

ЛАМИНАРНАЯ СТРУЯ В «УЗКОЙ» ЩЕЛИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В. Е. Накоряков, И. Н. Яичникова
(Новосибирск)

В силу сложности решения пространственных, существенно трехмерных задач оправданным является переход от трехмерности к двумерности математической модели течения. Редукция трехмерной начально-краевой задачи для системы Стокса к последовательности двумерных задач рассматривалась в [1].

Исследования по динамике вязкой жидкости при малых и средних значениях чисел Рейнольдса относятся главным образом к внутренним задачам: движения в каналах с плоскопараллельными стенками при наличии внезапного расширения сечения канала, распространения вязких струй в пространстве, затопленном той же жидкостью, а также к задачам тепловой конвекции. Известно [2], что стационарные задачи для общих нелинейных уравнений Навье — Стокса имеют, по крайней мере, одно ламинарное решение при любых числах Рейнольдса, если для каждой из изолированных компонент S_h границы S области Ω , заполненной жидкостью, выполнено условие

$$\int_{S_h} \mathbf{V} n dS = 0.$$

Для ограниченной области и малых чисел Рейнольдса решение задачи единственно и устойчиво. Поэтому представляет особый интерес случай больших чисел Рейнольдса, при которых движение еще сохраняет свой ламинарный характер.

Рассмотрим струйное течение несжимаемой вязкой жидкости между двумя плоскими параллельными пластинками в приближении [3], когда расстояние между ними $2h$ существенно мало по сравнению с основными размерами (L и δ) задачи, для «узкой» струи значение h может быть сравнимо с размером δ .

Приближенное решение уравнений Навье — Стокса запишем в виде

$$u = u_m(x, y, t)f(z/h), \quad v = v_m(x, y, t)f(z/h), \\ w = w_m(x, y, t)\varphi(z/h), \quad p = p_m(x, y, z, t),$$

в стационарном случае $\partial u/\partial t = 0$, тогда

$$(1) \quad u = u_m(x, y)f(z/h), \quad v = v_m(x, y)f(z/h), \\ w = w_m(x, y)\varphi(z/h), \quad p = p_m(x, y, z),$$

где f , φ — некоторая функция от расстояния между пластинками. Решение системы Навье — Стокса представляется в виде параболического распределения Пуазейля. При турбулентном течении профиль скоростей может иметь степенной вид

$$u = u_m(z/h)^{1/h}, \quad v = v_m(z/h)^{1/h}, \quad w = w_m\varphi(z/h), \quad p = p_m(x, y, z).$$

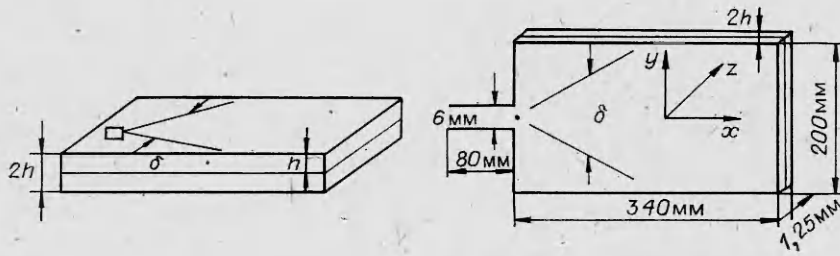
Интегрирование уравнений Навье — Стокса производится по вертикальной координате z в постоянных пределах от $-h$ до h согласно соотношениям

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u dz, \quad \langle v \rangle = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v dz, \quad \langle w \rangle = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h w dz.$$

Воспользуемся прямоугольной системой координат, начало которой поместим в середине между обеими пластинами, оси x и y расположим в плоскости, параллельной пластинам, а ось z направим перпендикулярно последним (фиг. 1).

