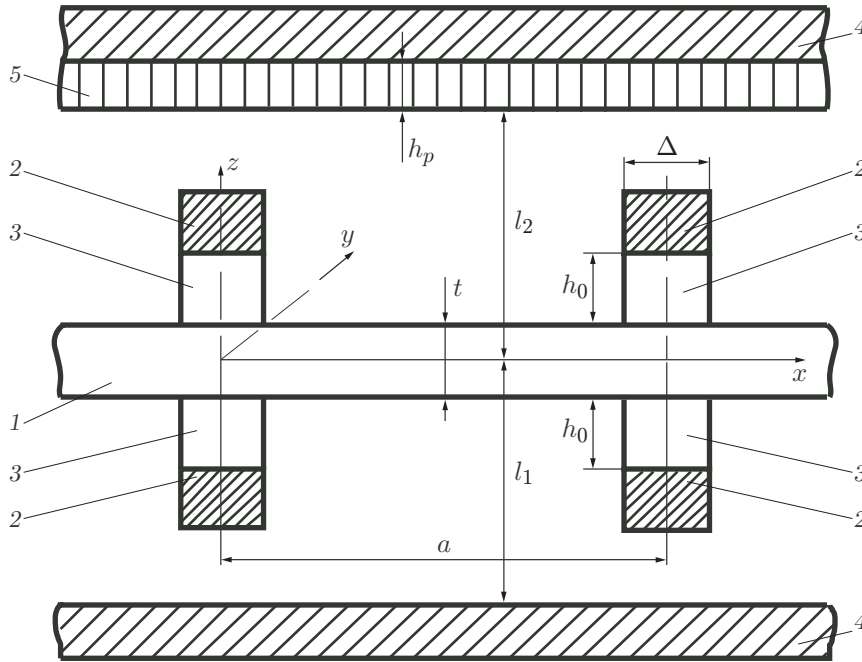


Рис. 1. Схема подкрепленной пластины:

1 — пластина, 2 — жесткое ребро, 3 — маложесткая прослойка, 4 — жесткая преграда, 5 — энергопоглощающее покрытие

Пусть пространства V_1 и V_2 между пластиной и преградами заполнены акустическими средами, имеющими плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 . Тогда за счет гармонических колебаний преграды $z = -l_1$ в пространствах V_1 и V_2 формируются звуковые волны, описываемые волновыми уравнениями относительно потенциалов скоростей $\Phi_k(x, y, z)$:

$$\Phi_{k,xx} + \Phi_{k,yy} + \Phi_{k,zz} - \ddot{\Phi}_k/c_k^2 = 0, \quad k = 1, 2. \quad (1.1)$$

Здесь точки над функциями обозначают производные по времени τ ; нижние индексы после запятой — частные производные по координатам x, y, z .

Компоненты вектора скорости движения среды v_x^k, v_y^k, v_z^k и приращения давлений p_k в средах V_1, V_2 определяются через потенциалы скоростей Φ_k зависимостями

$$v_x^k = \Phi_{k,x}, \quad v_y^k = \Phi_{k,y}, \quad v_z^k = \Phi_{k,z}; \quad (1.2)$$

$$p_k = -\rho_k \dot{\Phi}_k. \quad (1.3)$$

Предположим, что материал пластины является ортотропным, имеющим в системе координат (x, y) упругие характеристики $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21} = E_2\nu_{12}/E_1$, а зависимости между компонентами напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ задаются в соответствии с моделью Томпсона — Кельвина — Фойгта:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_1^*(\varepsilon_x + \nu_{21}\varepsilon_y), & \sigma_y &= E_2^*(\varepsilon_y + \nu_{12}\varepsilon_x), & \tau_{xy} &= G_{12}^*\gamma_{xy}, \\ E_1^* &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(1 + \frac{\delta_1}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau}\right), & E_2^* &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(1 + \frac{\delta_2}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau}\right), \\ G_{12}^* &= G_{12} \left(1 + \frac{\delta_{12}}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau}\right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\delta_1, \delta_2, \delta_{12}$ — логарифмические декременты колебаний при осевых деформациях $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и сдвиговой деформации γ_{xy} .

Для определения напряженно-деформированного состояния пластины примем классическую модель Кирхгофа — Лява, в соответствии с которой перемещения и деформации некоторой точки M с координатами x, y, z при среднем изгибе определяются выражениями [22]

$$U = u - zw_{,x}, \quad V = v - zw_{,y}, \quad W = w, \quad -t/2 \leq z \leq t/2; \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_x = u_{,x} + w_{,x}^2/2 - zw_{,xx}, \quad \varepsilon_y = v_{,y} + w_{,y}^2/2 - zw_{,yy}, \quad (1.6)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} - 2zw_{,xy}, \quad -t/2 \leq z \leq t/2.$$

При формировании в пространстве V_2 излучаемых пластиной акустических волн под действием давления $p_2^+ = p_2|_{z=l_2}$ маложесткое покрытие второй преграды динамически деформируется. Будем считать, что основными напряжениями в нем являются нормальное напряжение σ_z^p и касательные напряжения τ_{xz}^p, τ_{yz}^p , связанные с соответствующими компонентами деформаций $\varepsilon_z^p, \gamma_{xz}^p, \gamma_{yz}^p$ соотношениями упругости

$$\sigma_z^p = E_z^p \left(1 + \frac{\delta_z^p}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \varepsilon_z^p, \quad \tau_{xz}^p = G_p \left(1 + \frac{\delta_\gamma^p}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \gamma_{xz}^p, \quad \tau_{yz}^p = G_p \left(1 + \frac{\delta_\gamma^p}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \gamma_{yz}^p \quad (1.7)$$

($E_z^p, G_p, \delta_z^p, \delta_\gamma^p$ — упругие и демпфирующие характеристики материала покрытия соответственно), аналогичными соотношениям (1.4). Считая, что $h_p \ll a, h_p \ll b$, для компонент перемещений покрытия примем аппроксимации [20, 21]

$$u_p = \left(1 - \frac{z - l_2}{h_c}\right) U^p, \quad v_p = \left(1 - \frac{z - l_2}{h_c}\right) V^p, \quad w_p = \left(1 - \frac{z - l_2}{h_c}\right) W^p, \quad (1.8)$$

позволяющие с необходимой степенью точности описывать деформации $\varepsilon_z^p, \gamma_{xz}^p, \gamma_{yz}^p$. Подставляя (1.8) в соотношения Коши, получаем зависимости

$$\gamma_{xz}^p = \left(1 - \frac{z - l_2}{h_c}\right) W_{,x}^p - \frac{U^p}{h_c}, \quad \gamma_{yz}^p = \left(1 - \frac{z - l_2}{h_c}\right) W_{,y}^p - \frac{V^p}{h_c}, \quad \varepsilon_z^c = -\frac{W^p}{h_c}. \quad (1.9)$$

При использовании соотношений (1.7)–(1.9) в случае действия на прослойку поперечной нагрузки $p_2^+ = p_2|_{z=l_2}$ можно получить систему трех дифференциальных уравнений движения покрытия следующего вида [20, 21]:

$$\begin{aligned} G_p \left(1 + \frac{\delta_\gamma^p}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left(\frac{U^p}{h_p} - \frac{W_{,x}^p}{2}\right) + \frac{\rho_p h_p}{3} \dot{U}^p &= 0, \\ G_p \left(1 + \frac{\delta_\gamma^p}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left(\frac{V^p}{h_p} - \frac{W_{,y}^p}{2}\right) + \frac{\rho_p h_p}{3} \dot{V}^p &= 0, \\ \frac{E_z^p}{h_p} \left(1 + \frac{\delta_z^p}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) W^p + \frac{\rho_p h_p}{3} \ddot{W}^p - \\ - G_p \left(1 + \frac{\delta_\gamma^p}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left(\frac{h_p}{3} (W_{,xx}^p + W_{,yy}^p) - \frac{1}{2} (U_{,x}^p + V_{,y}^p)\right) - p_2^+ &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

(ρ_p — плотность материала покрытия).

