

О РЕЖИМАХ МАССООБМЕНА В РЕАКТОРАХ  
С ДИСПЕРГИРОВАННОЙ ФАЗОЙ

Ю. А. Буевич, В. В. Бутков

(Москва)

Сформулированы уравнения, определяющие движение фаз и интегральный межфазовый массоперенос в изотермических двухфазных реакторах. Рассмотрены простейшие модели экстракции, не сопровождающейся изменением удельного объема фаз, и растворение газа в противоточных колоннах и аппаратах с горизонтальным током жидкости. Некоторые полученные выводы весьма существенно расходятся с традиционными представлениями теории жидкостной экстракции.

Ниже рассмотрены процессы массообмена между дисперсионной (сплошной) средой и диспергированной (дисперсной) фазой при наличии относительного движения фаз. На практике такого типа процессы реализуются в различных барботажных и распылительных установках (экстракционные или абсорбционные противоточные колонны, некоторые типы скрубберов, тарельчатые и другие аппараты с горизонтальным током сплошной среды и т. д.). Основным интерес представляет макроскопическое описание массопереноса; величины, характеризующие локальное перемешивание в реакторе и обмен импульсом и массой между дисперсионной средой и единственной частицей (капель или пузырьком) диспергированной фазы, предполагаются известными функциями макроскопических параметров.

1. Пусть в системе находится  $J$  компонентов, принимающих участие в процессе массообмена и химических реакциях, сопровождающих этот процесс, причем их весовые концентрации в диспергированной и сплошной фазах равны соответственно  $c_{1j}'$  и  $c_{2j}'$  ( $j = 1, \dots, J$ ). Рассматривая материальный баланс этих компонентов, запишем соответствующие уравнения для величин  $c_{1j}'$  и  $c_{2j}'$  в обеих фазах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho c_{1j}') + \frac{\partial}{\partial r} (\rho w c_{1j}') - \frac{\partial}{\partial r} \left( D_1 \frac{\partial}{\partial r} \right) (\rho c_{1j}') &= -K_j (\psi_j' c_{1js}' - c_{2j}') + \rho Q_{1j} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon c_{2j}') + \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon v c_{2j}') - \frac{\partial}{\partial r} \left( D_{2j} \frac{\partial}{\partial r} \right) (\varepsilon c_{2j}') &= K_j (\psi_j' c_{1js}' - c_{2j}') + \varepsilon Q_{2j} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon = 1 - \rho, \quad K_j = nK_{0j}, \quad n = \rho / \sigma, \quad \sigma = \frac{4}{3}\pi a^3$$

Здесь  $\rho$ ,  $\varepsilon$  и  $w$ ,  $v$  — объемные концентрации и скорости дисперсной и сплошной фаз,  $n$ ,  $\sigma$ ,  $a$  — счетная концентрация, объем и радиус капель диспергированной фазы,  $c_{1js}'$  — концентрации на поверхности капель,  $K_{0j}$  — коэффициент массоотдачи  $j$ -го вещества от сплошной среды, отнесенный к одной капле,  $\psi_j'$  — равновесный коэффициент распределения вещества между фазами. Величины  $Q_{1j}$  и  $Q_{2j}$  описывают возникновение  $j$ -го вещества в результате химических реакций; они отнесены к единице объема соответствующей фазы. Тензор  $D_1$  характеризует хаотическое перемешивание капель, тензор  $D_{2j}$  — как такое перемешивание, так и молекулярную диффузию  $j$ -го вещества в сплошной фазе. Считаем ниже  $c_{1js}' = c_{1j}'$ .

В общем случае  $c'_{1js} \neq c_{1j}'$ , так что необходимо рассматривать конвективную диффузию веществ внутри одной капли, а следовательно, и конвективную диффузию в среде, окружающей эту каплю, — иначе невозможно сформулировать граничные условия на поверхности капли. Последнее крайне усложняет задачу, поэтому в теории экстракции [1,2] принимают обычно  $c'_{1js} = c_{1j}'$ , изменяя соответственным образом определение коэффициентов  $K_{0j}$  и  $\psi_j'$ . Здесь поступаем так же, рассматривая  $\psi_j'$ ,  $K_{0j}$ , равно как и  $Q_{1j}$ ,  $Q_{2j}$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ , как некоторые известные функции всех концентраций,  $\rho$  и других параметров.

Отметим, что уравнения (1.1) представляют собой естественное обобщение уравнений материального баланса, используемых в простейших расчетах экстракционных и абсорбционных аппаратов [1,2]. Для весьма важного режима экстракции одного вещества они были сформулированы в работе [3].

