

в J , а вычисленная по контуру профиля циркуляция Γ на каждой итерации при минимизации функционала подставляется в (7).

На рис. 2 штриховыми линиями показан модифицированный профиль, являющийся решением первой оптимизационной задачи с $M_\infty^0 = 0,68$, $C_y^0 = 0,4$, и приведено распределение скорости по нему. Приращение площади $\Delta S \sim 6\%$.

На рис. 3 приведено решение второй оптимизационной задачи, $\Delta S \sim 3\%$, штриховые линии — полученный профиль. В распределениях скорости на части верхних контуров модифицированных профилей на рис. 2, 3 имеется «полочка», соответствующая $M \approx 1$. Тот факт, что $M = \text{const}$ не реализуется на всей свободной поверхности полученных профилей, вызван ограничением снизу на C_y в (9).

Результаты расчетов подтверждают, с одной стороны, высокую точность предложенного алгоритма расчета и построения профилей, а с другой — возможность использования для их проектирования газа Чаплыгина как модели дозвукового течения реального газа, что позволяет создавать эффективные методы расчета, так как решения уравнения минимальных поверхностей могут быть представлены через аналитические функции комплексного переменного.

Автор выражает благодарность А. Ф. Латыпову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I // J. Rational Mech. Anal. — 1954. — V. 3, N 2.
2. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1983.
3. Бере Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. — М.: ИЛ, 1961.

г. Новосибирск

Поступила 21/VI 1991 г.
в окончательном варианте — 11/VII 1991 г.

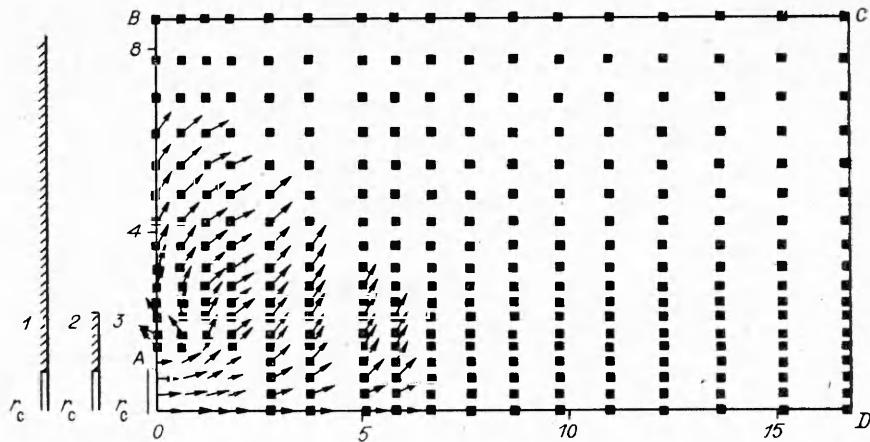
УДК 533.6.014

Н. М. Булгакова

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СТРУЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Решение полной системы уравнений Навье — Стокса методом установления с использованием неявной схемы расщепления для струйных течений из сопла в вакуум [1], затопленное пространство [2] и спутный поток [3] позволяют рассматривать дозвуковые участки течения и их влияние на структуру струи. Кроме того, метод, предложенный в [4, 5], дает возможность расчета нестационарных процессов. В данной работе в рамках этого метода решается задача об истечении струи газа в затопленное пространство в импульсном режиме, что может быть приложено к описанию запуска струи и квазистационарных эрозионных факелов. Выход решения на установившийся режим соответствует решению стационарной задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерную (осесимметричную) задачу. Схема изучаемой области представлена на рис. 1. Снизу она ограничена осью струи OD , OA представляет собой звуковое отверстие радиусом r_c (либо срез сверхзвукового сопла). Выше кромки сопла границей



Р и с. 1

области интегрирования является твердая бесконечная 1 либо ограниченная 2 поверхность, или AB представляет собой свободную границу 3. Внешняя граница BC отодвигалась от оси на расстояние, на котором газ затопленного пространства можно считать невозмущенным. Граница CD , на которой поставлены условия свободного вытекания, располагается на расстоянии более $20r_c$ от среза сопла.