В силу $\Delta \ll a, \Delta \ll b$ предполагаем, что перемещения в прослойках опорных элементов, обозначенные через $U_{(k)}^{(0,b)}, V_{(k)}^{(0,a)}, W_{(k)}^{(0,b)}, W_{(k)}^{(0,a)}$, являются постоянными по ширине их поперечных сечений и их допустимо определять выражениями, аналогичными (1.9), в приближении

$$\begin{aligned} U_{(k)}^{0,b}(x, z_{(k)}) &= \left(\frac{1}{2} \pm \frac{z_{(k)}}{h_0}\right) \left(u^{(0,b)} \pm \frac{t}{2} w_{,x}^{(0,b)}\right), \quad W_{(k)}^{(0,b)} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{z_{(k)}}{h_0}\right) w^{(0,b)}, \\ &-h_0/2 \leq z_{(k)} \leq h_0/2; \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$V_{(k)}^{(0,a)}(y, z_{(k)}) = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{z_{(k)}}{h_0}\right) \left(v^{(0,a)} \pm \frac{t}{2} w_{,y}^{(0,a)}\right), \quad W_{(k)}^{(0,a)} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{z_{(k)}}{h_0}\right) w^{(0,a)}. \quad (1.12)$$

В (1.11) функции $U_{(k)}^{(0)}$, $W_{(k)}^{(0)}$ и $U_{(k)}^{(b)}$, $W_{(k)}^{(b)}$ соответствуют смещениям точек оснований, расположенных вдоль оси x , при $y = 0$ и $y = b$. В (1.12) функции $V_{(k)}^{(0)}$, $W_{(k)}^{(0)}$ и $V_{(k)}^{(a)}$, $W_{(k)}^{(a)}$ соответствуют смещениям точек оснований, расположенных вдоль оси y , при $x = 0$ и $x = a$. В соотношениях (1.11), (1.12) индексы $k = 1$ и $k = 2$ соответствуют точкам, расположенным ниже и выше пластины; верхние знаки “+” соответствуют нижним основаниям ($k = 1$), нижние знаки “-” — верхним основаниям ($k = 2$),

$$u^{(0,b)} = u|_{y=0,b}, \quad v^{(0,a)} = v|_{x=0,a}, \quad w^{(0,b)} = w|_{y=0,a}, \quad w^{(0,a)} = w|_{x=0,a}. \quad (1.13)$$

Представления (1.11), (1.12) удовлетворяют кинематическим условиям сопряжения пластины с основаниями лишь в точках на линиях $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$. Такое приближение, как правило, используется в теории пластин и оболочек, подкрепленных стержнями, в случае их дискретного расположения.

Поскольку в данной работе предполагается, что материал прослоек опорных элементов является трансверсально-мягким [23], основными напряжениями в них будем считать напряжения $\sigma_{z_{(k)}}^{(0,b)}$, $\tau_{xz_{(k)}}^{(0,b)}$, $\sigma_{z_{(k)}}^{(0,a)}$, $\tau_{yz_{(k)}}^{(0,a)}$, связанные с соответствующими компонентами деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z_{(1)}}^{(0,b)} &= \frac{w^{(0,b)}}{h_0}, & \varepsilon_{z_{(2)}}^{(0,b)} &= -\frac{w^{(0,b)}}{h_0}, & \varepsilon_{z_{(1)}}^{(0,a)} &= \frac{w^{(0,a)}}{h_0}, & \varepsilon_{z_{(2)}}^{(0,a)} &= -\frac{w^{(0,a)}}{h_0}, \\ \gamma_{xz_{(1)}}^{(0,b)} &= \frac{u^{(0,b)}}{h_0} + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2h_0} + \frac{z_{(1)}}{h_0}\right) w_{,x}^{(0,b)}, & \gamma_{xz_{(2)}}^{(0,b)} &= -\frac{u^{(0,b)}}{h_0} + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2h_0} - \frac{z_{(2)}}{h_0}\right) w_{,x}^{(0,b)}, \\ \gamma_{yz_{(1)}}^{(0,a)} &= \frac{v^{(0,a)}}{h_0} + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2h_0} + \frac{z_{(1)}}{h_0}\right) w_{,y}^{(0,a)}, & \gamma_{yz_{(2)}}^{(0,a)} &= -\frac{v^{(0,a)}}{h_0} + \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2h_0} - \frac{z_{(2)}}{h_0}\right) w_{,y}^{(0,a)}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

соотношениями вида

$$\begin{aligned} \sigma_{z_{(k)}}^{(0,b)} &= E_0 \left(1 + \frac{\delta_\sigma}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau}\right) \varepsilon_{z_{(k)}}^{(0,b)}, & \sigma_{z_{(k)}}^{(0,a)} &= E_0 \left(1 + \frac{\delta_\sigma}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau}\right) \varepsilon_{z_{(k)}}^{(0,a)}, \\ \tau_{xz_{(k)}}^{(0,b)} &= G_0 \left(1 + \frac{\delta_\tau}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau}\right) \gamma_{xz_{(k)}}^{(0,b)}, & \tau_{yz_{(k)}}^{(0,a)} &= G_0 \left(1 + \frac{\delta_\tau}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau}\right) \gamma_{yz_{(k)}}^{(0,a)}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь E_0 , G_0 , δ_σ , δ_τ — характеристики упругости и внутреннего трения (логарифмические декременты колебаний (ЛДК)) материала прослоек опорных элементов.

Будем полагать, что пластина в угловых точках $x = 0$, $y = 0$; $x = 0$, $y = b$; $x = a$, $y = 0$ и $x = a$, $y = b$ опирается на стержни (H — длина стержня, F_c — площадь поперечного сечения, E_c — модуль упругости материала, δ_c — ЛДК). Перемещения точек крепления стержней с пластиной в направлении оси z , одинаковые для всех стержней, обозначим через W_0^c , причем в силу совместности перемещений угловых точек пластины и подкрепляющих опорных стержней выполняются равенства

$$W^c|_{z=0} = W_0^c = w|_{x=0,y=0} = w|_{x=0,y=b} = w|_{x=a,y=0} = w|_{x=a,y=b},$$

а при $z = -H$ имеет место равенство $W^c|_{z=-H} = 0$. Тогда возникающие в опорных стержнях осевые деформации ε_c и напряжения σ_c связаны зависимостями

$$\varepsilon_c = \frac{W_0^c}{H}, \quad \sigma_c = E_c^* \frac{W_0^c}{H}, \quad E_c^* = E_c \left(1 + \frac{\delta_c}{\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\tau}\right). \quad (1.16)$$

Ниже показано, что учет угловых опорных стержней обусловлен необходимостью регуляризации решения сформулированной задачи, определяемого методом Ритца на основе тригонометрических базисных функций.

