лекулярной и континуумной областях, отнесенные к одному ряду пучка. На фиг. 4 видно, что при такой обработке результатов данные эксперимента по сопротивлению пучков располагаются в виде единой опытной зависимости, асимптотичной к предельным режимам течений разреженного газа, и не зависят от геометрических характеристик пучков.

Опытные данные по сопротивлению шахматных пучков цилиндров, обтекаемых дозвуковым потоком воздуха, во всей переходной области течения удовлетворительно описываются аппроксимирующей формулой

$$\mathrm{Eu} = \mathrm{Eu}_m[1 + 1{,}3(\mathrm{Eu}_m/\mathrm{Eu}_c)^{0{,}8}]^{-1}. \tag{7}$$

Зависимость (7) представлена на фиг. 4 сплошной линией, опытные точки соответствуют обозначениям, принятым на фиг. 1.

Для нахождения границ свободномолекулярной и континуумной областей для пучков цилиндров отношение $\mathrm{Eu}_c/\mathrm{Eu}_m$ можно представить в виде

$$\mathrm{Eu}_c/\mathrm{Eu}_m = 21\,\mathrm{Kn}_\mathrm{r}\mathrm{W}\left(\frac{t}{t-2}\right)\left[1 - 0{,}4\,\mathrm{M}^{1/2}(\mathrm{Kn}_\mathrm{r})^{-1/2} + 0{,}2\,\mathrm{M}^{2/3}(\mathrm{Kn}_\mathrm{r})^{-2/3}\right]. \tag{8}$$

Из (8) следует, что при $\mathrm{M} = 0{,}05$—$0{,}3$, $t = 2{,}1$—8 границы предельных режимов обтекания с точностью до 2% определяются следующими условиями: $\mathrm{Kn}_\mathrm{r} \leqslant 10^{-2} - 1{,}5\cdot 10^{-2}$ для режима сплошной среды, $\mathrm{Kn}_\mathrm{r} \geqslant 7{,}8$—$10{,}5$ для режима свободномолекулярного обтекания.

Из фиг. 4 видно, что эти условия выполняются при значениях $\mathrm{Eu}_c/\mathrm{Eu}_m$, равных 0,13 и 160 соответственно

Поступила 22 III 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гуров В. И., Иноземцева Е. Н. и др.** Сопротивление пакетов цилиндров, поперечно обтекаемых газом при низких числах Рейнольдса.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 1.
2. **Кошмаров Ю. А., Рыжов Ю. А.** Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977.

УДК 532.72

О СОВМЕСТНОМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСЕ К ЧАСТИЦЕ В ПОТОКЕ ГАЗА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. Д. Полянин

(*Москва*)

В работе [1—5] рассматривались линейные стационарные задачи о массо- и теплообмене частиц в поступательном потоке несжимаемой жидкости при малых числах Пекле. Аналогичные нелинейные задачи в случае произвольной кинетики поверхностной химической реакции анализировались в [6—9]. В [10] рассматривалась нелинейная задача о совместном тепломассопереносе к сферической частице в потоке сжимаемого газа в случае степенного закона изменения вязкости от температуры. В [11] исследовался массо- и теплообмен капли и твердой частицы любой формы в поступательном и сдвиговом потоках несжимаемой жидкости в случае, когда коэффициент диффузии (температуропроводности) произвольным образом зависит от концентрации (температуры).

1. Постановка задачи. Новые переменные. Рассмотрим стационарный тепломассообмен частицы (капли) любой формы с поступательным потоком сжимаемого газа, определяющие параметры которого произвольным образом зависят от температуры. Считается, что концентрация и температура на поверхности частицы и вдали от нее (на бесконечности) принимают постоянные значения. Пренебрегая эффектами термо- и бародиффузии и опуская члены порядка квадрата числа Маха, запишем в безразмерных переменных соответствующую задачу в виде

(1.1) $$\mathrm{Pe}_T\, c_p\rho(\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\, T) = \mathrm{div}(\lambda\, \mathrm{grad}\, T);$$

(1.2) $$\mathrm{Pe}_c\rho(\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\, u) = \mathrm{div}(\rho\sigma\, \mathrm{grad}\, u);$$