Система уравнений Навье — Стокса для вязкого сжимаемого теплопроводного газа в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} \right) = 0, \\
 & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + (\gamma - 1) \frac{\partial e}{\partial x} + (\gamma - 1) \frac{e}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \\
 & = \frac{1}{\text{Re} \rho} \left\{ \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\mu}{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial x} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} (\mu v) \right\}, \\
 & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + (\gamma - 1) \frac{\partial e}{\partial y} + (\gamma - 1) \frac{e}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \\
 & = \frac{1}{\text{Re} \rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3} \left(\frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu v}{y^2} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{v}{y} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right\}, \\
 & \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + (\gamma - 1) e \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} \right) = \\
 & = \frac{1}{\text{Re} \rho} \left\{ \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\mu}{y} \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{4}{3} \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{4}{3} \frac{\mu v}{y} \left(\frac{v}{y} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь x, y — прямоугольная система координат; t — время; u, v — составляющие вектора скорости вдоль осей x и y соответственно; γ — показатель адиабаты; ρ — плотность; e — внутренняя энергия; Re, Pr — числа Рейнольдса и Прандтля.

В качестве характерных приняты параметры на срезе сопла r_c, ρ_c, u_c, e_c . Система дополнена уравнением состояния $p = (\gamma - 1)\rho e$, так что $e_c = 1/(\gamma(\gamma - 1)M_c^2)$, где M_c — число Маха на срезе сопла, температура

T нормирована на u_c^2 . Как и в [2, 3], зависимость теплопроводности λ и вязкости μ от температуры принималась по модели Сюзерленда [6]:

$$\frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{\mu}{\mu_c} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \frac{T_c + T_s}{T + T_s}$$

(T_s — постоянная Сюзерленда, задаваемая в зависимости от сорта истекающего газа).

Как было упомянуто выше, при истечении струи в затопленное пространство граница BC отодвигается от оси OD на расстояние, достаточное для того, чтобы считать внешний газ (поток) невозмущенным. На границе CD , а также AB выше твердой стенки либо кромки сопла (при отсутствии стенки) используются условия «свободного вытекания»:

$$(1.2) \quad \partial f / \partial x = 0 \quad \text{либо} \quad \partial^2 f / \partial x^2 = 0 \quad (f = (\rho, u, v, e)).$$

Такое же условие ставится на границе BC в случае истечения струи в вакуум [1].

На срезе сопла параметры принимаются постоянными и равными $f_c = (\rho_c, u_c, 0, e_c)$ с прилипанием на кромке $u_c(0, 1) = 0$ либо задается параболический профиль. Течение симметрично относительно оси струи OD :

$$\partial \rho / \partial y = \partial u / \partial y = v = \partial e / \partial y = 0.$$

На твердой поверхности используются условия прилипания потока:

$$(1.3) \quad u(0, y) = v(0, y) = 0, \quad T(0, y) = T_w = \text{const}, \quad \partial p / \partial x|_{x=0} = 0$$

либо скольжения (записаны в безразмерных переменных):

$$(1.4) \quad u(0, y) = 0; \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \\ v(0, y) = \frac{2-\sigma}{\sigma} \text{Kn} \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T \text{Re}} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{x=0}, \quad T(0, y) = \\ = T_w + \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{2\gamma}{\gamma-1} \text{Kn} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Здесь Kn — число Кнудсена, определенное по радиусу среза сопла; T_w — температура стенки; σ — доля диффузно отраженных молекул; α — коэффициент аккомодации (полагалось $\sigma = \alpha = 1$).

Для получения стационарного распределения параметров начальные условия ставились следующим образом. В прилегающей к оси цилиндрической области с радиусом r_c задавались параметры, равные параметрам на срезе сопла, в остальной области — невозмущенный газ. В случае решения нестационарной задачи ставились начальные условия, аналогичные мгновенному разрыву мембраны на срезе сопла, так что весь газ затопленного пространства считался невозмущенным в начальный момент времени.

Область счета содержала $[N_x \times N_y]$ расчетных точек ($N_x = 40-50$, $N_y = 30-60$) и разбивалась неравномерной сеткой в зависимости от нерасчетности, которая либо сгущалась к срезу сопла по логарифмическому закону, либо использовалась арифметическая прогрессия для увеличения шага сетки при удалении от среза сопла. На сетке строилась разностная схема расщепления по координатам и физическим процессам [4, 5], которая является устойчивой при числах Куранта $K \leq 10$: $K = \frac{\tau}{h_x h_y} (h_x |v| + h_y |u| + c \max(h_x, h_y))$ (h_x, h_y — шаги сетки вдоль осей x и y , c — скорость звука).