Используя соотношения (1.4)–(1.6), (1.16), для вычисления вариации потенциальной энергии деформации рассматриваемой механической системы получаем выражение

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_0^a \int_0^b [D_{11}^*(w_{,xx} + \nu_{21}w_{,yy}) \delta w_{,xx} + D_{22}^*(w_{,yy} + \nu_{21}w_{,xx}) \delta w_{,yy} + 4D_{12}^*w_{,xy} \delta w_{,xy} + \\ & + N_{xx}(\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) + N_{yy}(\delta v_{,y} + w_{,y} \delta w_{,y}) + \\ & + N_{xy}(\delta u_{,y} + \delta v_{,x} + w_{,x} \delta w_{,y} + w_{,y} \delta w_{,x})] dx dy + \delta\Pi_0 + 4F_c E_c^* \frac{W_0^c}{H} \delta W_0^c. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь $\delta\Pi_0$ — вариация потенциальной энергии деформаций опорных оснований:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_0 = & \sum_{k=1}^2 \left[\int_0^a \int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\tau_{xz}^{(0)} \delta\gamma_{xz}^{(0)} + \tau_{xz}^{(b)} \delta\gamma_{xz}^{(b)} + \sigma_{z(k)}^{(0)} \delta\varepsilon_{z(k)}^{(0)} + \sigma_{z(k)}^{(b)} \delta\varepsilon_{z(k)}^{(b)}) \Delta dz_{(k)} dx + \right. \\ & \left. + \int_0^b \int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\tau_{yz}^{(0)} \delta\gamma_{yz}^{(0)} + \tau_{yz}^{(a)} \delta\gamma_{yz}^{(a)} + \sigma_{z(k)}^{(0)} \delta\varepsilon_{z(k)}^{(0)} + \sigma_{z(k)}^{(a)} \delta\varepsilon_{z(k)}^{(a)}) \Delta dz_{(k)} dy \right], \end{aligned} \quad (1.18)$$

N_{xx}, N_{xy} — мембранные усилия в пластине:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= B_{11}^*[u_{,x} + w_{,x}^2/2 + \nu_{21}(v_{,y} + w_{,y}^2/2)], & x \rightleftharpoons y, \quad u \rightleftharpoons v, \\ N_{xy} &= B_{12}^*(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}), \end{aligned}$$

$$B_{11}^* = E_1^*t, \quad B_{22}^* = E_2^*t, \quad B_{12}^* = G_{12}^*t, \quad D_{ij}^* = B_{ij}^*t^2/12, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2.$$

Решения рассматриваемой задачи на контурных линиях пластины $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ должны удовлетворять граничным условиям

$$x = 0, x = a: \quad w_{,x} = 0, \quad y = 0, y = b: \quad w_{,y} = 0, \quad (1.19)$$

а также условиям кинематического сопряжения

$$\dot{w} = v_z^1|_{z=0}, \quad \dot{w} = v_z^2|_{z=0}; \quad (1.20)$$

$$\dot{W} = v_z^2|_{z=l_2}, \quad \dot{U}_* = v_z^1|_{z=-l_1} \quad (1.21)$$

во всех точках срединной плоскости пластины (условия (1.20)), граничных точках энергопоглощающего покрытия и первой (нижней на рис. 1) преграды (условия (1.21)).

Если считать, что плоскости $x = 0, x = a, y = 0, y = b$, ограничивающие заполненные акустическими средами пространства V_1, V_2 , являются неподвижными и абсолютно жесткими, то потенциалы скоростей Φ_k должны удовлетворять граничным условиям

$$x = 0, x = a: \quad \Phi_{k,x} = 0, \quad y = 0, y = b: \quad \Phi_{k,y} = 0. \quad (1.22)$$

Далее ограничимся исследованием динамических процессов деформирования, включающих два этапа. На первом этапе, являющемся статическим, в пластине формируется в общем случае неоднородное по координатам x, y напряженно-деформированное состояние, которое характеризуется только мембранными усилиями в пластине $N_{xx}^0, N_{yy}^0, N_{xy}^0$. На втором этапе в окрестности напряженно-деформированного состояния, сформированного

на первом этапе, происходит циклическое деформирование, при этом возникают изгибные напряжения, деформации и перемещения, не оказывающие существенного влияния на усилия, созданные на первом этапе. В силу принятых предположений, считая опорные стержни и прослойки опорных элементов безынерционными и учитывая условия (1.19), (1.22), при исследовании динамического деформирования на втором этапе с использованием соотношений (1.17), (1.14), (1.15), (1.18) для определения функции w можно получить вариационное уравнение в линейном приближении

$$\begin{aligned}
& 4 \frac{F_c E_c^*}{H} W_0^c \delta W_0^c + 2 \int_0^a \left(\frac{2E_0^*}{h_0} w \delta w + G_0^* \left(t + \frac{2}{3} h_0 + \frac{t^2}{2h_0} \right) w_{,x} \delta w_{,x} \right) \Delta dx \Big|_{y=0} + \\
& + 2 \int_0^b \left(\frac{2E_0^*}{h_0} w \delta w + G_0^* \left(t + \frac{2}{3} h_0 + \frac{t^2}{2h_0} \right) w_{,y} \delta w_{,y} \right) \Delta dy \Big|_{x=0} + \\
& + \int_0^a \int_0^b \left[D_{11}^* (w_{,xx} + \nu_{21} w_{,yy}) \delta w_{,xx} + D_{22}^* (w_{,yy} + \nu_{12} w_{,xx}) \delta w_{,yy} + \right. \\
& + 4D_{12}^* w_{,xy} \delta w_{,xy} + N_{xx}^0 w_{,x} \delta w_{,x} + N_{yy}^0 w_{,y} \delta w_{,y} + N_{xy}^0 (w_{,x} \delta w_{,y} + w_{,y} \delta w_{,x}) - \\
& \left. - q \delta w + \rho_n t w_{,\tau\tau} \delta w \right] dx dy = 0, \quad (1.23)
\end{aligned}$$

где ρ_n — плотность материала пластины; $q = (p_1 - p_2) \Big|_{z=0}$ — действующая на пластину аэрогидродинамическая нагрузка.

2. Построение решения сформулированной задачи. В силу принятого выше предположения для функции $U_*(\tau)$ используется представление вида [24]

$$U_* = \tilde{U}_* e^{i\omega\tau}, \quad (2.1)$$

в соответствии с которым решение уравнения (1.23), удовлетворяющее условиям (1.19), записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
w = e^{i\omega\tau} \sum_{m,n=0,2}^{M,N} \tilde{w}_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(\lambda_n y) = e^{i\omega\tau} \left(\tilde{w}_{00} + \sum_{m=2,4,\dots}^M \tilde{w}_{m0} \cos(\lambda_m x) + \right. \\
\left. + \sum_{n=2,4,\dots}^N \tilde{w}_{0n} \cos(\lambda_n y) + \sum_{m=2}^M \sum_{n=2}^N \tilde{w}_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(\lambda_n y) \right), \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\lambda_m = m\pi/a, \quad \lambda_n = n\pi/b, \quad m = 2, 4, \dots, M, \quad n = 2, 4, \dots, N.$$

Тогда решения уравнений (1.1) в силу (1.20) имеют вид

$$\begin{aligned}
\Phi_k = e^{i\omega\tau} \left(\tilde{\Phi}_k^{00}(z) + \sum_{m=2}^M \tilde{\Phi}_k^{m0}(z) \cos(\lambda_m x) + \sum_{n=2}^N \tilde{\Phi}_k^{0n}(z) \cos(\lambda_n y) + \right. \\
\left. + \sum_{m=2}^M \sum_{n=2}^N \tilde{\Phi}_k^{mn}(z) \cos(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) \right) \quad (2.3)
\end{aligned}$$

и удовлетворяют условиям (1.22).

В свою очередь, в силу (1.21), (2.1)–(2.3) решения уравнений (1.10) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} U^p &= e^{i\omega\tau} \left(\sum_{m=2}^M \tilde{U}_{m0} \sin(\lambda_m x) + \sum_{m=2}^M \sum_{n=2}^N \tilde{U}_{mn} \sin(\lambda_m x) \cos(\lambda_n y) \right), \\ V^p &= e^{i\omega\tau} \left(\sum_{n=2}^N \tilde{V}_{0n} \sin(\lambda_n y) + \sum_{m=2}^M \sum_{n=2}^N \tilde{V}_{mn} \cos(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$W^p = e^{i\omega\tau} \left(\tilde{W}_{00} + \sum_{m=2}^M \tilde{W}_{m0} \cos(\lambda_m x) + \sum_{n=2}^N \tilde{W}_{0n} \cos(\lambda_n y) + \sum_{m=2}^M \sum_{n=2}^N \tilde{W}_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(\lambda_n y) \right).$$

Подставляя представления (2.3) в (1.1), получаем уравнения относительно одномерных функций $\tilde{\Phi}_k^{mn}(z)$:

$$\tilde{\Phi}_{k,zz}^{mn} - (\varkappa_k^{mn})^2 \tilde{\Phi}_k^{mn} = 0. \quad (2.5)$$