Система уравнений (1.1) должна быть дополнена уравнениями гидромеханики рассматриваемой двухфазной системы. Уравнения сохранения массы фаз запишем в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(d_1\rho) + \frac{\partial}{\partial r}(wd_1\rho) &= - \sum K_j(\psi_j'c_{1j}' - c_{2j}') \\ \frac{\partial}{\partial t}(d_2\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial r}(v d_2\varepsilon) &= \sum K_j(\psi_j'c_{1j}' - c_{2j}'), \quad c'_{1js} = c_{1j}' \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $d_1$  и  $d_2$  — плотности материалов дисперсной и сплошной фаз, зависящие от их состава.

Уравнения сохранения импульсов фаз запишем для простоты в пренебрежении вязкими напряжениями в обеих фазах. Имеем [4]

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial r} \right) (d_1\rho w) &= - \rho \frac{\partial p}{\partial r} + d_1\rho g + F \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) (d_2\varepsilon v) &= - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial r} + d_2\varepsilon g - F \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести, а  $F$  — сила взаимодействия между фазами, отнесенная к единице объема смеси. В выражении для  $F$ , предполагаемой известной функцией  $\rho$  и относительной скорости  $v - w$ , не учтена сила, действующая на капли со стороны среднего поля давления  $p$  в сплошной среде.

Для замыкания системы (1.1) — (1.3) необходимо использовать уравнения состояния

$$d_1 = d_1(p, c_{1j}'), \quad d_2 = d_2(p, c_{2j}') \quad (1.4)$$

следующие из термодинамического анализа материалов фаз [1, 2].

Наряду с концентрациями  $c_{1j}'$  и  $c_{2j}'$  удобно рассматривать концентрации

$$c_{1j} = \rho c_{1j}', \quad c_{2j} = \varepsilon c_{2j}' \quad (1.5)$$

относимые к единице объема смеси.

Решение полной системы уравнений (1.1) — (1.4) представляет значительные трудности. Однако во многих случаях эта система может быть значительно упрощена. Некоторые качественные и количественные выводы, весьма важные при проектировании абсорбционных или экстракционных установок разных типов, можно сделать уже из анализа таких упрощенных задач. Ниже рассмотрены простейшие модели процессов массообмена в аппаратах с противотоком и прямотоком фаз и с горизонтальным течением сплошной фазы.

2. Исследуем простую экстракцию единственного вещества в противоточной колонне при идеализированных условиях массообмена. А именно считаем, что обмен веществом практически не влияет на удельные объемы фаз и коэффициент массопередачи  $K$ , так что эти величины постоянны по высоте колонны. Кроме того, пренебрегаем зависимостью коэффициента распределения от концентрации и локальным перемешиванием в колонне. Принципиального значения эти допущения не имеют; все они носят типично аппаратный характер и весьма обычны в теории жидкостной экстракции [1, 2].

Рассматривая одномерное течение в противоточной колонне, ориентируем ось  $x'$  в направлении движения диспергированной фазы и выбираем начало отсчета в месте ввода ее в колонну. Вводя безразмерные величины и ограничиваясь исследованием стационарной экстракции, получим из (1.1) следующие простые уравнения для концентраций  $c_1$  и  $c_2$  из (1.5):

$$(1 - \gamma) \frac{dc_1}{dx} + k(\psi c_1 - c_2) = 0, \quad \gamma \frac{dc_2}{dx} + k(\psi c_1 - c_2) = 0 \quad (2.1)$$

$$x = \frac{x'}{h}, \quad \gamma = \frac{v}{u}, \quad \psi = \frac{\varepsilon}{\rho} \psi', \quad k = \frac{Kh}{\varepsilon u}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad k > 0$$

Здесь  $h$  — высота колонны,  $v = \text{const}$  — скорость противотока дисперсионной среды,  $u = w - v$  — скорость движения капель в неподвижной сплошной среде. Из (1.3) имеем уравнения для  $u$  и градиента  $p$  при  $\rho = \text{const}$

$$-\frac{dp}{dr} + d\mathbf{g} = 0, \quad d = d_1\rho + d_2\varepsilon, \quad \rho \left( -\frac{dp}{dr} + d_1\mathbf{g} \right) + \mathbf{F}(\rho, \mathbf{u}) = 0 \quad (2.2)$$

так что  $\mathbf{u}$  можно считать известной функцией  $\rho$  и физических параметров; ясно, что  $\mathbf{u}$  также постоянна. Уравнения сохранения массы (1.2) удовлетворяются тождественно ввиду сделанного предположения о неизменности удельного объема фаз.

Из (2.1) следует соотношение

$$(1 - \gamma)c_1 - \gamma c_2 = \text{const} \quad (2.3)$$

широко используемое в практических расчетах [1, 2].