(1.3) $$r = r_s(\theta, \varphi),\ T = 1;\ r \to \infty,\ T \to 0;$$

(1.4) $$r = r_s(\theta, \varphi),\ u = 1;\ r \to \infty,\ u \to 0,$$

$$T = \frac{T_\infty - T_*}{T_\infty - T_s},\quad u = \frac{u_\infty - u_*}{u_\infty - u_s},\quad c_p = c_p(T) = \frac{c_{p*}(T_*)}{c_{p*}(T_\infty)},$$

$$\mathrm{Pe}_T = \frac{aU_\infty c_{p*}(T_\infty)\,\rho_\infty}{\lambda_*(T_\infty)},\quad \mathrm{Pe}_c = \frac{aU_\infty}{D(T_\infty)},\quad \rho = \frac{\rho_*}{\rho_\infty},$$

$$\lambda = \lambda(T) = \frac{\lambda_*(T_*)}{\lambda_*(T_\infty)},\quad \sigma = \sigma(T) = \frac{D(T_*)}{D(T_\infty)},\quad \lambda(0) = \sigma(0) = 1.$$

Здесь T_s, T_* и T_∞ — температура на поверхности частицы, в потоке газа и невозмущенная температура на бесконечности; u_s, u_* и u_∞ — относительная (молярная) концентрация на поверхности частицы, в потоке и на бесконечности; c_{p*} — удельная изобарная теплоемкость газа; ρ_* и ρ_∞ — плотность газа в потоке и на бесконечности; a — характерный размер частицы (для сферы — радиус); U_∞ — скорость набегающего потока; λ_* — теплопроводность газа; D — коэффициент диффузии; $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ — сферическая система координат, неподвижно связанная с частицей (угол θ отсчитывается от направления набегающего потока); $r = |\mathbf{r}|$ — отнесенный к характерному размеру частицы безразмерный полярный радиус; Pe_T и Pe_c — тепловое и диффузионное числа Пекле; $r = r_s(\theta, \varphi)$ — уравнение поверхности частицы; считается, что

$$T_s \neq T_\infty \text{ и } u_s \neq u_\infty\ (\lambda > 0,\ \sigma > 0).$$

При записи системы (1.1)—(1.4) предполагалось, что концентрация примеси мала и не влияет на среднемассовую скорость, плотность и температуру смеси (в частности, зависимостью коэффициентов переноса от концентрации пренебрегается).

Величины $\mathbf{v}$, ρ, T определяются из решения полной задачи обтекания тела вязким теплопроводным газом. Для дальнейшего понадобится только уравнение неразрывности

(1.5) $$\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,$$

а также условие равенства нулю нормальной составляющей скорости газа на поверхности частицы или капли (условие непротекания)

(1.6) $$r = r_s,\ (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = 0.$$

Здесь и далее для сокращения записи аргументы θ и φ у функции $r_s \equiv r_s(\theta, \varphi)$ опускаются, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности частицы.

Далее считается, что плотность газа является известной функцией температуры

(1.7) $$\rho = \rho(T)$$

(это предположение эквивалентно, например, следующему: вязкость газа зависит только от температуры $\mu = \mu(T_*)$, а число Шмидта постоянно). В целях общности явный вид зависимости (1.7) пока конкретизироваться не будет; некоторые конкретные примеры будут рассмотрены в п. **4**.

Для удобства анализа аналогично [11] вместо температуры T введем новую вспомогательную функцию

(1.8) $$\Phi = \Phi(\lambda, T) = \int_0^T \lambda(\xi)\, d\xi \quad \left(\Phi(\lambda, 0) = 0,\ \Phi'_T(\lambda, 0) = 1\right).$$

Исходная краевая задача (1.1)—(1.4) с учетом тождеств

$$c_p\rho\,(\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} T)\equiv\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}h)-h\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}),\quad h(T)=\int\limits_0^T c_p(\xi)\,d\xi,$$

$$\rho(\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} u)\equiv\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}u)-u\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})$$

и уравнения неразрывности (1.5) переформулируются следующим образом через функцию Φ:

(1.9) $$\mathrm{Pe}_T\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}h)=\Delta\Phi;\ r=r_s,\ \Phi=J(\lambda);\ r\to\infty,\ \Phi\to 0;$$