Имеем систему

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} [2h \langle u^2 \rangle] + \frac{\partial}{\partial y} [2h \langle uv \rangle] + [uw]_{z=-h}^{z=h} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [2h \langle p \rangle] + \\ + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} [2h \langle u \rangle] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [2h \langle u \rangle] + \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=-h}^{z=h} \right),$$



Ф и г. 1

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} [2h \langle uv \rangle] + \frac{\partial}{\partial y} [2h \langle v^2 \rangle] + [vw]_{z=-h}^{z=h} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} [2h \langle p \rangle] + \\
 &+ v \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} [2h \langle v \rangle] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [2h \langle v \rangle] + \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right]_{z=-h}^{z=h} \right), \\
 \frac{\partial}{\partial x} [2h \langle wu \rangle] + \frac{\partial}{\partial y} [2h \langle wv \rangle] + [w^2]_{z=-h}^{z=h} &= -\frac{1}{\rho} [p]_{z=-h}^{z=h} + \\
 &+ v \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} [2h \langle w \rangle] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [2h \langle w \rangle] + \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z=-h}^{z=h} \right), \\
 \frac{\partial}{\partial x} [2h \langle u \rangle] + \frac{\partial}{\partial y} [2h \langle v \rangle] + [w]_{z=-h}^{z=h} &= 0.
 \end{aligned}$$

После подстановки в интегралы профилей (1) для стационарного осредненного течения получим следующую систему уравнений движения **и неразрывности**:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + v_m \frac{\partial u_m}{\partial y} - \frac{15}{8\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{5}{4} v \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} \right) - \frac{15v}{4h^2} u_m, \\
 u_m \frac{\partial v_m}{\partial x} + v_m \frac{\partial v_m}{\partial y} = -\frac{15}{8\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{5}{4} v \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) - \frac{15v}{4h^2} v_m, \\
 u_m \frac{\partial w_m}{\partial x} + v_m \frac{\partial w_m}{\partial y} + w_m^2 [\Phi(z/h)]_{z=-h}^{z=h} = -\frac{15}{8} \frac{1}{\rho} [p]_{z=-h}^{z=h} + \\
 + \frac{5}{4} v \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} \right) + w_m \left[\frac{\partial}{\partial z} \Phi(z/h) \right]_{z=-h}^{z=h}, \\
 \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} + w_m [\Phi(z/h)]_{z=-h}^{z=h} = 0.
 \end{aligned}$$

Предполагая $\partial w_m / \partial x = 0$, $\partial w_m / \partial y = 0$ как условие постоянства функции $w_m(x, y) = \text{const}$, можно принять

$$(4) \quad w_m = 0, \quad w = w_m \Phi(z/h) = 0, \quad p = p_m(x, y).$$

С учетом условия (4) система уравнений (3) принимает вид

$$\begin{aligned}
 (5) \quad u_m^0 \frac{\partial u_m^0}{\partial x^0} + v_m^0 \frac{\partial u_m^0}{\partial y^0} \frac{L}{\delta} = -\frac{15}{8} E \frac{\partial p^0}{\partial x^0} + \\
 + \frac{5}{4} \frac{1}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial^2 u_m^0}{\partial x^{02}} + \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial y^{02}} \frac{L^2}{\delta^2} \right) - \frac{15L^2}{4h^2} \frac{u_m^0}{\text{Re}_L}, \\
 u_m^0 \frac{\partial v_m^0}{\partial x^0} + v_m^0 \frac{\partial v_m^0}{\partial y^0} \frac{L}{\delta} = -\frac{15}{8} E \frac{\partial p^0}{\partial y^0} \frac{L}{\delta} + \\
 + \frac{5}{4\text{Re}_L} \left(\frac{\partial^2 v_m^0}{\partial x^{02}} + \frac{\partial^2 v_m^0}{\partial y^{02}} \frac{L^2}{\delta^2} \right) - \frac{15L^2}{4h^2} \frac{v_m^0}{\text{Re}_L}, \\
 \frac{\partial u_m^0}{\partial x} + \frac{L}{\delta} \frac{\partial v_m^0}{\partial y^0} = 0,
 \end{aligned}$$

$$u_m = u_m^0 V, \quad v_m = v_m^0 V, \quad x = x^0 L, \quad y = y^0 \delta, \quad p = p^1 p^0 = E \rho V^2 p^0.$$