Для определенности рассмотрим экстракцию из диспергированной фазы, когда граничные условия, налагаемые на решения системы (2.1), имеют вид

$$c_1(0) = c_0 = \rho c_0', \quad c_2(1) = 0 \quad (2.4)$$

Решение задачи (2.1), (2.4) имеет вид

$$c_1 = \frac{c_0}{1 - \psi\gamma(1 - \gamma)^{-1}e^{-\lambda}} \left( 1 - \frac{\psi\gamma}{1 - \gamma} e^{-\lambda(1-x)} \right) \quad (2.5)$$

$$c_2 = \frac{\psi c_0}{1 - \psi\gamma(1 - \gamma)^{-1}e^{-\lambda}} (1 - e^{-\lambda(1-x)}), \quad \lambda = h \frac{1 - (1 + \psi)\gamma}{\gamma(1 - \gamma)}$$

С технологической точки зрения работу противоточного реактора удобно характеризовать значениями коэффициента насыщения дисперсионной среды  $l$  или коэффициента извлечения вещества из диспергированной фазы

$m$ , вводимыми при помощи соотношений (см. (2.5))

$$l = \frac{c_2(0)}{\psi c_0} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 - \psi \gamma (1 - \gamma)^{-1} e^{-\lambda}}$$

$$m = 1 - \frac{c_1(1)}{c_1(0)} = 1 - \frac{1 - (1 + \psi) \gamma}{1 - (1 + \psi e^{-\lambda}) \gamma} \quad (2.6)$$

При  $\gamma \rightarrow 0$  имеем  $l \rightarrow 1$ ,  $m \rightarrow 0$ , при  $\gamma \rightarrow 1$ , напротив,  $l \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow 1$ . При  $k \rightarrow \infty$ , т. е. при неограниченном увеличении высоты колонны  $h$  или коэффициента  $K$ , величины  $l$  и  $m$  стремятся к пределам  $l_\infty$ ,  $m_\infty$ , причем

$$l_\infty = 1, \quad m_\infty = \frac{\psi \gamma}{1 - \gamma}, \quad \gamma < \gamma_0 = \frac{1}{1 + \psi} \quad (2.7)$$

$$l_\infty = \frac{1 - \gamma}{\psi \gamma}, \quad m_\infty = 1, \quad \gamma > \gamma_0$$

Подчеркиваем, что при определенных значениях  $\gamma$ , т. е. при определенных соотношениях между скоростями фаз в реакторе,  $l_\infty$  или  $m_\infty$  меньше единицы, т. е. полное насыщение или извлечение не достигается даже при неограниченном увеличении высоты колонны.

Рассмотрим рабочие характеристики колонны при фиксированных значениях  $l$  или  $m$ , определяемых практическими требованиями, предъявляемыми к реальному процессу экстракции.

Так, требование  $l = \text{const}$  характерно для процессов, в которых необходимо добиться определенного насыщения дисперсионной среды веществом, извлекаемым из дисперсной фазы. Рабочие характеристики таких процессов, представляющие собой зависимости  $k$  от  $\gamma$  и  $\psi$  при данных  $l$ , легко получаются из первого соотношения (2.6). Они имеют вид

$$k = \frac{\gamma(1 - \gamma)}{1 - (1 + \psi)\gamma} \ln \frac{1 - l}{1 - \psi \gamma (1 - \gamma)^{-1} l} \quad (l = \text{const}) \quad (2.8)$$

Аналогично, рабочие характеристики процессов, удовлетворяющих требованию  $m = \text{const}$ , получаются из второго соотношения (2.6)

$$k = - \frac{\gamma(1 - \gamma)}{1 - (1 + \psi)\gamma} \ln \frac{\psi \gamma - (1 - \gamma)m}{\psi \gamma (1 - m)} \quad (m = \text{const}) \quad (2.9)$$

Последнее требование естественно, например, в процессах очистки диспергированной фазы от некоторой примеси.

Легко видеть, что величины  $k$  из (2.8), (2.9), рассматриваемые как функции  $\gamma$ , определены соответственно в областях

$$0 \leq \gamma \leq \gamma_1(l, \psi) = (1 + \psi l)^{-1} \quad (0 \leq l \leq 1)$$

$$m(m + \psi)^{-1} = \gamma_2(m, \psi) \leq \gamma \leq 1 \quad (0 \leq m \leq 1) \quad (2.10)$$

причем при  $\gamma \rightarrow \gamma_1$  или  $\gamma \rightarrow \gamma_2$  величина  $k$  обращается в бесконечность.