(1.10) $$\mathrm{Pe}_c\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}u)=\operatorname{div}(\omega\operatorname{grad} u);\ r=r_s,\ u=1;\ r\to\infty,\ u\to 0,$$

$$h=h(\Phi)\equiv h(T(\Phi)),\quad \omega=\omega(\Phi)\equiv\rho(T(\Phi))\sigma(T(\Phi)).$$

Здесь зависимость $T=T(\Phi)$ определяется путем обращения функции (1.8) (в линейном случае $\lambda=1$ имеем $T=\Phi$), а параметр $J(\lambda)$ задается выражением

(1.11) $$J(\lambda)=\int\limits_0^1\lambda(\xi)\,d\xi.$$

Цель работы состоит в определении средних чисел Нуссельта и Шервуда, которые являются основными характеристиками интенсивности процесса тепломассопереноса к частице:

(1.12) $$\mathrm{Nu}(\lambda,\mathrm{Pe}_T)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n}\,dS=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dS,$$

$$\mathrm{Sh}(\omega,\mathrm{Pe})=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\omega(\Phi)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$$

где $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали к поверхности частицы $S=\{r=r_s(\theta,\varphi)\}$; $\mathrm{Sh}(\omega,\mathrm{Pe})\equiv\mathrm{Sh}(\omega,\mathrm{Pe}_c,\mathrm{Pe}_T)$.

2. Метод решения. Вспомогательные уравнения. Далее считаем, что числа Пекле малы и одного порядка

(2.1) $$\mathrm{Re}_\infty\to 0,\ \mathrm{Pe}_T=\mathrm{Re}_\infty\mathrm{Pr}_\infty,\ \mathrm{Pe}_c=\mathrm{Re}_\infty\mathrm{Sc}_\infty,$$

$$\mathrm{Pr}_\infty=O(1),\ \mathrm{Sc}_\infty=O(1),$$

$$\mathrm{Re}=\frac{aU_\infty\rho_*}{\mu},\quad \mathrm{Pr}=\frac{\mu c_{p*}}{\lambda_*},\quad \mathrm{Sc}=\frac{\mu}{\rho_*D}.$$

Здесь Re, Pr, Sc — числа Рейнольдса, Прандтля, Шмидта; индекс ∞ соответствует невозмущенным значениям этих параметров на бесконечности.

Решение задачи (1.1)—(1.4) (или (1.8), (1.9)) ищем методом сращиваемых асимптотических разложений по малому параметру Re_∞ [1—11]. При этом вся область течения разбивается на две подобласти: внутреннюю $\Omega_1=\{r_s\leqslant r\leqslant O(\mathrm{Re}_\infty^{-1})\}$ и внешнюю $\Omega_\infty=\{O(\mathrm{Re}_\infty^{-1})\leqslant r\}$. Как обычно, во внешней области вводится «сжатая» координата $z=\mathrm{Re}_\infty r$ и решение в каждой из подобластей ищется по отдельности в виде внутреннего

(2.2) $$\Phi=\Phi_0+\mathrm{Pe}_T\Phi_1+o(\mathrm{Re}_\infty),\quad u=u_0+\mathrm{Pe}_c u_1+o(\mathrm{Re}_\infty),$$

$$r_s\leqslant r\leqslant O(\mathrm{Re}_\infty^{-1}),$$

$$\Phi_i=\Phi_i(r,\theta,\varphi),\ u_i=u_i(r,\theta,\varphi),\ i=0,1$$

и внешнего разложений

(2.3) $$\Phi=\Phi^{(0)}+\mathrm{Pe}_T\Phi^{(1)}+o(\mathrm{Re}_\infty),\quad u=u^{(0)}\mathrm{Pe}_c u^{(1)}+o(\mathrm{Re}_\infty),\quad O(\mathrm{Re}_\infty^{-1})\leqslant r,$$

$$\Phi^{(0)}=u^{(0)}=0,\ \Phi^{(1)}=\Phi^{(1)}(z,\theta,\varphi),\ u^{(1)}=u^{(1)}(z,\theta,\varphi),\ z=\mathrm{Re}_\infty r.$$

Здесь и далее для удобства разложение ведется непосредственно по параметрам Pe_T и Pe_c.