Здесь $E = p^1 / \rho V^2$ — число Эйлера; $Re_L = LV/\nu$ — число Рейнольдса; $(L^2/h^2, L^2/\delta^2, L/\delta)$ — внутренние геометрические симплексы. Если струя «узкая», $\delta \ll L$ и δ по порядку соответствует h , то можно предположить, что будет справедлива следующая система уравнений в приближении пограничного слоя:

$$(6) \quad u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + v_m \frac{\partial u_m}{\partial y} = -\frac{15}{8\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{5}{4} \nu \frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} - \frac{15\nu}{4h^2} u_m,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\mu}{h^2} v_m, \quad \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} = 0.$$

В области промежуточной асимптотики, когда $h < \delta \ll L$, явление пограничного слоя как область больших значений градиента функции возникает в узких зонах вблизи частей границы, на которых существует различие между числом граничных условий исходной и вырожденной (при нулевом значении параметра малости) задач, в нашем случае это член $(5\nu/4)\partial^2 u_m/\partial y^2$.

Для расчета струи в этих приближениях воспользуемся методом интегральных соотношений вместе с приближенными методами [4] полиномиальной аппроксимации профиля касательного напряжения и аппроксимации давления. Профиль касательного напряжения в струе представляется в виде полинома

$$\tau = \sum_{i=1}^3 A_i y^{(i-1)} = A_1 + A_2 y + A_3 y^2,$$

коэффициенты которого определяются на основе граничных условий на оси струи $y = 0$ и ее границах. Из соображений симметрии имеем

$$\tau = 0 \text{ при } y = 0, \quad A_1 = 0;$$

$$\tau = 0 \text{ при } y = \delta, \quad A_2 = -A_3 \delta,$$

тогда

$$(7) \quad \tau = A_2 y + A_3 y^2 = A_2 (y - y^2/\delta) = A_2 \delta (\eta - \eta^2), \quad \eta = y/\delta.$$

Выражение (7) для профиля касательного напряжения позволяет замкнуть задачу и определить профиль скорости в струе:

$$(8) \quad \frac{\partial u_m}{\partial y} = \frac{A_2 \delta}{\mu} (\eta - \eta^2).$$

После интегрирования (8), когда постоянная интегрирования C находится из условия на оси струи $u_m = u_{mm}$ при $y = 0$, имеем

$$(9) \quad (u_m - u_{mm}) = \frac{A_2}{6\mu} \delta^2 (3\eta^2 - 2\eta^3), \quad \eta = \frac{y}{\delta}.$$

На границе струи $y = \delta$, $\eta = 1$, а скорость $u_m = 0$. Из (9) определяем, что при $\eta = 1$ коэффициент полинома

$$(10) \quad A_2 = -\frac{6\mu}{\delta^2} u_{mm}.$$

Возвращаясь к соотношению (9) с учетом (10), получаем совместное их решение — формулу безразмерного профиля скорости

$$(11) \quad F(\eta) = \frac{u_m}{u_{mm}} (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3).$$

Коэффициент A_2 может быть определен из уравнения движения с учетом (10) в виде

$$\left[\frac{\partial \tau}{\partial y} \right]_{y=0} = A_2 = -\frac{6\mu}{\delta^2} u_{mm} = \frac{4}{5} \rho u_{mm} \frac{du_{mm}}{dx} + \frac{3dp}{2dx} \Big|_{y=0} + \frac{3\mu u_{mm}}{h^2},$$

откуда находим выражение для градиента давления

$$(12) \quad \frac{dp}{dx} \Big|_{y=0} = \frac{8\rho}{15} u_{mm} \frac{du_{mm}}{dx} + 2\mu u_{mm} \left(\frac{2}{\delta^2} + \frac{1}{h^2} \right).$$