Указанное поведение рабочих характеристик означает просто, что процесс экстракции с данным  $l = \text{const}$  или  $m = \text{const}$  может быть осуществлен только при значениях  $\gamma$  из интервала  $[0, 1]$ . Если это значение лежит вне областей (2.10), то реализация такого процесса в принципе невозможна даже при  $k \rightarrow \infty$ . Это же заключение следует и из соотношений (2.7).

Это — вывод принципиального характера, который в ряде случаев может иметь решающее значение при проектировании экстракционных и абсорбционных противоточных реакторов. В частности, отсюда следует, что некоторые утверждения теории жидкостной экстракции, принимаемые на веру как самоочевидные, не только не очевидны, но и вообще неверны. В качестве примера можно привести допущения о непрерывном достижении равновесного распределения вещества между фазами в месте ввода одной из фаз в колонну бесконечной высоты, предположение об асимптотическом стремлении коэффициентов  $l$  и  $m$  к единице при увеличении высоты колонны и некоторые другие утверждения [1,2].

Величины  $l$  и  $m$  стремятся при  $k \rightarrow \infty$  к пределам, существенно зависящим от соотношения между скоростями фаз  $\gamma$ , коэффициента распределения  $\psi$  и т. д. По-видимому, указанные обстоятельства не были замечены в теории [1,2] потому, что исследование основных уравнений типа (2.1), как правило, заменяется в этой теории рассмотрением первого интеграла (2.3), причем входящая в него постоянная выражается обычно через априори неизвестные концентрации веществ в обеих фазах на выходе этих фаз из реактора.

Физически отсутствие стационарного режима  $l = \text{const}$  при сильном противотоке ( $\gamma > \gamma_1$ ) связано просто с тем, что вещества, поступающего в реактор с дисперсной фазой, не хватает для должного насыщения слишком большого количества сплошной среды. Аналогично отсутствие режима  $m = \text{const}$  при слабом противотоке означает, что малых количеств сплошной среды не хватает для должной очистки дисперсной фазы.

Рассмотрим теперь экстракцию в условиях прямотока, которым соответствуют области  $\gamma < 0$  и  $\gamma > 1$  изменения параметра  $\gamma$ . Если  $\gamma < 0$ , то диспергированная фаза обгоняет сплошную, если  $\gamma > 1$  — наоборот. В первом случае по-прежнему справедливы уравнения (2.1), во втором случае уравнения получают из (2.1) после преобразования  $x \rightarrow -x$ . Для прямоточных течений второе условие (2.4) теряет смысл; заменим его условием  $c_2(0) = 0$ . Решение задачи записывается тогда в форме, справедливой как при  $\gamma < 0$ , так и при  $\gamma > 1$

$$c_1 = \frac{c_0}{(1 + \psi)|\gamma| - \text{sign } \gamma} (|\gamma| - \text{sign } \gamma + \psi|\gamma|e^{-\lambda x}) \quad (2.11)$$

$$c_2 = \frac{\psi c_0 (|\gamma| - \text{sign } \gamma)}{(1 + \psi)|\gamma| - \text{sign } \gamma} (1 - e^{-\lambda x}), \quad \lambda = k \frac{(1 + \psi)|\gamma| - \text{sign } \gamma}{|\gamma|(|\gamma| - \text{sign } \gamma)}$$

Коэффициенты насыщения  $l$  и извлечения  $m$  определены по прежним формулам (2.6). Имеем из (2.6) и (2.11)

$$l = \frac{(|\gamma| - \text{sign } \gamma)(1 - e^{-\lambda})}{(1 + \psi)|\gamma| - \text{sign } \gamma}, \quad m = 1 - \frac{|\gamma| - \text{sign } \gamma + \psi|\gamma|e^{-\lambda}}{(1 + \psi)|\gamma| - \text{sign } \gamma} \quad (2.12)$$

Значения  $l_\infty$  и  $m_\infty$ , соответствующие  $k \rightarrow \infty$ , получаются из (2.12) при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Видно, что максимальные возможные значения  $l_\infty$  и  $m_\infty$ , равные единице, не достигаются каково бы ни было значение параметра  $\gamma$ . (Исключение составляют малоинтересные предельные значения  $\gamma \rightarrow -0$ , когда  $l_\infty \rightarrow 1$ , и  $\gamma \rightarrow 1 + 0$ , когда  $m_\infty \rightarrow 1$ .) Соотношения (2.12) позволяют продолжить рабочие характеристики (2.8) и (2.9) процессов экстракции, построенные в области  $0 \leq \gamma \leq 1$ , за пределы этой области.

3. В качестве второго, в некотором отношении противоположного примера рассмотрим растворение (абсорбцию) диспергированного газа в жидкости в условиях прямоточного и противоточного течений в вертикальном направлении. В этом случае вместо концентрации  $c_1'$  в уравнениях будет фигурировать постоянная плотность газа  $d_1$ , но зато величина  $\rho$  переменна.