При построении асимптотического решения во внутренней области Ω_1 используются граничные условия на поверхности частицы, а во внешней области Ω_∞ — граничные условия на бесконечности; возникающие при решении неизвестные постоянные определяются путем использования процедуры сращивания [1—11].

Введение новой переменной (1.7) приводит к тому, что во внутренней Ω_1 и внешней Ω_∞ областях одновременно все члены внутреннего Φ_i и внешнего $\Phi^{(i)}$ асимптотических разложений (исходно нелинейной краевой задачи для температуры (1.1), (1.3)) удовлетворяют линейным уравнениям [11].

Подставляя представления (2.2) для функций Φ и u в уравнения (1.8), (1.9) и полагая $\mathrm{Pe}_T = \mathrm{Pe}_c = 0$, получаем, что нулевые члены внутреннего разложения определяются путем решения следующих уравнений с граничными условиями на поверхности частицы:

$$(2.4)\qquad \Delta\Phi_0 = 0;\ r = r_s,\ \Phi_0 = J(\lambda);\ r \to \infty,\ \Phi_0 \to 0;$$

$$(2.5)\qquad \mathrm{div}(\omega(\Phi_0)\mathrm{grad}\, u_0) = 0;\ r = r_s,\ u_0 = 1;\ r \to \infty,\ u_0 \to 0.$$

Граничные условия на бесконечности в (2.4), (2.5) получены из условия сращивания с нулевыми членами внешнего разложения (2.3).

Решения задач (2.4), (2.5) можно выразить через решение простейшей линейной вспомогательной задачи для обычного уравнения Лапласа

$$(2.6)\qquad \Delta c_0 = 0;\ r = r_s,\ c_0 = 1;\ r \to \infty,\ c_0 \to 0,$$

которое хорошо известно для целого ряда частиц различной формы. В частности, для сферической частицы $c_0 = r^{-1}$.

Выбирая надлежащим образом точку отсчета радиуса-вектора $\mathbf{r}$, выражение для c_0 (2.6) как для гармонической функции, стремящейся к нулю при $r \to \infty$, можно записать в виде [2]

$$(2.7)\qquad c_0 = \mathrm{Sh}(1,\ 0)r^{-1} + O(r^{-3}),$$

где Sh (1, 0) — среднее число Шервуда, соответствующее массопереносу к частице в неподвижной несжимаемой жидкости $\rho = 1$ в случае постоянного коэффициента диффузии $\sigma = 1$ (2.6).

Решение задачи (2.4) можно представить в форме

$$(2.8)\qquad \Phi_0 = J(\lambda)c_0.$$

Решение задачи (2.5) ищем в виде

$$(2.9)\qquad u_0 = f(\Phi_0)f^{-1}(J(\lambda)),\ f(0) = 0,$$

где функция f определяется путем подстановки этого выражения в уравнение (2.5) с последующим сопоставлением с уравнением для распределения температуры (2.4). В результате такого сопоставления получаем

$$(2.10)\qquad f(\Phi_0) = \int\limits_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\omega(\Phi)} \int\limits_0^{T_0} \frac{\lambda(T)\,dT}{\rho(T)\,\sigma(T)} = \Phi\left(\frac{\lambda}{\rho\sigma},\ T_0\right),\quad \Phi_0 = \Phi(\lambda,\ T_0),$$

где для наглядности выписано также соответствующее выражение через нулевой член внутреннего разложения температуры T_0.

Средние числа Нуссельта и Шервуда (1.12), определяемые нулевыми членами внутреннего разложения (2.6)—(2.10), имеют вид

$$(2.11)\qquad \mathrm{Nu}(\lambda,\ 0) = J(\lambda)\,\mathrm{Sh}(1,\ 0),\quad \mathrm{Sh}(\omega,\ 0) = J(\lambda)\,J^{-1}\left(\frac{\lambda}{\rho\sigma}\right)\mathrm{Sh}(1,\ 0).$$

При выводе этой формулы было учтено равенство $f(J(\lambda)) = J(\lambda/\rho\sigma)$.