Давление p аппроксимируем со следующими условиями на оси струи: $p = p_m$ при $y = 0$, $\partial p / \partial y = 0$ при $y = 0$, так как $v_{mm} = 0$. На границе струи $p = p_1$ при $y = \delta$, где $p_1 = \text{const}$. Возьмем полином вида

$$p = \sum_{i=1}^3 B_i y^{(i-1)} = B_1 + B_2 y^2 + B_3 y^3,$$

коэффициенты которого определяются в соответствии с заданными условиями. Тогда

$$(13) \quad p = p_m + (p_1 - p_m) \eta^2, \quad \eta = y/\delta$$

при

$$B_1 = p_m, \quad B_3 = (p_1 - p_m)/\delta^2, \quad B_2 = 0.$$

С учетом формулы безразмерного профиля скорости (11) и формулы (13) для давления проинтегрируем первое из исходных уравнений движения (6) поперек струи от оси свободной струи до внешней границы, от $y = 0$ до $y = \delta$, учитывая, что на оси струи поперечная скорость $v_m = 0$. Получим первое интегральное соотношение

$$(14) \quad \frac{13}{35} \frac{\partial}{\partial x} [u_{mm}^2 \delta] = -\frac{15}{8} \frac{\nu}{h^2} [u_{mm} \delta] + \frac{5}{4\rho} \frac{\partial}{\partial x} [\delta (p_1 - p_m)].$$

Умножая члены уравнения, первого из исходной системы (6), на u_m и интегрируя поперек струи по y , имеем второе интегральное соотношение

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{43}{280} \frac{\partial}{\partial x} [u_{mm}^3 \delta] &= -\frac{39}{28} \frac{\nu}{h^2} [u_{mm}^2 \delta] - \frac{\nu u_{mm}^2}{4\delta} + \\ &+ \frac{13}{16\rho} \delta u_{mm} \frac{\partial (p_1 - p_m)}{\partial x} + \frac{u_{mm} d\delta}{4\rho dx} (p_1 - p_m). \end{aligned}$$

Первое интегральное соотношение для второго уравнения рассматриваемой системы (6) запишем в виде

$$(16) \quad (p_1 - p_m) = \frac{\mu}{h^2} \delta^2 \frac{\partial u_{mm}}{\partial x} \frac{7}{10} + \frac{\mu}{h^2} \delta u_{mm} \frac{d\delta}{dx} \frac{2}{5}.$$

Система уравнений (12), (14)–(16) решается совместно. После подстановки соотношений для разности давлений $(p_1 - p_m)$ и градиента разности давлений $d(p_1 - p_m)/dx$ в интегральные соотношения первого и второго порядка (15), (14), составленные для первого уравнения системы, проделав ряд простых преобразований, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

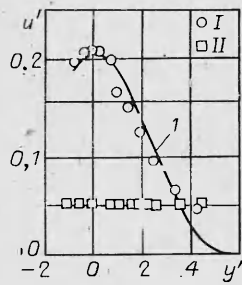
$$(17) \quad \begin{aligned} F(\delta) &= \frac{d\delta}{dx} = \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}, \\ \frac{du_{mm}}{dx} &= -u_{mm} \frac{d\delta}{dx} \frac{1}{\delta} \frac{111}{17} + \frac{\nu 2800}{\delta^2 17} + \frac{150\nu}{17h^2}, \end{aligned}$$

$$\text{где} \quad A = \frac{7 \cdot 49 \cdot 400 \nu^2 h^2 + u_{mm}^2 h^4 120 + 49 \cdot 150 \nu^2 \delta^2}{7 \cdot 709 \nu h^2 u_{mm} \delta}; \quad B = \frac{3080 h^2 7 + 135 \delta^2}{21 \cdot 709 \delta^2}.$$

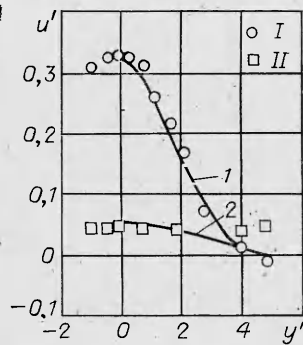
Эта система сводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями, т. е. к задаче Коши. С учетом