Здесь

$$(\varkappa_k^{mn})^2 = \lambda_m^2 + \lambda_n^2 - k_k^2, \quad k_k = \omega/c_k, \quad (2.6)$$

причем

$$\begin{aligned} \varkappa_{k(1,2)}^{00} &= \pm i k_k = \pm i \omega/c_k, \quad m = 0, \quad n = 0, \\ \varkappa_{k(1,2)}^{m0} &= \pm \sqrt{\lambda_m^2 - \omega^2/c_k^2}, \quad m = 2, 4, \dots, M, \quad n = 0, \\ \varkappa_{k(1,2)}^{0n} &= \pm \sqrt{\lambda_n^2 - \omega^2/c_k^2}, \quad m = 0, \quad n = 2, 4, \dots, N, \\ \varkappa_{k(1,2)}^{mn} &= \pm \sqrt{\lambda_m^2 + \lambda_n^2 - \omega^2/c_k^2}, \quad m = 2, 4, \dots, M, \quad n = 2, 4, \dots, N. \end{aligned}$$

С использованием представлений (2.1)–(2.4), решений уравнений (2.5), соотношений (1.2), (1.3), учитывая уравнения (1.10), условия (1.20), (1.21) и результаты работ [20, 21], получаем зависимости

$$\tilde{W}_{00} = d_{00} \tilde{w}_{00}, \quad \tilde{W}_{m0} = d_{m0} \tilde{w}_{m0}, \quad \tilde{W}_{0n} = d_{0n} \tilde{w}_{0n}, \quad \tilde{W}_{mn} = d_{mn} \tilde{w}_{mn}$$

и выражение

$$\begin{aligned} q &= -i\omega \left(\rho_1 f_1^{00} \tilde{U}_* - \tilde{q}_{00} \tilde{w}_{00} + \sum_{m=2}^M \tilde{q}_{m0} \tilde{w}_{m0} \cos(\lambda_m x) + \sum_{n=2}^N \tilde{q}_{0n} \tilde{w}_{0n} \cos(\lambda_n y) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=2}^M \sum_{n=2}^N \tilde{q}_{mn} \tilde{w}_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(\lambda_n y) \right) e^{i\omega\tau}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{00} &= \rho_1 f_1^{00} + \rho_2 (f_2^{00} d_{00} - \tilde{f}_2^{00}), & \tilde{q}_{m0} &= \rho_1 \tilde{f}_1^{m0} - \rho_2 (f_2^{m0} d_{m0} - \tilde{f}_2^{m0}), \\ \tilde{q}_{0n} &= \rho_1 \tilde{f}_1^{0n} - \rho_2 (f_2^{0n} d_{0n} - \tilde{f}_2^{0n}), & \tilde{q}_{mn} &= \rho_1 \tilde{f}_1^{mn} - \rho_2 (f_2^{mn} d_{mn} - \tilde{f}_2^{mn}), \\ d_{00} &= i\rho_2 \omega \tilde{F}_2^{00} / \left(i\rho_2 \omega F_2^{00} + \frac{\tilde{E}_z^p}{h_p} - \frac{\rho_p h_p \omega^2}{3} \right), \end{aligned}$$

$$d_{m0} = i\rho_2\omega\tilde{F}_2^{m0} / \left(i\rho_2\omega F_2^{m0} + \frac{\tilde{G}_p h_p \lambda_m^2}{3} + \frac{\tilde{E}_z^p}{h_p} - \frac{\rho_p h_p \omega^2}{3} - \frac{3h_p \tilde{G}_p^2 \lambda_m^2}{4(3\tilde{G}_p - \rho_p h_p^2 \omega^2)} \right),$$

$$m = 2, 4, \dots, M,$$

$$d_{0n} = i\rho_2\omega\tilde{F}_2^{0n} / \left(i\rho_2\omega F_2^{0n} + \frac{\tilde{G}_p h_p \lambda_n^2}{3} + \frac{\tilde{E}_z^p}{h_p} - \frac{\rho_p h_p \omega^2}{3} - \frac{3h_p \tilde{G}_p^2 \lambda_n^2}{4(3\tilde{G}_p - \rho_p h_p^2 \omega^2)} \right),$$

$$n = 2, 4, \dots, N,$$

$$d_{mn} = i\rho_2\omega\tilde{F}_2^{mn} / \left(i\rho_2\omega F_2^{mn} + \frac{\tilde{G}_p h_p (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)}{3} + \frac{\tilde{E}_z^p}{h_p} - \frac{\rho_p h_p \omega^2}{3} - \frac{3h_p \tilde{G}_p^2 (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)}{4(3\tilde{G}_p - \rho_p h_p^2 \omega^2)} \right),$$

$$m = 2, 4, \dots, M, \quad n = 2, 4, \dots, N,$$

$$f_1^{00} = 2a_1^{00}, \quad \tilde{f}_1^{00} = \tilde{a}_1^{00} + \tilde{b}_1^{00}, \quad \tilde{f}_1^{mn} = \tilde{a}_1^{mn} + \tilde{b}_1^{mn},$$

$$f_2^{00} = 2a_2^{00}, \quad \tilde{f}_2^{00} = \tilde{a}_2^{00} + \tilde{b}_2^{00}, \quad f_2^{mn} = 2a_2^{mn}, \quad \tilde{f}_2^{mn} = \tilde{a}_2^{mn} + \tilde{b}_2^{mn},$$

$$F_2^{00} = a_2^{00} e^{ik_2 l_2} + b_2^{00} e^{-ik_2 l_2}, \quad \tilde{F}_2^{00} = \tilde{a}_2^{00} e^{ik_2 l_2} + \tilde{b}_2^{00} e^{-ik_2 l_2},$$

$$F_2^{mn} = a_2^{mn} e^{\varkappa_2^{mn} l_2} + b_2^{mn} e^{-\varkappa_2^{mn} l_2}, \quad \tilde{F}_2^{mn} = \tilde{a}_2^{mn} e^{\varkappa_2^{mn} l_2} + \tilde{b}_2^{mn} e^{-\varkappa_2^{mn} l_2},$$

$$a_1^{00} = b_1^{00} = \frac{c_1}{e^{-ik_1 l_1} - e^{ik_1 l_1}}, \quad \tilde{a}_1^{00} = \frac{c_1 e^{ik_1 l_1}}{e^{-ik_1 l_1} - e^{ik_1 l_1}}, \quad \tilde{b}_1^{00} = \frac{c_1 e^{-ik_1 l_1}}{e^{-ik_1 l_1} - e^{ik_1 l_1}},$$

$$\tilde{a}_1^{mn} = \frac{i\omega e^{2\varkappa_1^{mn} l_1}}{\varkappa_1^{mn} (e^{2\varkappa_1^{mn} l_1} - 1)}, \quad \tilde{b}_1^{mn} = \frac{i\omega}{\varkappa_1^{mn} (e^{2\varkappa_1^{mn} l_1} - 1)},$$

$$a_2^{00} = b_2^{00} = \frac{c_2}{e^{ik_2 l_2} - e^{-ik_2 l_2}}, \quad \tilde{a}_2^{00} = \frac{c_2 e^{-ik_2 l_2}}{e^{ik_2 l_2} - e^{-ik_2 l_2}}, \quad \tilde{b}_2^{00} = \frac{c_2 e^{ik_2 l_2}}{e^{ik_2 l_2} - e^{-ik_2 l_2}},$$

$$a_2^{mn} = b_2^{mn} = \frac{i\omega}{\varkappa_2^{mn} (e^{\varkappa_2^{mn} l_2} - e^{-\varkappa_2^{mn} l_2})}, \quad \tilde{a}_2^{mn} = \frac{i\omega e^{-\varkappa_2^{mn} l_2}}{\varkappa_2^{mn} (e^{\varkappa_2^{mn} l_2} - e^{-\varkappa_2^{mn} l_2})},$$

$$\tilde{b}_2^{mn} = \frac{i\omega e^{\varkappa_2^{mn} l_2}}{\varkappa_2^{mn} (e^{\varkappa_2^{mn} l_2} - e^{-\varkappa_2^{mn} l_2})}.$$