Положим для упрощения, что плотность жидкости  $d_2$  и коэффициент распределения  $\psi'$  не зависят от концентрации  $c = c_2'$ , тогда, в частности, и  $\psi' d_1 = c_* = \text{const}$ .

Два уравнения сохранения массы (1.2) и уравнение материального баланса в жидкости из (1.1) запишем в форме

$$\begin{aligned} d_1 \frac{d}{dx} [(w - \gamma) \rho] + k(c_* - c) &= 0, & w &= \frac{u}{u_0}, & \gamma &= \frac{v}{u_0} \\ d_2 \frac{d}{dx} (\epsilon \gamma) + k(c_* - c) &= 0 \\ \frac{d}{dx} (\epsilon \gamma c) + k(c_* - c) &= 0, & k &= \frac{Kh}{\epsilon_0 u_0}, & x &= \frac{x'}{h} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $u_0$ ,  $\rho_0 = 1 - \epsilon_0$  — относительная скорость и объемная концентрация пузырьков газа в месте их ввода в колонну, остальные обозначения прежние. Значения  $\gamma < 0$  соответствуют восходящему прямоходу (газ опережает жидкость), значения  $0 \leq \gamma \leq 1$  — противоток, значения  $\gamma > 1$  — нисходящему прямоходу (газ отстает от жидкости).

Два первых интеграла системы (3.1) можно представить в форме

$$d_1 (w - \gamma) \rho - d_2 \epsilon \gamma = C_1, \quad (d_2 - c) \epsilon \gamma = C_2 \quad (3.2)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  — постоянные.

Очевидно,  $c \sim d_1 \ll d_2$ , поэтому из второго соотношения (3.2) следует

$$\gamma = \gamma_0 \epsilon^{-1}, \quad \gamma_0 = v_0 u_0^{-1} \quad (3.3)$$

Здесь  $v_0$  — скорость жидкости в отсутствие газа. Величина  $u$  по-прежнему может быть определена через  $\rho$  из уравнений (1.3) или (1.2), неизвестная  $c$  может быть выражена через  $\rho$  при помощи первого интеграла (3.2). Подставляя эти выражения и соотношения (3.3) в первое уравнение (3.1), получим уравнение для единственной неизвестной  $\rho$ .

Для иллюстрации возможных режимов растворения достаточно рассмотреть лишь уравнение, описывающее абсорбцию газа вдали от насыщения. (Такое растворение реализуется, например, в случаях, когда растворенный газ вступает в быстро протекающую реакцию).

Принимая  $c \ll c_*$ , имеем уравнение

$$\frac{d}{dx} [(w - \gamma) \rho] + \frac{kc_*}{d_1} = 0, \quad \rho(0) = \rho_0 \quad (3.4)$$

Величины  $u$ ,  $K$ , входящие в определение  $w$ ,  $\gamma$ ,  $k$ , должны быть выражены в виде функций от  $\rho$ . Для определенности используем здесь соотношения, полученные В. Г. Левичем [5] при малых и умеренных числах Рейнольдса  $R$  (до  $R \approx 700-800$ )

$$u = b \frac{da^2}{\mu} f_u(\rho), \quad K_0 = b' \left( \frac{D d g f_u(\rho)}{\mu} \right)^{1/2} f_k(\rho) a^{5/2}, \quad d \approx d_2 \epsilon \quad (3.5)$$

Здесь  $\mu$  — вязкость жидкости,  $D$  — коэффициент диффузии растворенного газа в жидкости,  $f_u(\rho)$  и  $f_k(\rho)$  — некие поправочные функции, учитывающие стесненность обтекания пузырьков и диффузии от его поверхности. При малых  $R$  имеем  $b = 2/9$ ,  $b' = (8/3) (\pi/3)^{1/2}$ ; при больших —  $b = 1/9$ ,  $b' = (8/3) (\pi/2)^{1/2}$ . Отметим, что к формулам (3.5) при нескольких иных  $b$  и  $b'$  приводят также вычисления некоторых других авторов (см., например, [1, 2]).