формулы $\frac{du_{mm}}{dx} = \frac{du_{mm}}{d\delta} \frac{d\delta}{dx}$ система (17) представляется в виде

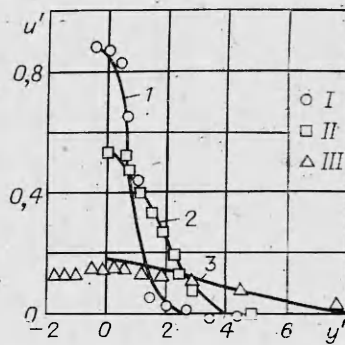
$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{du_{mm}}{d\delta} &= -\frac{u_{mm}}{\delta} \frac{111}{17} + \frac{\nu 2800}{\delta^2 17 F(\delta)} + \frac{150\nu}{17h^2 F(\delta)}, \\ F(\delta) &= \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}. \end{aligned}$$



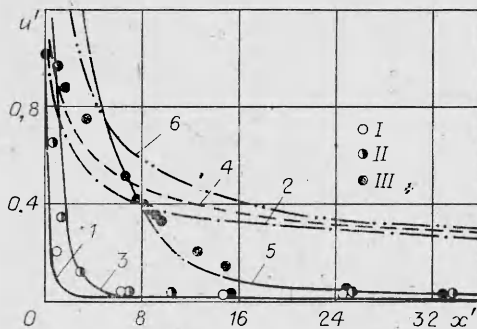
Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5

Для решения задачи Коши существуют устойчивые численные методы высокого порядка аппроксимации [3].

Уравнение для разности давлений $(p_1 - p_m)$ преобразуем с учетом второго уравнения системы (17) к виду

$$(p_1 - p_m) = - \frac{7098}{170h^2} \mu u_{mm} \frac{d\delta}{dx} + \frac{\mu\nu}{h^4} \delta^2 \frac{105}{17} + \frac{\mu\nu}{h^2} \frac{35 \cdot 56}{17}.$$

С точностью до постоянной $p_1 = \text{const}$ давление на оси струи может быть рассчитано согласно этой формуле совместно с системой (17), (18). Аналогично можно рассчитать градиент разности давлений на оси струи (12).

На фиг. 2—4 при $Re = u_{mm} 2h/\nu = 130; 300$ и 3300 соответственно показаны поперечные автомодельные профили — кривые 1; 1, 2 и 1—3.

На фиг. 5 приведены рассчитанные по четырехшаговой явной схеме Рунге — Кутты четвертого порядка аппроксимации продольные профили скорости на оси свободной, расширяющейся вниз по течению струи (кривые 1, 3, 5).

В лаборатории ИТФ СО АН СССР В. Д. Жаком проведены опыты на модели с характерными размерами ($L_x = 340$ мм, $L_y = 200$ мм, $2h = 1,25$ мм, ширина щели $a = 6$ мм, длина сопла $L_s = 80$ мм (см. фиг. 1)) по измерению профилей скорости затопленной струи. Автомодельность измеренных поперечных профилей скорости (см. фиг. 2—4) по оси ординат u_{mm}/u_{mm}^0 (u_{mm}^0 — скорость на выходе из сопла) и по оси абсцисс $y' = y/a$ хорошо подтверждается, в частности, при безразмерном $x' = x/L$ соответственно для $Re = 130; 300; 3300$, $x' = 1,7$ (точки I), $x' = 6,7$ (точки II), $x' = 1,5$ (точки III).

Теоретический поперечный автомодельный профиль строится в координатах $F(\eta)$, $\eta = y/\delta$. Для продольных автомодельных профилей в приближении к началу координат наблюдается асимптотический рост профиля скорости ($u' \rightarrow \infty$ при $x' \rightarrow 0$).