Подставляя соотношения (2.2), (2.7) в вариационное уравнение (1.23) и решая его методом Ритца с использованием базисных функций

$$\psi_{00} = 1, \quad \psi_{s0} = \cos(\lambda_s x), \quad \psi_{0q} = \cos(\lambda_q y), \quad \psi_{sq} = \cos(\lambda_s x) \cos(\lambda_q y),$$

$$\lambda_s = s\pi/a, \quad \lambda_q = q\pi/b, \quad s = 2, 4, \dots, M, \quad q = 2, 4, \dots, N,$$

получаем систему алгебраических уравнений вида

$$a_{00}\tilde{w}_{00} + r_c X + r_{0a} \sum_{n=2}^N \tilde{w}_{0n} + r_{0b} \sum_{m=2}^M \tilde{w}_{m0} = -f_0,$$

$$r_c(\tilde{w}_{00} + X) + a_{m0}\tilde{w}_{m0} + b_{m0} \sum_{n=2}^N \tilde{w}_{mn} = 0, \quad m = 2, 4, \dots, M,$$

$$r_c(\tilde{w}_{00} + X) + a_{0n}\tilde{w}_{n0} + b_{0n} \sum_{m=2}^M \tilde{w}_{mn} = 0, \quad n = 2, 4, \dots, N, \tag{2.8}$$

$$r_c(\tilde{w}_{00} + X) + a_{mn}\tilde{w}_{mn} + b_{m0}\left(\tilde{w}_{m0} + \sum_{n=2}^N \tilde{w}_{mn}\right) + b_{0n}\left(\tilde{w}_{0n} + \sum_{m=2}^M \tilde{w}_{mn}\right) = 0,$$

$$m = 2, 4, \dots, M, \quad n = 2, 4, \dots, N,$$

где

$$r_c = \frac{4F_c\tilde{E}_c}{H}, \quad X = \sum_{m=2}^M \tilde{w}_{m0} + \sum_{n=2}^N \tilde{w}_{0n} + \sum_{m=2}^M \sum_{n=2}^N \tilde{w}_{mn},$$

$$r_{0a} = \frac{4\Delta a\tilde{E}_0}{h_0}, \quad r_{0b} = \frac{4\Delta b\tilde{E}_0}{h_0}, \quad \tilde{f}_0 = i\omega\rho_1 ab f_1^{00} \tilde{U}_*,$$

$$b_{m0} = \Delta a \left[\frac{2\tilde{E}_0}{h_0} + \tilde{G}_0 \left(t + \frac{2}{3}h_0 + \frac{t^2}{2h_0} \right) \lambda_m^2 \right], \quad b_{0n} = \Delta b \left[\frac{2E_0}{h_0} + \tilde{G}_0 \left(t + \frac{2}{3}h_0 + \frac{t^2}{2h_0} \right) \lambda_n^2 \right],$$

$$a_{00} = 4F_c\tilde{E}_c/H + 4\Delta\tilde{E}_0(a+b)/h_0 - i\omega ab\tilde{q}_{00} - \omega^2\rho_n tab,$$

$$a_{m0} = b_{m0} + (ab/2)(\tilde{D}_{11}\lambda_m^4 + N_{xx}^0\lambda_m^2 + i\omega\tilde{q}_{m0} - \rho_n t\omega^2), \quad m = 2, 4, \dots, M,$$

$$a_{0n} = b_{0n} + (ab/2)(\tilde{D}_{22}\lambda_n^4 + N_{yy}^0\lambda_n^2 + i\omega\tilde{q}_{0n} - \rho_n t\omega^2), \quad n = 2, 4, \dots, N,$$

$$a_{mn} = (ab/4)[\tilde{D}_{11}^*\lambda_m^4 + \tilde{D}_{22}^*\lambda_n^4 + 2(2\tilde{D}_{12}^* + \nu_{21}\tilde{D}_{11}^*)\lambda_m^2\lambda_n^2 +$$

$$+ N_{xx}^0\lambda_m^2 + N_{yy}^0\lambda_n^2 + 2N_{xy}^0\lambda_m\lambda_n + i\omega\tilde{q}_{mn} - \rho_n t\omega^2], \quad m = 2, 4, \dots, M, \quad n = 2, 4, \dots, N,$$

$$\tilde{E}_0 = E_0 \left(1 + i \frac{\delta_0}{\pi} \right), \quad \dots, \quad \tilde{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(1 + i \frac{\delta_1}{\pi} \right), \quad \dots, \quad \tilde{E}_c = E_c \left(1 + i \frac{\delta_c}{\pi} \right).$$

Вводя вектор неизвестных $W = \{\tilde{w}_{00}, \tilde{w}_{10}, \dots, \tilde{w}_{m0}, \tilde{w}_{01}, \dots, \tilde{w}_{0n}, \tilde{w}_{11}, \dots, \tilde{w}_{mn}\}^T$, систему уравнений (2.8) можно представить в матричной форме

$$([R] + [K])\{W\} = \{F\}, \quad (2.9)$$

где $[R]$ — квадратная матрица, все элементы которой равны r_c ; $[K]$ — квадратная матрица, состоящая из стандартных блоков, элементами которых являются коэффициенты a_{mn} , b_{m0} , b_{0n} , r_{m0} , r_{0n} ($m = 0, 2, 4, \dots, M$, $n = 0, 2, 4, \dots, N$); $\{F\}$ — вектор-столбец, имеющий вид $\{F\} = \{-f_0, 0, \dots, 0\}^T$.

Численная процедура формирования соответствующих матриц и решения алгебраического аналога матричных уравнений реализована на “векторном” языке системы MATLAB. Использование “векторного” языка позволяет решать задачи указанного класса в несколько раз быстрее, чем при использовании программ, написанных на “скалярных” языках программирования.

Из решения системы уравнений (2.9) следуют зависимости

$$\tilde{w}_{00} = \tilde{a}_{00}f_0, \quad \tilde{w}_{m0} = \tilde{a}_{m0}f_0, \quad \tilde{w}_{0n} = \tilde{a}_{0n}f_0, \quad \tilde{w}_{mn} = \tilde{a}_{mn}f_0,$$

где $\tilde{a}_{00}, \dots, \tilde{a}_{mn}$ — некоторые комплексные числа. При использовании соотношений (1.4), (1.6) для определения амплитудных значений динамических составляющих напряжений в точках граничной плоскости пластины $z = -t/2$ получаем

$$\tilde{\sigma}_{xx}|_{z=-t/2} = \frac{\tilde{E}_1 t}{2(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \left(\sum_{m=2}^M \lambda_m^2 \tilde{a}_{m0} \cos(\lambda_m x) + \nu_{21} \sum_{n=2}^N \lambda_n^2 \tilde{a}_{0n} \cos(\lambda_n y) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=2}^M \sum_{n=2}^N (\lambda_m^2 + \nu_{21}\lambda_n^2) \tilde{a}_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(\lambda_n y) \right) f_0, \dots$$

Для определения амплитуд звуковых давлений, действующих на граничные плоскости пластины $z = -t/2$ и $z = t/2$, используются выражения

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1^0 &= -i\rho_1\omega \left[f_1^{00}\tilde{U}_* - \left(\tilde{f}_1^{00}\tilde{a}_{00} - \sum_{m=2}^M \tilde{f}_1^{m0}\tilde{a}_{m0} \cos(\lambda_m x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{n=2}^N \tilde{f}_1^{0n}\tilde{a}_{0n} \cos(\lambda_n y) - \sum_{m=2}^M \sum_{n=2}^N \tilde{f}_1^{mn}\tilde{a}_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(\lambda_n y) \right) f_0 \right], \\ \tilde{p}_2^0 &= -i\rho_2\omega \left[(f_2^{00}d_{00} - \tilde{f}_2^{00})\tilde{a}_{00} + \sum_{m=2}^M (f_2^{m0}d_{m0} - \tilde{f}_2^{m0})\tilde{a}_{m0} \cos(\lambda_m x) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^N (f_2^{0n}d_{0n} - \tilde{f}_2^{0n})\tilde{a}_{0n} \cos(\lambda_n y) + \sum_{m=2}^M \sum_{n=2}^N (f_2^{mn}d_{mn} - \tilde{f}_2^{mn})\tilde{a}_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(\lambda_n y) \right] f_0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