Пренебрегая процессами дробления и коалесценции пузырьков, можно записать уравнения

$$n = \rho / \sigma = \text{const}, \quad a = a_0 (\rho / \rho_0)^{1/3} \quad (3.6)$$

где  $a_0$  — начальный радиус пузырьков. Тогда из (3.1), (3.5) и (3.6) получим соотношения (ограничимся случаем  $\rho \ll 1$ , когда  $f_u \approx f_k \approx 1$ )

$$w = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}, \quad k = 2\beta \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{5/6} \frac{\rho_0 a_1}{c_*}, \quad 2\beta = \frac{b' c_*}{\rho_0 a_1} \left(\frac{D a g}{\mu}\right)^{1/2} \frac{n h a_0^{5/2}}{\varepsilon_0 u_0} \quad (3.7)$$

Вводя неизвестную  $\xi = \rho / \rho_0$  и используя (3.7) и соотношение  $\gamma \approx \gamma_0$ , следующее из (3.3) при  $\rho \ll 1$ , получаем из (3.4) задачу

$$-\frac{d}{dx} [\xi (\xi^{2/3} - \gamma_0)] + 2\beta \xi^{5/6} = 0, \quad \xi(0) = 1 \quad (3.8)$$

Решение этой задачи представляется в виде

$$(1 - \xi^{5/6}) - 3\gamma_0 (1 - \xi^{1/6}) = \beta x \quad (3.9)$$

Исследуем соотношения (3.8) и (3.9) отдельно для значений  $\gamma_0$  в различных областях.

*Восходящий проток* ( $\gamma_0 < 0$ ). Величина  $\xi(x)$  монотонно убывает от единицы при  $x = 0$  до нуля при  $x = x_0$ , где

$$x_0 = \beta^{-1} (1 - 3\gamma_0) > 0 \quad (3.10)$$

В рабочем участке колонны ( $0 \leq x \leq 1$ ) происходит полное растворение газа ( $m = 1$ ), если  $x_0 < 1$ . В противном случае коэффициент извлечения равен ( $x_0 > 1$ )

$$1 - m = \frac{\rho(u(\rho) - v_0)}{\rho_0(u_0 - v_0)} \Big|_{x=1} = \xi(1) \frac{\xi^{2/3}(1) - \gamma_0}{1 - \gamma_0}, \quad v \approx v_0 \quad (3.11)$$

Используя (3.9) и (3.11), легко построить рабочие характеристики колонны с восходящим прямотоком. Отметим, что величина  $x_0$ , определяющая высоту, на которой пузырьки вообще исчезают, быстро убывает с ростом параметра  $\beta$  и уменьшением  $|\gamma_0|$ .

*Нисходящий проток* ( $\gamma_0 > 1$ ). Соотношения, характеризующие абсорбцию в этом течении, получаются из (3.8) и (3.9) после изменения знака  $x$ . Соотношение (3.10) для величины  $x_0$  заменяется соотношением

$$x_0 = \beta^{-1} (3\gamma_0 - 1) \quad (3.12)$$

а выражение (3.11) для  $m$  остается в рассматриваемом случае справедливым. Видно, что при одной и той же  $|\gamma_0|$  растворение осуществляется быстрее в восходящем прямотоке, когда диспергированный газ опережает жидкость. Как следует из результатов в п. 2, простая экстракция, напротив, осуществляется несколько быстрее в прямоточном течении, в котором сплошная фаза обгоняет диспергированную.

*Противоток* ( $0 \leq \gamma_0 \leq 1$ ). По мере растворения газа размер его пузырьков и их относительная скорость  $u$  убывают до тех пор, пока на некотором уровне  $x = x_m$  эта скорость не сравняется со скоростью противоточного течения жидкости  $v_0$ , т. е. пока не наступит «захлебывание». Из (3.8) видно, что этот уровень определяется условием  $\xi(x_m) = \xi_m = \gamma_0^{3/2}$ , т. е. из (3.9) получим выражение для  $x_m$

$$x_m = \beta^{-1} [(1 - \gamma_0^{5/4}) - 3\gamma_0 (1 - \gamma_0^{1/4})] = \beta^{-1} (1 - 3\gamma_0 + 2\gamma_0^{5/4}) \quad (3.13)$$

Условие отсутствия захлебывания в противоточной колонне имеет, очевидно, вид  $x_m > 1$ . В этом случае коэффициент извлечения по-прежнему представляется в форме (3.11). Если же  $x_m$  в (3.13) меньше единицы, то захлебывание имеет место в рабочей части аппарата, и необходимо рассматривать обратное движение мелких пузырей, начинающееся на уровне  $x = x_m$ . Для этой цели достаточно ввести новую координату  $z = x_m - x$  и воспользоваться результатами, полученными выше для нисходящего прямого тока. Вводя новую неизвестную  $\zeta = \rho / \rho_m$ , где  $\rho_m$  — объемная концентрация поднимающихся пузырей при  $x = x_m$  ( $\rho_m = \xi_m \rho_0$ ), и новые параметры  $\beta_m, \gamma_m$ , выражающиеся через  $\rho_m, a_m$  так же, как  $\beta$  в (3.7) и  $\gamma_0$  в (3.3) выражаются через  $\rho_0, a_0$ , получим для  $\zeta$  уравнение того же типа, что и (3.9)

$$(1 - \zeta^{5/6}) - 3\gamma_m(1 - \zeta^{1/6}) = -2 + \zeta^{1/6}(3 - \zeta^{2/3}) = -\beta_m z \quad (3.14)$$

