ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. Теория ползучести. — М.: Физматгиз, 1960.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966.
3. Никитенко А.Ф. О длительности до разрушения при статических и циклических нагрузках // Пробл. прочности. — 1976. — № 7. — С. 44—46.
4. Никитенко А.Ф., Сухоруков И.В. Приближенный метод решения релаксационных задач с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести // Надежность и прочность машиностроительных конструкций: Сб. науч. тр. / КПтИ. — Куйбышев, 1988. — С. 49—55.
5. Никитенко А.Ф., Заев В.А. Расчет напряженно-деформированного состояния и времени начала разрушения элементов конструкций с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести // Пробл. прочности. — 1983. — № 1. — С. 56—61.
6. Алексеев А.Е. Двумерные задачи идеальной жесткопластической среды: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1980.
7. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. — М.: Гостехиздат, 1956.
8. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. 16, вып. 3(99). — С. 171—174.

г. Новосибирск *Поступила 31/V 1993 г., в окончательном варианте — 6/XII 1993 г.*

УДК 539.3+519.6

В.А. Ковтуненко

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

Рассматривается классическое вариационное неравенство, описывающее задачу о контакте упругой пластины с жестким препятствием, изложены итерационные методы аппроксимации данного неравенства с использованием оператора штрафа, и доказаны результаты о сходимости решений. Для предлагаемой линейной итерационной схемы построен метод конечных элементов и показана его сходимость, приводится пример численного решения задачи по указанному методу.

Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Функции $\varphi \in C^2(\Omega)$ (φ на $\partial\Omega$ меньше нуля) и $f \in L^2(\Omega)$ заданы. Требуется найти функцию $w \in K_\varphi$, где

$$K_\varphi = \{w \in H_0^2(\Omega) / w \geq \varphi \text{ в } \Omega\},$$

удовлетворяющую неравенству [1, 2]

$$(\Delta w, \Delta v - \Delta w) \geq (f, v - w) \ \forall\, v \in K_\varphi. \tag{1}$$

Здесь скобки (.,.) обозначают скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Данная модель описывает задачу нахождения функции w поперечного прогиба пластины, лежащей в области Ω и защемленной по краям, под действием жесткого препятствия φ и внешней нагрузки f.

Введем оператор штрафа

$$\beta(w) = \begin{cases} 0, & w \geq \varphi, \\ w - \varphi, & w < \varphi \end{cases}$$

и определим штрафованную задачу с параметром $\varepsilon > 0$ в виде

$$\Delta^2 w^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\beta(w^\varepsilon) = f; \tag{2a}$$

(2б) $$w^{\varepsilon} = w^{\varepsilon}_{\nu} = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

где нижний индекс ν обозначает производную по внешней к границе нормали. В [3] доказан следующий результат. Существует единственное решение $w^{\varepsilon} \in H^2_0(\Omega)$ задачи (2):

$$w^{\varepsilon} \to w \text{ слабо в } H^2_0(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0$$

($w \in K_{\varphi}$ — единственное решение задачи (1)).

Аппроксимация нелинейной схемой. Зафиксируем ε и рассмотрим итерационную процедуру, предложенную в [4]:

(3а) $$\Delta^2 w^{\varepsilon,n+1} + \varepsilon^{-1} K(w^{\varepsilon,n})(w^{\varepsilon,n+1} - \varphi) = f;$$

(3б) $$w^{\varepsilon,n+1} = w^{\varepsilon,n+1}_{\nu} = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$; $w^{\varepsilon,0} \in H^2_0(\Omega)$ — произвольная функция;

$$K(w) = \begin{cases} 0, & w \geqslant \varphi, \\ 1, & w < \varphi. \end{cases}$$

Можно показать, что существует решение задачи $w^{\varepsilon,n+1} \in H^2_0(\Omega)$ [5].

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in H^2_0(\Omega)$, *тогда* $w^{\varepsilon,n} \to w^{\varepsilon}$ *слабо в* $H^2_0(\Omega)$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Умножим (3а) на $w^{\varepsilon,n+1} - \varphi$ и проинтегрируем по Ω. Используя краевые условия (3б) и $\varphi = \varphi_{\nu} = 0$ на $\partial\Omega$, получим

$$\|\Delta w^{\varepsilon,n+1}\|_0^2 + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} K(w^{\varepsilon,n})(w^{\varepsilon,n+1} - \varphi)^2 dx = (f, w^{\varepsilon,n+1}) +$$
$$+ (\Delta w^{\varepsilon,n+1}, \Delta\varphi).$$