Уравнения для первых членов внешнего разложения (2.3) получим, исходя из следующих предельных свойств функций, определяющих задачу (1.9), (1.10), при $r \to \infty$:

$$\rho \to 1,\ \lambda \to 1,\ \sigma \to 1,\ \omega \to 1,\ T \to \Phi,\ h \to \Phi,\ \mathbf{v} \to \mathbf{i}.$$

Здесь **i** — единичный вектор, параллельный невозмущенному вектору скорости жидкости на бесконечности.

Уравнения для $\Phi^{(1)}$ и $u^{(1)}$ имеют вид

$$(2.12)\qquad \left(\mathbf{i}\cdot\mathrm{grad}_{z_T}\Phi^{(1)}\right)=\Delta_{z_T}\Phi^{(1)},\quad z_T\to\infty,\quad \Phi^{(1)}\to 0,$$
$$\left(\mathbf{i}\cdot\mathrm{grad}_{z_c}u^{(1)}\right)=\Delta_{z_c}u^{(1)},\quad z_c\to\infty,\quad u^{(1)}\to 0,$$
$$z_T=\mathrm{Pe}_T r,\quad z_c=\mathrm{Pe}_c r.$$

Эти уравнения с точностью до переобозначений совпадают с аналогичным уравнением для линейного случая [2]. Поэтому решения уравнений (2.12), удовлетворяющие условию сращивания с нулевыми членами внутреннего разложения (2.6)—(2.10), могут быть записаны в форме

$$(2.13)\qquad \Phi^{(1)}=\mathrm{Nu}(\lambda,0)\,z_T^{-1}\exp\left[\frac{1}{2}z_T(\eta-1)\right],\quad \eta=\frac{(\mathbf{i}\cdot\mathbf{r})}{r}=\cos\theta,$$
$$u^{(1)}=\mathrm{Sh}(\omega,0)\,z_c^{-1}\exp\left[\frac{1}{2}z_c(\eta-1)\right].$$

Вторые члены разложения этих выражений в ряд по малым z_T и z_c в силу представления (2.3) и условия сращивания определяют следующие граничные условия на бесконечности для первых членов внутреннего асимптотического разложения:

$$(2.14)\qquad r\to\infty,\ \Phi_1\to(1/2)\mathrm{Nu}(\lambda,0)(\eta-1),\ u_1\to(1/2)\mathrm{Sh}(\omega,0)(\eta-1).$$

Рассуждая аналогично [11], можно показать, что уравнения и граничные условия, правильно описывающие первые два члена внутреннего разложения (2.2), имеют вид

$$(2.15)\qquad \mathrm{Pe}_T\,\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}h)_0=\Delta\Phi,\ \Phi=\Phi_0+\mathrm{Pe}_T\,\Phi_1,$$
$$r=r_s,\ \Phi=J(\lambda);\ r\to\infty,\ \Phi\to(1/2)\mathrm{Pe}_T\,\mathrm{Nu}(\lambda,0)(\eta-1);$$
$$(2.16)\qquad \mathrm{Pe}_c\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}u)_0=\mathrm{div}(\omega(\Phi)\mathrm{grad}\,u),\ u=u_0+\mathrm{Pe}_c u_1,$$
$$r=r_s,\ u=1;\ r\to\infty,\ u\to(1/2)\mathrm{Pe}_c\mathrm{Sh}(\omega,0)(\eta-1).$$

Краевые задачи (2.15), (2.16) записаны с точностью до $o(\mathrm{Re}_\infty)$, в чем можно убедиться путем непосредственного сопоставления уравнений и граничных условий (1.9), (1.10) и (2.15), (2.16) с учетом соотношений (2.2), (2.4), (2.5), (2.14); индекс нуль снизу в левой части уравнений (2.15), (2.16) соответствует величинам, в которые подставлены нулевые члены внутреннего разложения Φ_0 и u_0.

Далее будем искать решение неоднородных уравнений (2.15), (2.16) непосредственно для величин Φ и u.