Схема записывалась в декартовых координатах по принципу, описанному в [5], имеет на каждом шаге по времени четыре дробных шага. На каждом дробном шаге вводится свой матричный оператор $\bar{\Omega}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). В операторах $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ учитываются конвективный перенос и вяз-

кие члены (без смешанных производных) вдоль осей x и y соответственно. Матричные операторы $\bar{\Omega}_3$ и $\bar{\Omega}_4$ содержат члены с давлением и типа $\text{div } v$. Оставшиеся члены вводятся на первом дробном шаге. Конвективные члены аппроксимируются разностями первого порядка с учетом знака скорости, остальные — первого или второго порядка. На первом дробном шаге для записи правых частей уравнений введены матричные операторы Ω_i ($i = 1, 2, 3, 4$), отличающиеся от $\bar{\Omega}_i$ тем, что в Ω_i все производные записывались со вторым порядком (первые производные с учетом знака скорости на трехточечном шаблоне). На каждом дробном шаге система реализуется с помощью скалярных прогонок. Схема аппроксимирует исходную систему уравнений (1.1) с первым (в нестационарном случае) или вторым (в стационарном) порядком [5].

Итерационный параметр τ в расчетах варьировался от 0,01 до 0,2. При изменении τ на порядок максимальное расхождение распределений ρ , u , v , e , полученных в одинаковые моменты времени, не превышало 1,5 %. Оптимальным значением итерационного параметра, как показали расчеты, является $\tau = 0,1$.

Расчеты проведены при следующих параметрах: $1 \leq M_c \leq 6$, $20 \leq \text{Re} \leq 10^5$, $0,5 \leq n \leq 10^3$ ($n = p_c/p_\infty$ — нерасчетность), показатель адиабаты γ принимался равным 1,4 и 1,67, $\text{Pr} = 0,72$.

2. Примеры численных расчетов. Для проверки правильности работы программы проведены расчеты стационарной струи, истекающей в затопленное пространство, для вариантов $M_c = 1$, $\text{Re} = 10^3$, $n = 10$, $T_c/T_\infty = 1$ и $M_c = 1$, $\text{Re} = 112$, $n = 18,5$, $T_c/T_\infty = 1$ в постановке работы [2]. Получено совпадение с результатами [2].

Пульсации давления при взаимодействии лазерного излучения с плоской мишенью. При запуске струй возникают существенные пульсации давления на прилегающих к соплу твердых поверхностях. Эта проблема существует в аэрокосмической технике [7]. В экспериментах [8] при взаимодействии лазерного излучения с веществом, когда радиус облучения меньше радиуса мишени, на мишени в процессе испарения материала наблюдаются существенные пульсации давления. Есть ряд предположений о природе пульсаций, например об автоколебательном режиме самозакранивания излучения продуктами эрозии [9], которые, однако, не объясняют многих полученных в экспериментах эффектов. Автор [8] предположил, что пульсации имеют газодинамическую природу.

Рассмотрим эрозионный факел как звуковую струю. Несомненно, что ионизационные процессы влияют на газодинамическую структуру струи, меняя положение характерных скачков уплотнения [10], однако качественно газодинамическая картина струи и эрозионного факела должна быть схожа. Предполагается мгновенное включение струи. До момента включения сила (полное давление), действующая на мишень, равна нулю. В начальный момент давление равно реактивной силе струи. Далее в движение захватывается газ затопленного пространства. Считалось, что газ с обратной стороны мишени неподвижен. График изменения полного давления на мишень $\hat{p} = \int_s p ds$ (боковые поверхности мишени не учитывались, т. е. мишень полагалась бесконечно тонкой) в зависимости от времени представлен на рис. 2 (величина \hat{p} нормирована на давление на срезе p_c и площадь пятна облучения). Сплошной линией нанесены расчетные данные, которые относятся к случаю $n = 1,1$, радиус мишени $r_m = 2r_c$ (r_c — радиус пятна облучения), отношение температуры поверхности мишени к температуре газа затопленного пространства $T_c/T_\infty = 2$, $\text{Re} = 10^3$. Точками нанесена экспериментальная кривая полного давления \hat{p} , предоставленная автором [8]. Приведены неопубликованные ранее данные, полученные при облучении лазерным импульсом поверхности магниевой мишени, когда радиус мишени вдвое превышает радиус пятна облучения и измеренная в эксперименте нерасчетность $n = 1,1$. Из графика видно, что амплитуда пульсаций в расчетах и эксперименте близка,

достигается отрицательное \hat{p} , что не может быть объяснено с точки зрения теории, предложенной в [9]. Кроме того, в [9] получены почти гармонические колебания давления, в газодинамическом же расчете пульсации носят нерегулярный характер, как и в экспериментах. Таким образом, сравнение расчетных и экспериментальных данных говорит в пользу механизма пульсаций, предложенного в [8].