позволяющие в точках граничной поверхности пластины вычислить параметр звукоизоляции по формуле

$$R_p(x, y) = -20 \lg \left| \frac{\tilde{p}_2|_{z=0}}{\tilde{p}_1|_{z=0}} \right|.$$

В соответствии с выражениями (2.10) для осредненных по площади пластины значений звуковых давлений имеют место формулы

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1^0 &= \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \tilde{p}_1^0 dx dy = -i\rho_1\omega (f_1^{00}U_* - \tilde{f}_1^{00}\tilde{a}_{00}), \\ \tilde{P}_2^0 &= \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \tilde{p}_2^0 dx dy = -i\rho_2\omega (f_2^{00}d_{00} - \tilde{f}_2^{00})\tilde{a}_{00}. \end{aligned}$$

Следовательно, осредненный по площади пластины параметр звукоизоляции равен

$$\langle R_p^0 \rangle = -20 \lg \left| \frac{\rho_2(f_2^{00}d_{00} - \tilde{f}_2^{00})\tilde{a}_{00}}{\rho_1(f_1^{00}\tilde{U}_* - \tilde{f}_1^{00}\tilde{a}_{00})} \right|.$$

3. Результаты расчетов и их анализ. В работе [18] приведены результаты экспериментальных исследований по определению параметра звукоизоляции плоской пластины, выполненной из стали марки Ст.20, имеющей толщину $t = 3$ мм, длину $a = 480$ мм, ширину $b = 560$ мм. Испытания проводились методом смежных реверберационных камер в акустической испытательной лаборатории, удовлетворяющей требованиям ГОСТ Р ИСО 10140-5-2012. Такая лаборатория включает две смежные камеры высокого (с пространством V_1) и низкого (с пространством V_2) уровней, в проем между которыми устанавливается испытываемый образец (рис. 2,а), а также измерительно-управляющий комплекс с передающей и приемной системами. На рис. 2,б показана схема крепления пластины в проеме стены между двумя камерами. Эта схема полагается эквивалентной расчетной схеме, представленной на рис. 1.

Проведенный в работе [18] анализ используемой экспериментальной методики определения звукоизоляционных свойств тонкостенных элементов конструкций показал, что при сравнении результатов экспериментов и теоретических решений необходимо проводить корректировку параметра R_p . Поэтому для рассматриваемой пластины был получен

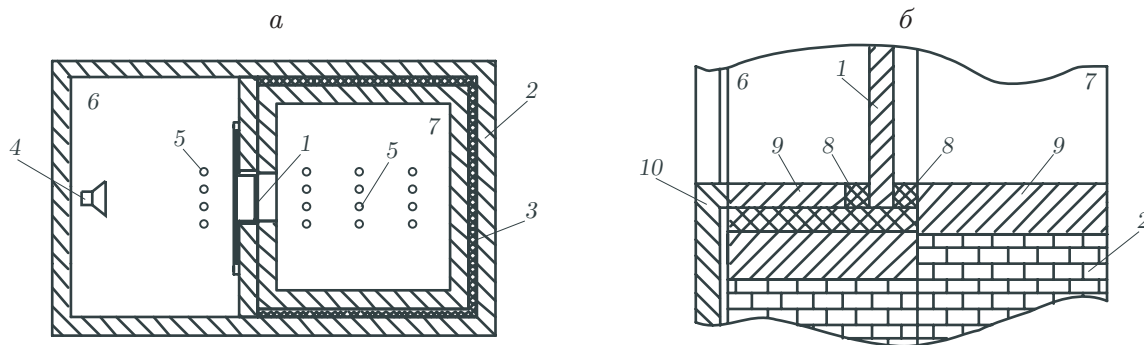


Рис. 2. Схемы акустической лаборатории (а) и крепления образца (б):

1 — испытуемый образец, 2 — кирпичная стена, 3 — звукоизоляционная прослойка, 4 — генератор звуковых волн, 5 — измерительные микрофоны, 6 — камера высокого уровня, 7 — камера низкого уровня, 8 — маложесткая прослойка, 9 — жесткие опорные элементы, 10 — жесткая прижимная плита

скорректированный экспериментальный параметр звукоизоляции R_p^e воздушного шума в третьоктавных полосах частот f , а с целью верификации построенного выше аналитического решения задачи проведены расчеты при следующих значениях упругих, инерционных и демпфирующих параметров: $E_1 = E_2 = E = 200$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$, $G = 76,92$ ГПа, $\rho_n = 7800$ кг/м³, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_n = 0,02$, $\delta_{12} = \delta_n/2 = 0,01$. Считается, что пластина окружена воздухом, имеющим следующие параметры: $\rho_1 = \rho_2 = \rho = 1,225$ кг/м³, $c_1 = c_2 = c = 340$ м/с. Расчеты проведены при расстояниях от пластины до преград $l_1 = l_2 = 2,3$ м, значении параметра $\tilde{U}_* = 0,01$ мм и толщине покрытия жесткой преграды $h_c = 0,3$ м, имеющего упругие характеристики $E_c = 16$ ГПа, $\nu_c = 0,17$, плотность $\rho_c = 500$ кг/м³ и параметр внутреннего демпфирования $\delta_c = 0,02$ (соответствующие, например, бетону), практически не влияющие на изучаемые процессы деформирования пластины.

С целью исследования влияния параметров упругих оснований (прослоек), соединяющих пластину с жестким каркасом, проведены три варианта расчетов при различных значениях модуля упругости и ЛДК их материала и постоянных геометрических параметрах $\Delta = 0,05$ м, $h_0 = 0,02$ м.

В первом варианте расчеты проведены для жестких оснований со следующими физико-механическими и демпфирующими параметрами: $E_0 = 500$ МПа, $G_0 = E_0/2$, $\delta_\sigma = 0,02$, $\delta_\tau = 0,01$.

Во втором варианте расчетов материал оснований имеет упругие характеристики, близкие к характеристикам войлока, применяемого в качестве опорных элементов пластины при экспериментальном исследовании, и малые ЛДК: $E_0 = 5$ МПа, $G_0 = E_0/2$, $\delta_\sigma = 0,02$, $\delta_\tau = 0,01$.

В третьем варианте расчетов материал оснований имеет значения модуля упругости и ЛДК материала $E_0 = 5$ МПа, $G_0 = E_0/2$, $\delta_\sigma = 0,7$, $\delta_\tau = 0,6$, соответствующие резине [25].