При некотором расстоянии от начала координат, возрастающем с ростом числа Рейнольдса, автомодельность подтверждается экспериментальными данными (фиг. 5, где линии 1, 2 и точки I соответствуют $Re = 130; 300$, 4 и точки II — $Re = 300; 3300$, 5, 6 и точки III — $Re = 3300$).

На фиг. 5 изображен также продольный профиль плоской затопленной струи, вытекающей из узкой щели в безграничную область [1] (кривые 2, 4, 6).

Для ламинарной, неограниченной по осп z , плоской струи Шлихтингом и У. Бикли [3] получено следующее распределение скоростей:

$$\begin{aligned} u &= 0,4543(K^2/\nu x)^{1/3}(1 - \text{th}^2\xi), \\ v &= 0,5503(K\nu/x^2)^{1/3}(2\xi(1 - \text{th}^2\xi) - \text{th}\xi), \\ \xi &= 0,2752(K/\nu^2)^{1/3}y/x^{2/3}, \end{aligned}$$

где $K = J/\rho$ — кинематический импульс струи; J — поток импульса, представляющий заданную для струи постоянную, пропорциональную избытку давления, под которым струя вытекает из щели.

Приближенный расчет, основанный на уравнениях (12), (16) и интегральных соотношениях (14), (15), дает достаточно хорошее совпадение с экспериментом. Плоская двумерная безграничная струя по продольному профилю (см. фиг. 5) с начала истечения раскрывается быстрее, чем струя, зажата между пластинками.

Фактически существуют две зоны: быстрого и медленного раскрытия «тонкой» струи жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухначев В. В. Редукция трехмерной краевой задачи для системы Стокса к последовательности двумерных задач. — В кн.: Численные методы динамики вязкой жидкости: Тр. IX Всесоюз. шк.-семинара. Новосибирск, 1983.
2. Ладженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1970.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
4. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969.
5. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.

Поступила 5/VII 1984 г.

УДК 532.517.4

К МОДЕЛИРОВАНИЮ СИЛЬНЫХ ЭФФЕКТОВ ВРАЩЕНИЯ СИСТЕМЫ В РАСЧЕТАХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПО КАНАЛАМ

Е. М. Смирнов, А. В. Шатров
(Ленинград)

При анализе влияния вращения на турбулентное течение по каналам, центральная линия которых перпендикулярна оси вращения, следует различать эффекты прямого воздействия неконсервативной силы Кориолиса на производство (сток) турбулентной энергии и изменения в характеристиках турбулентности, вызванные перестройкой поля осредненной скорости — опосредованное воздействие. Эффекты первой группы выделяются в «чистом» виде в течении по плоскопараллельному каналу, стенки которого параллельны оси вращения [1]. Различные попытки моделирования этих эффектов рассматриваются в [2, 3]. Эффекты второй группы являются основными в течениях по каналам с преобладающей ролью стенок, нормальных к оси вращения.

Обусловленная вращением глобальная перестройка поля осредненной скорости, главное содержание которой заключается в выделении ядра потока с однородным распределением скорости по линиям, параллельным оси вращения, и формировании тонких пристенных слоев, влечет за собой сильные изменения полей характеристик турбулентности. Как свидетельствуют экспериментальные данные по коэффициенту сопротивления [4, 5], вращение определенной интенсивности приводит даже к ламинаризации первоначально турбулентного потока. При дальнейшем увеличении угловой скорости вращения ω наблюдается сильный рост потерь давления (почти пропорционально $\omega^{1/2}$). В частности, применительно к проблеме расчета течений по каналам систем охлаждения роторов мощных энергетических машин наиболее важной представляется именно эта сторона воздействия силы Кориолиса на турбулентный поток. В работах [6, 7] по численному моделированию турбулентного течения во вращающихся каналах рассматриваются режимы, в которых эффекты силы Кориолиса носят возмущающий характер. Ниже излагаются результаты численного моделирования в упомянутой постановке сильных эффектов вращения, обусловленных перестройкой поля осредненной скорости, включая явление ламинаризации.