Расчеты, проведенные для звуковых струй с различными значениями n , позволяют сделать вывод, что для струй с $n = 1-50$ с увеличением n время установления струи уменьшается и затухание пульсаций при росте n , отмеченное в экспериментах, означает выход струи на стационарный режим. Так, при $n = 50$ время установления струи в расчете составляет около 300 мкс, что вдвое меньше длительности эрозионного факела в [8], а при $n = 2$ — значительно превышает время существования эрозионного факела. Картина запуска звуковых и сверхзвуковых струй представляет самостоятельный интерес.

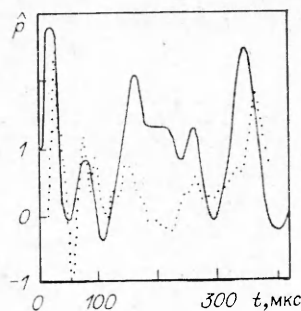
Запуск струй. Проблему запуска струи в двумерной постановке правомерно решать в рамках полной системы уравнений Навье — Стокса, поскольку в движение захватывается газ затопленного пространства, образуя вихревые течения с дозвуковой скоростью, которые могут влиять на структуру всего течения. Зарождение и развитие вихревой структуры наблюдалось в экспериментах при запуске звуковых и сверхзвуковых струй [11].

В работе проведена серия расчетов по запуску струй с различными нерасчетностями. При наличии примыкающей к соплу бесконечной поверхности (граничные условия 1 на рис. 1) вблизи сопла в затопленном пространстве образуется вихрь, который осуществляет приток газа вблизи стенки, откуда газ оттягивается струей за счет вязкости. Такая вихревая структура имела место в расчетах [2, 12].