Полное растворение газовых пузырьков в колонне будет иметь место, если (ср. с (3.12))

$$z^\circ = \beta_m^{-1}(3\gamma_m - 1) = 2\beta_m^{-1} \leq x_m \quad (3.15)$$

В (3.14) и (3.15) использовано очевидное равенство  $\gamma_m = 1$ .

Объемная концентрация газа, выходящего из колонны вместе с жидкостью,  $\rho^\circ = \zeta(x_m)\rho_m$  (если, конечно,  $z^\circ > x_m$ ). В этом случае имеем следующее уравнение для коэффициента извлечения

$$1 - m = \frac{\rho^\circ(v_0 - u(\rho^\circ))}{\rho_0(u_0 - v_0)} = \xi_m \zeta^\circ \frac{\gamma_0 - (\xi_m \zeta^\circ)^{2/3}}{1 - \gamma_0}, \quad \zeta^\circ = \zeta(\rho^\circ) \quad (3.16)$$

Используя соотношение (3.14) и определение  $\rho^\circ$ , легко выразить  $m$  в виде функции от параметров  $\gamma_0, u_0, k, \rho_0$  и построить далее рабочие характеристики процесса.

Полное растворение всего газа, введенного в колонну, достигается, очевидно, при выполнении условия (3.15). Если технологическая цель состоит в максимальной абсорбции газа жидкостью в противоточной колонне, то целесообразно подбирать различные параметры ( $h, \rho_0$  и другие) таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$x_m = 1 - \zeta, \quad \zeta \ll 1; \quad z^\circ \leq x_m$$

Отметим, что наличие захлебывания в колонне и последующего увлечения мелких газовых пузырьков течением жидкости приводит к некоторому выравниванию газосодержания по высоте колонны. Действительно, полная объемная концентрация в участках колонны, в которых имеются как поднимающиеся, так и опускающиеся пузырьки, дается соотношением

$$\rho(x) = \rho_0 \xi(x) + \rho_m \zeta(x_m - x), \quad 0 \leq x \leq x_m, \quad 0 \leq x_m - x \leq z^\circ \quad (3.17)$$

В частности, на высоте захлебывания концентрация равна не  $\rho_m$ , а  $2\rho_m$ .

Нетрудно усмотреть, что полученные выводы в качественном отношении не изменяются и при отказе от упрощающих предположений  $\rho \ll 1, c \ll c_*$  и т. д. Однако вблизи от насыщения ( $c \sim c_*$ ) могут появиться новые стационарные режимы абсорбции, несколько отличающиеся в качественном отношении от рассмотренных режимов.



4. Рассмотрим вкратце процессы простой экстракции и абсорбции газа в условиях горизонтального тока сплошной среды (тарельчатые аппараты, аэрация и очистка промышленных вод и т. п.). Используем далее те же упрощающие предположения, что и в п. 2, 3.

Уравнения простой экстракции, аналогичные уравнениям (2.1), имеют вид

$$\gamma \frac{\partial c_1}{\partial y} + \frac{\partial c_1}{\partial x} + k(\psi c_1 - c_2) = 0, \quad \gamma \frac{\partial c_2}{\partial y} - k(\psi c_1 - c_2) = 0 \quad (4.1)$$

Здесь ось  $y$  направлена вдоль скорости сплошной среды, а параметры  $\gamma$ ,  $k$ ,  $\psi$  определяются прежними соотношениями (2.1), в которых  $h$  — высота слоя сплошной среды. Граничные условия запишем в виде

$$c_1|_{x=0} = c_0, \quad c_2|_{y=0} = 0 \quad (4.2)$$

Уравнения характеристик системы (4.1), определяющие траектории капель диспергированной фазы, имеют вид  $z = y - \gamma x = \text{const}$ . Естественно ввести новые координаты  $x$ ,  $z$ , в которых задача (4.1), (4.2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial x} + \gamma(\psi c_1 - c_2) &= 0, & c_1|_{x=0} &= c_0 \\ \frac{\partial c_2}{\partial z} - \gamma(\psi c_1 - c_2) &= 0 & c_2|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Применим к (4.3) преобразование Лапласа по переменной  $z$  и обозначим изображения функций  $c_1$  и  $c_2$  через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Получим задачу

$$\frac{d\varphi_1}{dx} + \gamma(\psi\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\psi\gamma}{p+\gamma}\varphi_1, \quad \varphi_1|_{x=0} = \frac{c_0}{p} \quad (4.4)$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\varphi_1 = \frac{c_0}{p} \exp \frac{-\psi\gamma p x}{p+\gamma}, \quad \varphi_2 = \frac{\psi\gamma c_0}{p+\gamma} \exp \frac{-\psi\gamma p x}{p+\gamma} \quad (4.5)$$

где  $p$  — переменная Лапласа.