Отбросив положительный интеграл и применив неравенство Гельдера, находим равномерную по n оценку

$$\|\Delta w^{\varepsilon,n+1}\|_0^2 \leqslant c(\|f\|_0^2 + \|\Delta\varphi\|_0^2).$$

Из рефлексивности $H^2_0(\Omega)$ вытекает существование подпоследовательности (для которой оставим прежнее обозначение) такой, что

(4) $$w^{\varepsilon,n} \to u^{\varepsilon} \text{ слабо в } H^2_0(\Omega) \text{ при } n \to \infty.$$

Перепишем (3а) в виде

$$\Delta^2 w^{\varepsilon,n+1} + \varepsilon^{-1}\beta(w^{\varepsilon,n}) = f + \varepsilon^{-1} K(w^{\varepsilon,n})(w^{\varepsilon,n} - w^{\varepsilon,n+1})$$

и перейдем к пределу по n. Используя (4), непрерывность оператора штрафа и ограниченность $K(w^{\varepsilon,n})$, получим

$$\Delta^2 u^{\varepsilon} + \varepsilon^{-1}\beta(u^{\varepsilon}) = f.$$

В силу единственности решения задачи (2) следует $u^{\varepsilon} = w^{\varepsilon}$, что доказывает теорему.

Аппроксимация линейной схемой. Построим итерационную процедуру для $n = 0, 1, \dots$ и произвольной функции $w^{\varepsilon,0} \in H^2_0(\Omega)$:

(5а) $$\Delta^2 w^{\varepsilon,n+1} + \varepsilon^{-1} w^{\varepsilon,n+1} = f + \varepsilon^{-1}(w^{\varepsilon,n} - \beta(w^{\varepsilon,n}));$$

(5б) $$w^{\varepsilon,n+1} = w^{\varepsilon,n+1}_{\nu} = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Легко показать, что существует решение задачи $w^{\varepsilon,n+1} \in H^2_0(\Omega)$.

Теорема 2. $w^{\varepsilon,n} \to w^{\varepsilon}$ *сильно в* $H^2_0(\Omega)$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Запишем уравнение (5а) на предыдущем шаге по n, вычтем его из (5а), полученное уравнение умножим на $w^{\varepsilon,n+1} - w^{\varepsilon,n}$ и проинтегрируем по Ω. Используя краевое условие (5б), имеем

(6) $$\|\Delta w^{\varepsilon n+1} - \Delta w^{\varepsilon n}\|_0^2 + \varepsilon^{-1}\|w^{\varepsilon n+1} - w^{\varepsilon n}\|_0^2 = \varepsilon^{-1}(w^{\varepsilon n} - w^{\varepsilon n-1} - \beta(w^{\varepsilon n}) + \beta(w^{\varepsilon n-1}), w^{\varepsilon n+1} - w^{\varepsilon n}).$$

Для оператора штрафа выполнена оценка
$$|s^1 - s^2 - (\beta(s^1) - \beta(s^2))| \leqslant |s^1 - s^2| \ \forall\, s^1, s^2 \in H_0^2(\Omega).$$

Тогда, применив неравенство Гельдера и оценку $\|s\|_2^2 \leqslant c\|s\|_0^2 \ \forall \ s \in H_0^2(\Omega)$, из (6) находим

$$\|\Delta w^{\varepsilon n+1} - \Delta w^{\varepsilon n}\|_0^2 + \varepsilon^{-1}\|w^{\varepsilon n+1} - w^{\varepsilon n}\|_0^2 \leqslant \rho(\|\Delta w^{\varepsilon n} - \Delta w^{\varepsilon n-1}\|_0^2 + \varepsilon^{-1}\|w^{\varepsilon n} - w^{\varepsilon n-1}\|_0^2)$$

$$\left(\rho = \frac{1 + c\varepsilon}{(1 + 2c\varepsilon)(1 + \varepsilon/c)} < 1\right).$$

Таким образом, в силу сходимости ряда геометрической прогрессии с показателем $\sqrt{\rho}$ существует элемент $u^\varepsilon \in H_0^2(\Omega)$ такой, что

(7) $$w^{\varepsilon n} \to u^\varepsilon \text{ сильно в } H_0^2(\Omega) \text{ при } n \to \infty.$$

Перейдем к пределу в (5а) при $n \to \infty$. Используя (7) и непрерывность оператора штрафа, получим утверждение теоремы.