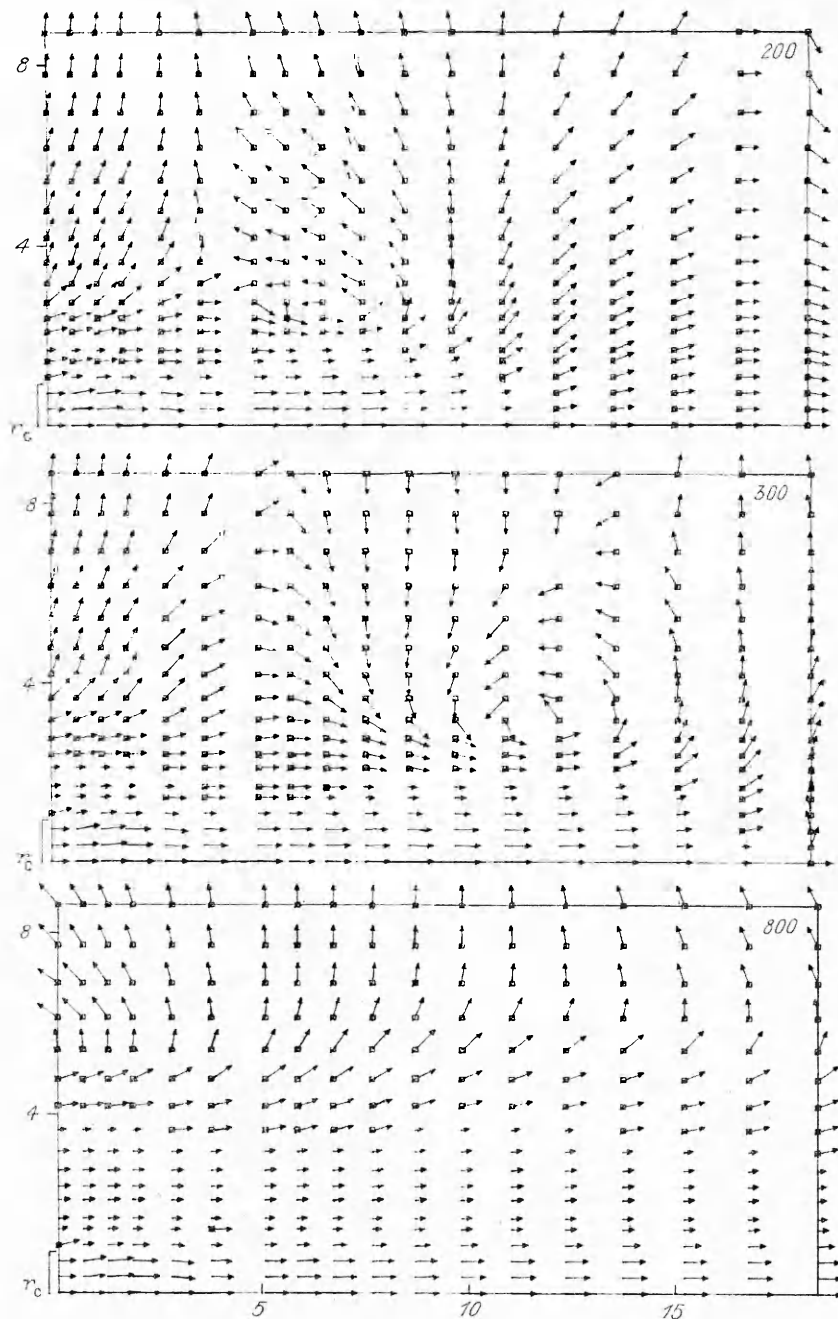
На рис. 3 показано развитие звуковой струи, полученное в расчетах данной работы, в случае отсутствия прилегающей к соплу твердой поверхности (граничные условия 3 на рис. 1) при $n = 2$, $T_c/T_\infty = 2$, $Re = 10^3$. Приведены поля течений в различные моменты времени после запуска струи. В правом верхнем углу указано число итераций, что может быть пересчитано в реальное время для конкретного размера сопла. Для условий экспериментов [8] это составляет соответственно 158, 237 и 632 мкс. На рис. 1 для того же случая приведена картина начала запуска струи на 25 итерациях, что отвечает 20 мкс.

Следует отметить, что в используемой графической системе все векторы нормируются на максимальную скорость, при этом, если величина вектора скорости менее примерно 15 % от максимальной скорости для данного случая, вектор рисуется стандартно с установленной длиной и его основание заключается в квадрат. Векторы же, близкие к максимальному, рисуются без квадрата в основании [13]. Это позволяет хорошо различить даже слабые течения газа. Из рис. 3 видно, что вблизи среза сопла зарождается вихревое течение, которое в процессе установления струи сносится вниз по потоку. Более развитые вихревые течения образуются при наличии небольшой прилегающей к соплу поверхности. В этом случае могут формироваться несколько последовательно уходящих по потоку вихрей. Из рис. 3 ясно также, что по мере установления струи формируется хорошо развитая эжекция. При наличии хотя бы небольшой прилегающей к соплу поверхности процесс эжекции сильно ослабляется.

Кроме того, существует еще ряд интересных течений, образующихся при запуске струй как в наземных условиях, так и в астрофизике [14] с образованием возвратного течения в лобовой части пробивающей дорожку в затопленном пространстве струи. Авторы [14] назвали такое течение