Используя известные свойства преобразования Лапласа и табличные значения оригиналов, после некоторых преобразований получим из (4.5) соотношения

$$\begin{aligned} c_1(x, z) &= c_0 e^{-\psi\gamma x} \left[ 1 + 2\gamma \sqrt{\psi x} \int_0^{\sqrt{z}} e^{-\gamma t^2} I_1(2\gamma \sqrt{\psi x} t) dt \right] \\ c_2(x, z) &= 2c_0 \psi \gamma e^{-\psi\gamma x} \int_0^{\sqrt{z}} e^{-\gamma t^2} I_0(2\gamma \sqrt{\psi x} t) t dt, \quad z = y - \gamma x \end{aligned} \quad (4.6)$$

Решения (4.6) задачи (4.3) определены, очевидно, в области

$$0 \leq x \leq 1, \quad z > 0 \quad (4.7)$$

При  $z < 0$  следует принять  $c_1 \equiv c_2 \equiv 0$  (диспергированная фаза в этой области вообще отсутствует).

Практический интерес представляют в основном аппараты, длина которых  $L$  значительно превышает высоту слоя  $h$ . Полагая  $z = L/h$ ,

$z_r \approx y_r \approx r$ , получим следующие формальные соотношения для коэффициентов насыщения и извлечения в реакторе рассматриваемого типа:

$$l \approx \frac{1}{\psi c_0} \int_0^1 c_2(x, r) dx, \quad m \approx 1 - \frac{1}{c_{0r}} \int_0^r c_1(1, z) dz \quad (4.8)$$

Соотношение (4.8) также можно использовать при построении рабочих характеристик процесса экстракции.

Абсорбция газа при  $\rho \ll 1$ ,  $c \ll c_*$  не зависит от положения точки вдоль по потоку жидкости, и уравнение, соответствующее (3.8), приобретает вид

$$-\frac{d}{dx} \xi^{5/3} + 2\beta \xi^{2/3} = 0, \quad \xi|_{x=0} = 1 \quad (4.9)$$

Отсюда имеем

$$\xi = (1 - \beta x)^{3/5} \quad (4.10)$$

Если  $x_0 = \beta^{-1} > 0$ , где  $\beta$  определена в (3.7), то часть газа выходит из слоя жидкости, не растворяясь в нем, причем

$$1 - m = \frac{\rho u(\rho)}{\rho_0 u_0} \Big|_{x=1} = \xi^{5/3}(1) \quad (4.11)$$

Если же  $x_0 < 1$ , то растворяется весь введенный газ ( $m = 1$ ), причем в области  $x_0 \leq x \leq 1$  газа вообще нет. Траектории пузырьков определяются соотношениями (см. (4.10))

$$\frac{dx}{dy} = \frac{w}{\gamma_0} = \frac{\xi^{2/3}}{\gamma_0} = \frac{(1 - \beta x)^{2/5}}{\gamma_0}, \quad y = y_0 + \frac{5\gamma_0}{\beta} [1 - (1 - \beta x)^{3/5}] \quad (4.12)$$

где  $y_0$  — координата точки ввода пузырька в слой жидкости.

Отметим, что результаты, полностью аналогичные полученным выше, легко могут быть получены и при каких-либо иных теоретических или эмпирических зависимостях для  $u$  и  $K_0$ , отличных от (3.5). Приведенные соотношения позволяют произвести оптимизацию реакторов различных типов по разным показателям и выбрать, например, оптимальное значение  $\gamma$  при фиксированных  $\rho$ ,  $a$ ,  $h$ , определить оптимальную дисперсность (т. е. величину  $a$ ) как функцию остальных параметров и т. п.

Поступила 6 X 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Трейбал Р. Е. Жидкостная экстракция. М., «Химия», 1966.
2. Броунштейн Б. И., Железняк А. С. Физико-химические основы жидкостной экстракции. М.—Л., «Химия», 1966.
3. Галин Л. А., Чурмаев О. М. Некоторые вопросы движения пузырьков газа в слое жидкости при наличии диффузии и химических реакций. ПМТФ, 1974, № 1.
4. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1966, т. 20, вып. 2.
5. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.