Анализ решения задачи, построенного с использованием (2.2)–(2.4), и результаты, полученные при исходных данных для трех указанных выше вариантов расчетов, показали, что при отсутствии угловых опорных стержней в решении отличными от нуля оказываются только неизвестные \tilde{w}_{00} , $\tilde{\Phi}_k^{00}(z)$, \tilde{W}_{00} . Такое решение задачи практически совпадает с найденным ранее решением [24] и соответствует отсутствию изгиба пластины, расположенной между деформируемыми в поперечном направлении основаниями. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что остальные неизвестные в рядах (2.2)–(2.4)

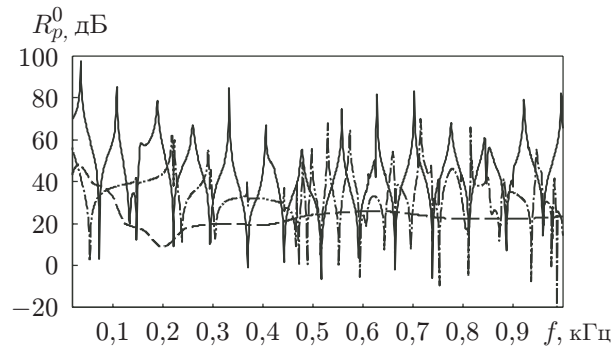


Рис. 3. Зависимость параметра звукоизоляции от частоты f :
 сплошная линия — пластина с резиновыми основаниями, штрихпунктирная — шарнирно опертая пластина [20], штриховая — экспериментальные данные [18]

оказываются не равными нулю лишь при добавлении в механическую систему угловых опорных стержней, работающих на растяжение-сжатие. Поэтому для регуляризации сформулированной задачи акустоупругости пластины (для учета ее изгиба при использовании решения в виде (2.2)) при проведении расчетов введены опорные стержни с геометрическими, физико-механическими и демпфирующими параметрами

$$H_c = h_0, \quad F_c = \Delta^2, \quad E_c = E_0, \quad \delta_c = \delta_\sigma,$$

причем параметры H_c , E_c , δ_c совпадают с соответствующими параметрами оснований, а поперечные размеры стержня пренебрежимо малы по сравнению с размерами a , b .

На рис. 3 сплошной линией показана зависимость $R_p^0(f)$ для пластины, закрепленной в жестком каркасе с использованием резиновых оснований (третий вариант расчета), штриховой — результаты экспериментального исследования звукоизоляционных свойств стальной пластины, закрепленной в каркасе проема перегородки [18]. Штрихпунктирной линией показаны результаты, полученные при указанных выше значениях параметров прослойки и воздуха на основе решения задачи для шарнирно опертой пластины [20]. Из рис. 3 следует, что построенное аналитическое решение задачи при введении опорных стержней качественно и количественно отличается от описанного выше решения, соответствующего случаю отсутствия угловых опорных стержней. Так, при значениях параметров оснований, соответствующих характеристикам материала прослоек для реальной схемы закрепления пластины в каркасе проема перегородки (см. рис. 2, б), теоретическая кривая близка к кривой, полученной в ходе эксперимента, а также к кривой, полученной на основе [20]. Следует отметить, что увеличение жесткости оснований приводит к существенному увеличению параметра звукоизоляции во всем диапазоне исследуемых частот. В то же время увеличение значения ЛДК материала оснований приводит к изменению параметра звукоизоляции пластины лишь в резонансных режимах.

На рис. 3 видно, что в окрестностях некоторых резонансных частот параметр R_p^0 , вычисляемый по значениям звуковых давлений p_1^0 , p_2^0 в центральных точках граничных плоскостей пластины, меньше нуля (т. е. $|p_2^0| > |p_1^0|$). Заметим, что такая особенность решения задачи не наблюдается для шарнирно опертой по контуру пластины в случае полуограниченных пространств V_1 , V_2 при падении на пластину со стороны V_1 плоской звуковой волны [26]. Указанное выше неравенство может иметь место и в других точках пространств V_1 , V_2 , что следует из анализа результатов, приведенных на рис. 4. На рис. 4 представлены зависимости давления $p_2 = p_2(z)$ и параметра звукоизоляции $R_p(z) = -20 \lg |p_2(z)/p_1^0|$ от координаты z , вычисленные при значениях координат $x = a/2$, $y = b/2$. Анализ кривых, приведенных на рис. 4, показывает, что распределение давления

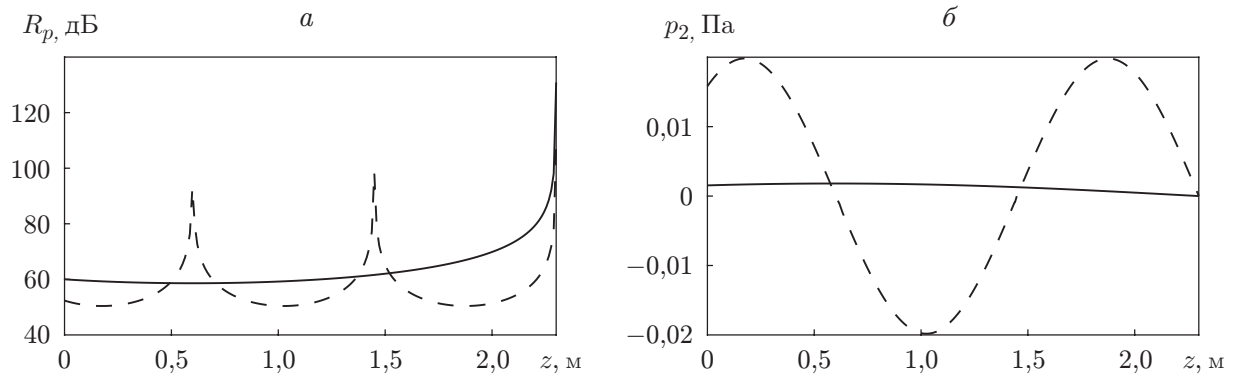


Рис. 4. Распределения параметра R_p (а) и звукового давления p_2 (б) в пространстве V_2 :

сплошные линии — $f = 50$ Гц, штриховые — $f = 200$ Гц

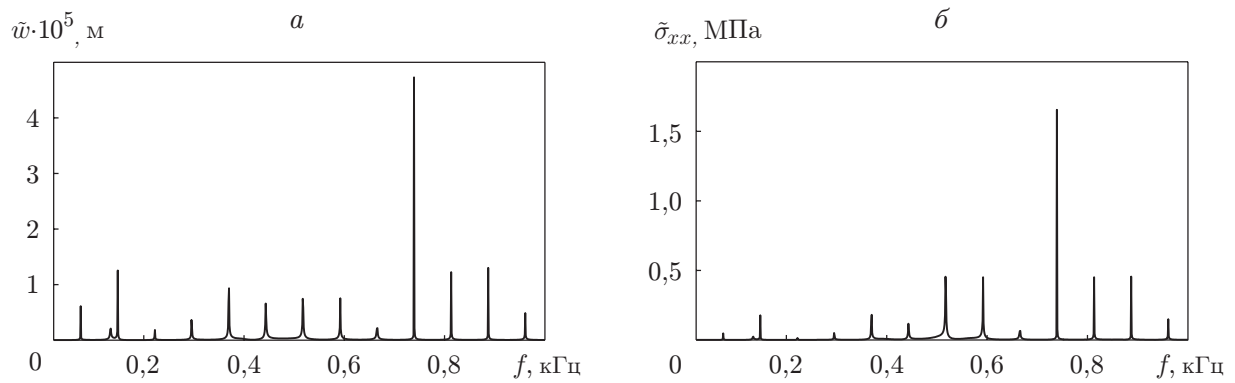


Рис. 5. Зависимости амплитуд прогиба \tilde{w} (а) и напряжения $\tilde{\sigma}_{xx}$ (б) от частоты f для пластины с резиновыми основаниями

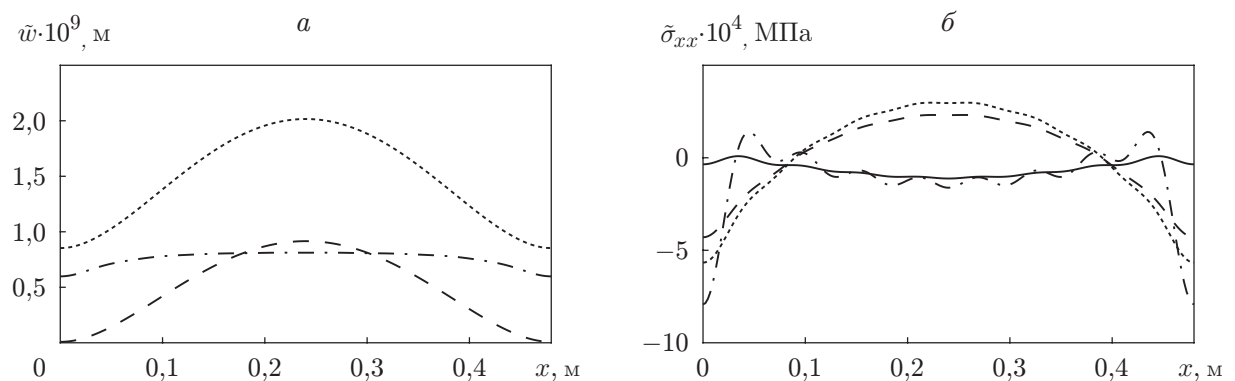


Рис. 6. Распределения амплитуд прогиба \tilde{w} (а) и напряжения $\tilde{\sigma}_{xx}$ (б) по длине пластины:

сплошные линии — пластина с жесткими основаниями (сечение $y = 0$), штриховые — пластина с жесткими основаниями (сечение $y = b/2$), штрихпунктирные — пластина с резиновыми основаниями (сечение $y = 0$), пунктирные — пластина с резиновыми основаниями (сечение $y = b/2$)

по длине камеры является существенно неравномерным. Это свидетельствует, вообще говоря, о некорректности сравнения результатов теоретических решений с результатами экспериментов, проводимых в соответствии с существующими стандартами, так как в ходе эксперимента может наблюдаться значительный разброс измеряемых шумомерами значений звукового давления при их различных положениях в камерах акустических лабораторий.

На рис. 5 приведены зависимости амплитуды прогиба \tilde{w} в центральной точке пластины и максимальной амплитуды напряжения $\tilde{\sigma}_{xx}$ от частоты f для пластины с резиновыми основаниями. Из рис. 5 следует, что существуют резонансные частоты f^R , при которых наблюдаются “всплески” перемещений \tilde{w} и напряжений $\tilde{\sigma}_{xx}$. Заметим, что увеличение жесткости упругих оснований, связывающих пластину с жестким каркасом, и увеличение ЛДК ее материала приводят к существенному уменьшению значений параметров напряженно-деформированного состояния. При этом увеличение жесткости материала оснований вызывает незначительное изменение резонансных частот f^R .

Для пластин с резиновыми и жесткими основаниями (третий и первый варианты расчета соответственно) на рис. 6 приведены распределения амплитуд прогиба \tilde{w} и напряжения $\tilde{\sigma}_{xx}$ по длине пластины при частоте набегающей звуковой волны $f = 50$ Гц и различных значениях координаты y . Видно, что увеличение жесткости оснований приводит к существенному изменению динамики рассматриваемой механической системы. Так, при частотах f , не совпадающих с резонансными, происходит уменьшение прогиба пластины \tilde{w} и возникающих в ней напряжений. Заметим, что при больших значениях жесткости оснований и опорных стержней построенное решение задачи стремится к решению для пластины с защемленными краями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гудимов М. М. Оптическое стекло / М. М. Гудимов, Б. В. Петров. М.: Химия, 1981.
2. Каргин В. А. Краткие очерки по физикохимии полимеров. 2-е изд. / В. А. Каргин, Г. Л. Слонимский. М.: Химия, 1967.
3. Хиллиг У. Б. Причины низкой прочности и предельная прочность аморфных хрупких тел. Прочность стекла. М.: Мир, 1969. С. 153–194.
4. Паймушин В. Н., Фирсов В. А. Об одном способе математического описания и решения краевых задач механики деформирования оболочек, лежащих на сплошном или дискретном упругом основании // Проблемы машиностроения. Киев: Наук. думка, 1982. Вып. 16. С. 18–23.
5. Паймушин В. Н., Фирсов В. А. Уравнения нелинейной теории контактного взаимодействия тонких оболочек с деформируемыми основаниями переменной толщины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 3. С. 119–128.
6. Паймушин В. Н., Фирсов В. А. Приближенная постановка задач контактного взаимодействия тонких оболочек с деформируемыми основаниями на контуре // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 3. С. 152–159.
7. Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Мамедов Х. Б. Осесимметричные деформации элементов остеклений летательных аппаратов с учетом податливости опорных закреплений // Изв. вузов. Авиационная техника. 1987. № 4. С. 43–48.
8. Паймушин В. Н. Оболочки из стекла. Расчет напряженно-деформированного состояния / В. Н. Паймушин, В. А. Фирсов. М.: Машиностроение, 1993.
9. Alipour M. M. Transient forced vibration response analysis of heterogeneous sandwich circular plates under viscoelastic boundary support // Arch. Civil Mech. Engng. 2018. V. 18, N 1. P. 12–31.

10. **Nallim L. G., Luccioni B. M., Grossi R. O.** Vibration of general triangular composite plates with elastically restrained edges // *Thin-Walled Structures*. 2005. V. 43, N 11. P. 1711–1745.
11. **Bahmyari E., Rahbar-Ranji A.** Free vibration analysis of orthotropic plates with variable thickness resting on non-uniform elastic foundation by element free Galerkin method // *J. Mech. Sci. Technol.* 2012. V. 26, N 9. P. 2685–2694.
12. **Zhang W., Ma H., Zeng J., et al.** Vibration responses analysis of an elastic-support cantilever beam with crack and offset boundary // *Mech. Systems Signal Process.* 2017. V. 95. P. 205–218.
13. **Utley W. A., Fletcher B. L.** Influence of edge conditions on the sound insulation of windows // *Appl. Acoust.* 1969. V. 2. P. 131–136.
14. **Nilsson A. C.** Reduction index and boundary conditions for a wall between two rectangular rooms // *Acustica*. 1972. V. 26. P. 1–23.
15. **Lomas N. S., Hayek S. I.** Vibration and acoustic radiation of elastically supported rectangular plates // *J. Sound Vibrat.* 1977. V. 52. P. 1–25.
16. **Guyader J.-L., Berry A., Nicolas J.** A general formulation for the sound radiation from rectangular, baffled plates with arbitrary boundary conditions // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1990. V. 88, N 6. P. 2792–2802.
17. **Chiello O., Sgard F. C., Atalla N.** On the use of a component mode synthesis technique to investigate the effects of elastic boundary conditions on the transmission loss of baffled plates // *Comput. Structures*. 2003. V. 81. P. 2645–2658.
18. **Паймушин В. Н., Газизуллин Р. К.** Экспериментальное определение параметров звукоизоляции прямоугольной пластины с энергопоглощающим покрытием // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2013. Т. 155, кн. 3. С. 126–141.
19. **Paimushin V. N., Gazizullin R. K., Sharapov A. A.** Numerical and experimental study of the sound-insulating properties of a deformable plate located between two chambers // *Procedia Engng.* 2015. V. 106. P. 336–349.
20. **Paimushin V. N., Gazizullin R. K.** The transmission of an acoustic wave through a rectangular plate between barriers // *J. Appl. Math. Mech.* 2016. V. 80, N 5. P. 421–432.
21. **Paimushin V. N., Gazizullin R. K.** Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate // *Mech. Composite Materials*. 2017. V. 53, N 3. P. 283–304.
22. **Галимов К. З.** Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975.
23. **Болотин В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. М.: Машиностроение, 1980.
24. **Паймушин В. Н., Газизуллин Р. К.** Исследование звукоизоляционных свойств абсолютно жесткой пластины, помещенной на деформируемых опорных элементах между двумя преградами // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2013. Т. 155, кн. 3. С. 126–141.
25. **Paimushin V. N., Firsov V. A., Gyunal I., Shishkin V. M.** Identification of the elastic and damping characteristics of soft materials based on the analysis of damped flexural vibrations of test specimens // *Mech. Composite Materials*. 2016. V. 52, N 4. P. 435–454.
26. **Paimushin V. N., Tarlakovskii D. V., Gazizullin R. K., Lukashevich A.** Investigation of different versions of formulation of the problem of soundproofing of rectangular plates surrounded with acoustic media // *J. Math. Sci.* 2016. V. 220, N 1. P. 59–81.

*Поступила в редакцию 12/IX 2017 г.,
в окончательном варианте — 22/XI 2017 г.*