Решение тепловой части задачи (2.15) ищем в виде суммы

$$(2.17)\qquad \Phi=\overline{\Phi}+\delta\Phi,$$

где слагаемые удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям:

$$(2.18)\qquad \Delta\overline{\Phi}=0;\ r=r_s,\ \overline{\Phi}=J(\lambda);\ r\to\infty,\ \overline{\Phi}\to-(1/2)\mathrm{Pe}_T\mathrm{Nu}(\lambda,0);$$
$$(2.19)\qquad \Delta\delta\Phi=\mathrm{Pe}_T\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}h)_0;$$
$$r=r_s,\ \delta\Phi=0;\ r\to\infty,\ \delta\Phi\to(1/2)\mathrm{Pe}_T\mathrm{Nu}(\lambda,0)\eta.$$

Распределение относительной концентрации ищем в виде

$$(2.20)\qquad u=\overline{u}+\delta u,$$

где слагаемые являются решениями следующих краевых задач:

$$(2.21)\qquad \mathrm{div}(\omega(\overline{\Phi})\mathrm{grad}\,\overline{u})=0;$$
$$r=r_s,\ \overline{u}=1;\ r\to\infty,\ \overline{u}\to-(1/2)\mathrm{Pe}_c\mathrm{Sh}(\omega,0);$$

$$\text{(2.22)}\qquad \operatorname{div}(\omega(\Phi)\operatorname{grad}\delta u) = -\operatorname{div}\{[\omega(\Phi) - \omega(\overline{\Phi})]\operatorname{grad}\bar{u}\} + \\ + \mathrm{Pe}_c \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} u)_0;\ r = r_s,\ \delta u = 0;\ r \to \infty,\ \delta u \to \\ \to (1/2)\mathrm{Pe}_c \mathrm{Sh}(\omega, 0)\eta.$$

Из уравнений (2.18), (2.19), (2.21), (2.22) следует, что $\delta\Phi = O(\mathrm{Re}_\infty)$, $\delta u = O(\mathrm{Re}_\infty)$.

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что решение задачи (2.18) может быть представлено через функцию c_0 (2.6), (2.7) в виде

$$\text{(2.23)}\qquad \overline{\Phi} = [J(\lambda) + (1/2)\mathrm{Pe}_T\, \mathrm{Nu}(\lambda, 0)]c_0 - (1/2)\mathrm{Pe}_T\, \mathrm{Nu}(\lambda, 0).$$

Решение задачи (2.21) ищем в виде

$$\text{(2.24)}\qquad \bar{u} = Af(\overline{\Phi}) + B, \quad f(\overline{\Phi}) = \int\limits_0^{\overline{\Phi}} \frac{d\Phi}{\omega(\Phi)}.$$

Выражение (2.24) в силу гармоничности функции $\overline{\Phi}$ (2.18) при любых значениях параметров A и B является решением уравнения (2.21). Явный вид постоянных A и B определяется путем решения линейной алгебраической системы

$$\text{(2.25)}\qquad 1 = Af(J(\lambda)) + B, \quad -\frac{1}{2}\mathrm{Pe}_c\, \mathrm{Sh}(\omega, 0) = \\ = Af\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Pe}_T\, \mathrm{Nu}(\lambda, 0)\right) + B,$$

которая является следствием граничных условий на поверхности частицы и на бесконечности для функций $\overline{\Phi}$ и $\bar{u}$ (2.18), (2.21). Ограничиваясь главным членом разложения функции f при $\mathrm{Pe}_T \to 0$ (остальные члены учитывать не нужно, так как исходная система (2.15), (2.16) имеет точность только $o(\mathrm{Re}_\infty)$) во втором уравнении (2.25) и разрешая эту систему, с учетом (2.11) получаем следующие выражения для коэффициентов:

$$\text{(2.26)}\qquad A = J^{-1}\left(\frac{\lambda}{\rho\sigma}\right)\left[1 + \frac{1}{2}(\mathrm{Pe}_c - \mathrm{Pe}_T)\, J(\lambda)\, J^{-1}\left(\frac{\lambda}{\rho\sigma}\right)\mathrm{Sh}(1, 0)\right] + o(\mathrm{Re}_\infty), \\ B = -\frac{1}{2}(\mathrm{Pe}_c - \mathrm{Pe}_T)\, J(\lambda)\, J^{-1}\left(\frac{\lambda}{\rho\sigma}\right)\mathrm{Sh}(1, 0)\, o(\mathrm{Re}_\infty).$$

3. Интерпретация слагаемых. Средние числа Нуссельта и Шервуда. Прежде чем перейти к анализу уравнений (2.19), (2.22), рассмотрим сначала специальный случай капли или частицы сферической формы ($r_s \equiv 1$), который позволит дать интерпретацию величинам $\overline{\Phi}$, $\bar{u}$ и $\delta\Phi$, δu.