Метод конечных элементов для линейной схемы. Трудность при численном решении линейной системы четвертого порядка (5) состоит в наличии второго краевого условия типа Неймана. Существует ряд работ (например, [6, 7]), в которых это краевое условие аппроксимируется через граничные значения вторых производных, что позволяет свести данную задачу к последовательности задач второго порядка. Однако при таком подходе возникает трудность определения следов вторых производных на границе. В настоящей работе предлагается использовать аппроксимацию искомых функций полиномами высокой степени.

Поместим в Ω квадратную сетку Ω_h, состоящую из квадратов размера $h > 0$. Потребуем, чтобы
$$\mathrm{mes}(\Omega \setminus \Omega_h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Обозначим через x^r $(r = 1, \ldots, N(h))$ внутренние узлы Ω_h. Определим базисные функции $U_r^{ij}(x_1, x_2) \in H_0^2(\Omega)$ $(i, j = 0, 1, r = 1, \ldots, N(h))$ с помощью полиномов третьей степени по x_1 и x_2 так, чтобы а) носитель U_r^{ij} лежал в квадратах, имеющих x^r своей вершиной, б) в каждой точке x^r выполнялось соотношение
$$\frac{\partial^l}{\partial x_1^l}\frac{\partial^m}{\partial x_2^m} U_r^{ij} = \delta_{li}\delta_{mj}, \ i, j, l, m = 0, 1.$$

Далее воспользуемся методом Галеркина. Обозначим через X_h подпространство $H_0^2(\Omega)$, натянутое на базисные функции U_r^{ij}. Тогда любой элемент $v \in H_0^2(\Omega) \cap C^3(\Omega)$ можно приблизить сильно сходящейся в $H_0^2(\Omega)$ при $h \to 0$ последовательностью $v_h \in X_h$. Пусть $f \in H^1(\Omega)$, тогда решение задачи (5) принадлежит классу $H_0^2(\Omega) \cap C^3(\Omega)$. Поэтому можно найти решение $w_h^{\varepsilon,n+1} \in X_h$ уравнения

(8) $$(\Delta w_h^{\varepsilon,n+1}, \Delta u_h) + \varepsilon^{-1}(w_h^{\varepsilon,n+1}, u_h) = (f, u_h) + \varepsilon^{-1}(w_h^{\varepsilon,n} - \beta_h(w^{\varepsilon,n}), u_h) \ \forall\, u_h \in X_h.$$

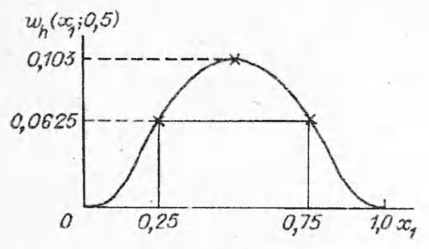

Рис. 1

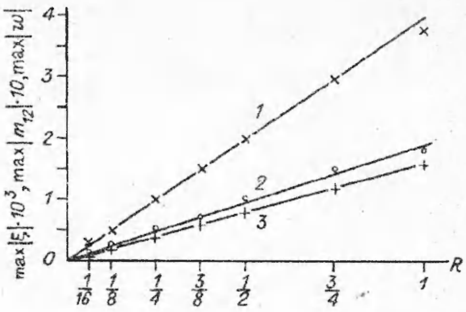

Рис. 2

Здесь может потребоваться сгладить оператор штрафа, как указано в [8], так, чтобы $\beta(v) \in C^1(\Omega)$. Теперь можно доказать следующий результат:

$$w_h^{\varepsilon,n+1} \to w^{\varepsilon,n+1} \text{ сильно в } H_0^2(\Omega) \text{ при } h \to 0.$$

Подставив в (8) вместо пробной функции $u_h = w_h^{\varepsilon,n+1}$, получим систему алгебраических уравнений для поиска коэффициентов разложения решения $w_h^{\varepsilon,n+1}$ задачи (8) по базису U_r^{ij}.

Численный эксперимент. Рассмотрим следующий пример из [6, с. 364]. Пусть Ω — квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$, $f = 0$, $\varphi(x_1, x_2) = 0{,}0625$, когда $(x_1 - 0{,}5)^2 + (x_2 - 0{,}5)^2 \leqslant (0{,}25)^2$ (рис. 1).