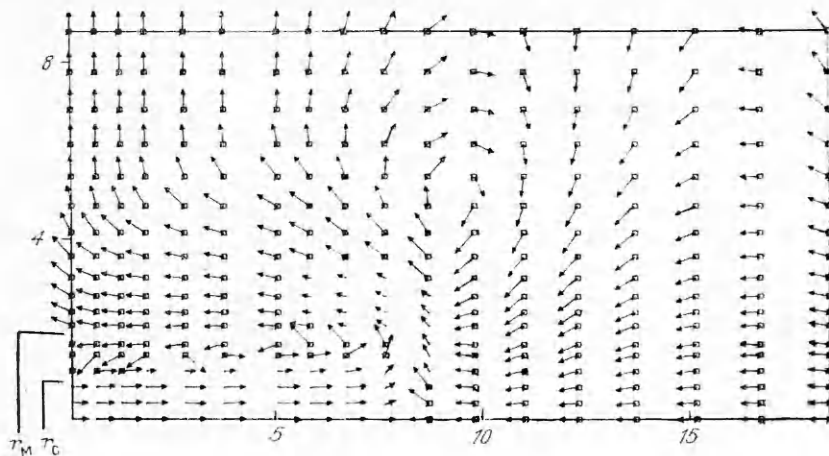
Р и с. 2



Р и с. 3

коконом, их расчеты проведены для $n = 1$. В [14] образование кокона происходит при истечении струи с низкой плотностью в более плотный газ, начиная от $M = 2$ и более, при этом расчеты проведены в рамках двумерной эйлеровой гидродинамики. В данной работе в рамках полной системы уравнений Навье — Стокса также получено возвратное течение (кочон) с формированием аналогичной [14] структуры вихревых течений в лобовой части струи.

На рис. 4 приведено поле течения, соответствующее истечению газа с $n = 2$ из звукового сопла в газ затопленного пространства с той же массой и температурой, втрое превышающей температуру в выходном сечении сопла $T_c/T_\infty = 1/3$, $Re = 10^3$ (ср. с рис. 13 из [14]). Таким образом,



Р и с. 4

эффект разворота потока развивается как при истечении разреженной струи в плотный газ, так и при истечении струи холодного газа в горячий. Последующая эволюция процесса видится в развитии турбулентного перемешивания вследствие нарастания вихревых течений.

Случай, приведенный на рис. 4, отвечает звуковой струе. Таким образом, при большой нерасчетности вследствие расширения струи в затопленное пространство образование кокона происходит при меньших числах Маха, чем в [14].

В заключение отметим, что решение стационарной задачи с приведенными выше начальными условиями требует 40—50 мин счета на БЭСМ-6 (250—300 итераций). Решение нестационарной задачи зависит от начальных и краевых условий и занимает для различных задач от 40 мин до нескольких часов счетного времени на БЭСМ-6.

Автор благодарит Л. И. Кузнецова за полезные обсуждения и предоставление экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белошицкий А. В., Бондарев Е. Н. Истечение вязкого газа из цилиндрического канала в вакуум // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1981.— № 1.
2. Ковалев Б. Д., Мышенков В. И. Расчет вязкой сверхзвуковой струи, истекающей в затопленное пространство // Учен. зап. ЦАГИ.— 1978.— Т. 9, № 2.
3. Ковалев Б. Д., Мышенков В. И. Расчет вязкой сверхзвуковой струи, истекающей в спутный поток // Учен. зап. ЦАГИ.— 1978.— Т. 9, № 3.
4. Березин Ю. А., Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Об одной неявной схеме течения вязкого теплопроводного газа // ЧМСС.— 1972.— Т. 3, № 4.
5. Березин Ю. А., Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Разностный метод решения задач обтекания в «естественных» координатах // Аэромеханика.— М.: Наука, 1976.
6. Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей.— М.: ИЛ, 1964.
7. Cline M. C., Wilmoth R. G. Computation of the Space Shuttle solid rocket booster nozzle start-up transient flow.— N. Y., 1984.— (Pap./AIAA; N 0462).
8. Кузнецов Л. И. Осцилляции давления на мишени при импульсном лазерном облучении // ЖТФ.— 1990.— Т. 60, № 8.
9. Углов А. А., Селищев С. В. Автоколебательные процессы при воздействии концентрированных потоков энергии.— М.: Наука, 1978.
10. Булгакова Н. М. Разлет плазменного сгустка в атмосферу // Неравновесные процессы в одно- и двухфазных системах.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1981.
11. Белавин В. А., Голуб В. В., Набоко И. М. Структура импульсных струй газов, истекающих через сверхзвуковые сопла // ПМТФ.— 1979.— № 1.
12. Walther R., Algermissen J. Numerische Integration der instationären Strömungsgleichungen am Beispiel eines ebenen Überschallfreistrahls // Forschung in Ingenieurwesen.— 1983.— V. 49, N 3.
13. Методические рекомендации по использованию графической системы СИГАМ.— Новосибирск: СНИИГГиМС, 1988.
14. Smorr L. L., Norman M. L., Winkler K.-H. A. Shocks, interfaces and patterns in supersonic jets // Physica D.— 1984.— V. 12, N 1.

г. Новосибирск

Поступила 5/V 1991 г.,
в окончательном варианте — 5/VII 1991 г.