По формуле [8, 9]

$$\text{(3.1)}\qquad \langle w \rangle = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{\Sigma_r} w\, d\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi} w(r, \eta, \varphi)\, d\varphi\, d\eta \qquad (\eta = \cos\theta)$$

введем оператор поверхностного среднего; Σ_r — поверхность сферы радиуса r.

Отметим, что для любых функций w, зависящих только от радиальной координаты r, справедливо равенство $\langle w(r) \rangle = w(r)$ и оператор среднего (3.1) перестановочен с оператором дифференцирования по r. Учтем также, что в рассматриваемом случае сферической частицы решение не зависит от координаты φ ($\partial/\partial\varphi = 0$), а нулевые члены внутренних разложений (2.2) в силу симметрии задач (2.4), (2.5) зависят только от r: $\Phi_0 = \Phi_0(r) = J(\lambda)r^{-1}$, $u_0 = u_0(r)$. Так как для Φ и u справедливо представление (2.2), то для любой аналитической функции G с точностью до $o(\mathrm{Re}_\infty)$ справедлива формула

$$\text{(3.2)}\qquad \langle G(\Phi, u) \rangle = G(\langle \Phi \rangle, \langle u \rangle),$$

которая доказывается путем непосредственной проверки.

Используя указанные свойства и интегрируя аналогично [8, 9] уравнения и граничные условия (2.15), (2.16) по φ и η в тех же пределах, что и в (3.1), для средних получаем

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}\langle\Phi\rangle = 0; \tag{3.3}$$

$$r = 1,\ \langle\Phi\rangle = J(\lambda);\ r \to \infty,\ \langle\Phi\rangle \to -(1/2)\mathrm{Pe}_T\mathrm{Nu}(\lambda,\ 0);$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\omega(\langle\Phi\rangle)\frac{d}{dr}\langle u\rangle = 0; \tag{3.4}$$

$$r = 1,\ \langle u\rangle = 1;\ r \to \infty,\ \langle u\rangle \to -(1/2)\mathrm{Pe}_c\mathrm{Sh}(\omega,\ 0).$$

При выводе уравнений (3.3), (3.4) были учтены равенства $\langle\eta\rangle = 0$, $\langle\rho v_r\rangle = 0$, второе из них является следствием уравнения неразрывности (1.5) и условия непротекания через поверхность частицы (1.6).

Средние числа Нуссельта и Шервуда (1.12) с точностью до $o(\mathrm{Re}_\infty)$ определяются формулами

$$\mathrm{Nu} = -\left[\frac{d\langle\Phi\rangle}{dr}\right]_{r=1},\quad \mathrm{Sh} = -\left[\omega(\langle\Phi\rangle)\frac{d\langle u\rangle}{dr}\right]_{r=1}. \tag{3.5}$$

Сопоставление уравнений и граничных условий (2.18), (2.21) и (3.3), (3.4) показывает, что в случае сферической частицы имеют место равенства

$$\overline{\Phi} = \langle\Phi\rangle,\ \delta\Phi = \Phi - \langle\Phi\rangle;\ \overline{u} = \langle u\rangle,\ \delta u = u - \langle u\rangle. \tag{3.6}$$

Формулы (3.6) означают, что $\overline{\Phi}$ и $\overline{u}$ являются поверхностными средними величинами, а $\delta\Phi$ и δu — отклонениями исходных величин Φ и u от их среднего значения.