Разобьем Ω на 16 квадратов со стороной длины $h = 0{,}25$. Решая (8), найдем $w_h^{\varepsilon,n+1}$. Решая последовательно систему (8) при $n(\varepsilon) \to \infty$, $\varepsilon_s = 10^{-s} \to 0$, когда $s \to \infty$, получим численное решение w_h задачи (1), если будет достигнута заданная погрешность OS:

$$\| w_h^{\varepsilon_s,n+1} - w_h^{\varepsilon_s,n} \|_{C(\Omega)} \leqslant OS \ \forall s, \ \| w_h^{\varepsilon_{s+1}(n)} - w_h^{\varepsilon_s(n)} \|_{C(\Omega)} \leqslant OS.$$

Полученное данным методом решение сравнивалось с решением, указанным в [6], в контрольных точках, помеченных на рис. 1 крестиком. Разница в величинах наблюдалась не более чем в третьем знаке после запятой. Сравнение количества итераций, необходимых для достижения заданной погрешности OS, приведено в таблице. Из этих результатов можно сделать вывод об эффективности данного алгоритма.

С использованием предложенного метода решения задачи был проведен ряд численных экспериментов по изучению поведения упругой квадратной пластины, защемленной по краям и находящейся под действием жесткого препятствия.

После нахождения нормального прогиба w пластины можно определить ряд геометрических и механических характеристик рассматриваемой системы. Так, можно найти неизвестную область контакта пластины с препятствием. Контактные усилия вычисляются из соотношения

$$\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \beta(w^\varepsilon). \tag{9}$$

Изгибающие моменты m_{ij} $(i, j = 1, 2)$ с учетом симметрии заданы уравнением

$$\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\nu \\ 0 & 1+\nu & 0 \\ -\nu & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w_{x_1x_1} \\ -w_{x_1x_2} \\ -w_{x_2x_2} \end{pmatrix}.$$

Погрешность OS	Количество итераций	Количество итераций в [6]
$1{,}3\cdot10^{-4}$	45	100
$1{,}7\cdot10^{-5}$	120	200
$1{,}3\cdot10^{-6}$	291	300
$1{,}2\cdot10^{-6}$	296	400
$9{,}7\cdot10^{-7}$	313	500
$7{,}7\cdot10^{-7}$	349	600
$6{,}25\cdot10^{-7}$	387	700
$5{,}6\cdot10^{-7}$	411	750

Пусть по-прежнему Ω — единичный квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$. Положим для простоты $f = 0$ и определим форму препятствия в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = R, \ (x_1 - 0{,}5)^2 + (x_2 - 0{,}5)^2 \leqslant (0{,}25)^2,$$

где $R = \text{const} > 0$. Тогда зона контакта будет состоять из окружности

$$(x_1 - 0{,}5)^2 + (x_2 - 0{,}5)^2 = (0{,}25)^2. \tag{10}$$

Следовательно, контактные усилия равны нулю почти всюду в Ω и определяются соотношением (9) на окружности (10).

Рассмотрим зависимость прогиба, контактных усилий и изгибающих моментов от нагрузки, которая в нашем случае определяется константой R. Для этого найдем значения перечисленных величин в узлах построенной сетки. При этом для простоты ограничимся нахождением одного момента m_{12}. Графики функций $\max|\xi| \cdot 10^3$, $\max|m_{12}| \cdot 10$, $\max|w|$ (линии *1—3*) приведены на рис. 2. Здесь крестиками и кружками отмечены значения соответствующих характеристик, полученные при численных расчетах. Аппроксимирующие прямые указывают на линейные изменения прогибов, контактных усилий и моментов в зависимости от изменения нагрузки, задаваемой препятствием.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ковтуненко В.А.** Сходимость решений вариационных неравенств в контактной задаче для пластины с точечными ограничениями // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1991. — Вып. 103. — С. 55—64.
2. **Хлуднев А.М.** Оптимальное управление пластиной над препятствием // Сиб. мат. журн. — 1990. — Т. 31,№ 1. — С. 172—179.
3. **Лионс Ж.Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
4. **Вабищевич П.Н.** Численные методы решения задач со свободной границей. — М.: Изд-во МГУ, 1987.
5. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
6. **Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р.** Численное исследование вариационных неравенств. — М.: Мир, 1979.
7. **Гловински Р., Пиронно О.** О применении “квазипрямого“ метода и итерационных методов к решению задачи Дирихле для бигармонического оператора при смешанной аппроксимации конечными элементами // Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. — М.: Наука, 1978. — С. 34—58.
8. **Barbu V.** Optimal control of variational inequalities. — Boston: Pitman, 1984.

г. Новосибирск

Поступила 28/IX 1993 г.,
в окончательном варианте — 7/XII 1993 г.