Из указанного сопоставления с учетом выражений (3.5) получаем, что вторые слагаемые $\delta\Phi$ и δu (2.17), (2.20) не дают вклада в интегральные притоки тепла и вещества на поверхность частицы. Это, в свою очередь, означает, что в разложении функций $\delta\Phi$ и δu при $r \to \infty$ не содержится «источниковый» член, пропорциональный r^{-1}. Последнее утверждение доказывается интегрированием уравнений (2.19), (2.22) по контрольному объему газа V, заключенному между поверхностью частицы S и поверхностью сферы Σ_R радиуса R, целиком охватывающей частицу. Переходя далее от объемного интеграла к поверхностным (по S и Σ_R) по формуле Остроградского — Гаусса и устремляя $R \to \infty$, получаем, что поверхностные интегралы от правых частей уравнений (2.19), (2.22) обращаются в нуль (в силу свойств нулевых членов разложения Φ_0 и u_0 условия непротекания (1.6) и граничных условий на поверхности частицы). Отсутствие «источникового» члена в разложении $\delta\Phi$ и δu при $r \to \infty$ следует из того, что один (по поверхности сферы S) из оставшихся двух поверхностных интегралов (соответствующих левой части уравнений (2.19), (2.22)), как было указано ранее, обращается в нуль.

Аналогичным образом можно трактовать величины $\delta\Phi$ и δu в общем случае частиц любой формы. Для этого рассмотрим семейство поверхностей $c_0 = \mathrm{const}$ (в случае сферической частицы это семейство в силу равенства $c_0 = r^{-1}$ состоит из поверхностей концентрических сфер постоянного радиуса $r = \mathrm{const}$). В силу (2.23), (2.24) на этих поверхностях также будут постоянными величины $\overline{\Phi} = \mathrm{const}$ и $\overline{u} = \mathrm{const}$. Поверхность частицы соответствует значению $c_0 = 1$, а вдали от частицы поверхности $c_0 = \mathrm{const}$ ввиду (2.7) асимптотически стремятся к сферической форме при $r \to \infty$. Вдали от частицы уравнения (2.19), (2.22) «забывают» о ее форме (т. е. структура решения при $r \to \infty$ будет той же, что и для сферической частицы), поэтому асимптотические разложения функций $\delta\Phi$ и δu при $r \to \infty$ не должны содержать «источниковых» членов, пропорциональных r^{-1}. Учитывая сказанное, проинтегрируем уравнения (2.19), (2.22) по контрольному объему V и перейдем к поверхностным интегралам по S и Σ_R. Рассуждая далее аналогично тому, как это делалось ранее, приходим к выводу, что величины $\delta\Phi$ и δu так же, как и в случае сферической частицы, не дают вклада в средние числа Нуссельта и Шервуда. Последнее означает, что функции $\delta\Phi$ и δu можно трактовать как флуктуации величин Φ и u от своего среднего значения $\bar{\Phi}$ и $\bar{u}$ на поверхностях $c_0 = \text{const}$.

Используя формулы (2.23), (2.24), (2.26) для средних чисел Нуссельта и Шервуда, с точностью до $o(\mathrm{Re}_\infty)$ получаем

$$\text{(3.7)}\quad \mathrm{Nu}(\lambda, \mathrm{Pe}_T) = J(\lambda)\,\mathrm{Sh}(1, 0)\left[1 + \frac{1}{2}\mathrm{Pe}_T\,\mathrm{Sh}(1, 0)\right],$$

$$\mathrm{Sh}(\omega, \mathrm{Pe}) = \mathrm{Sh}(\omega, 0)\left[1 + \frac{1}{2}\mathrm{Pe}_T\,\mathrm{Sh}(1, 0) + \frac{1}{2}(\mathrm{Pe}_c - \mathrm{Pe}_T)\times\right.$$

$$\left.\times\,\mathrm{Sh}(\omega, 0)\right] = \mathrm{Nu}(\lambda, \mathrm{Pe}_T)\,J^{-1}\left(\frac{\lambda}{\rho\sigma}\right)\left[1 + \frac{1}{2}(\mathrm{Pe}_c - \mathrm{Pe}_T)\,\mathrm{Sh}(\omega, 0)\right],$$

$$\mathrm{Sh}(\omega, 0) = J(\lambda)\,J^{-1}\left(\frac{\lambda}{\rho\sigma}\right)\mathrm{Sh}(1, 0).$$

Формулы (3.7) с помощью (2.1) могут быть записаны в виде

$$\text{(3.8)}\quad \mathrm{Nu}(\lambda, \mathrm{Re}_\infty) = J(\lambda)\,\mathrm{Sh}(1, 0)\left[1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}_\infty\,\mathrm{Pr}_\infty\,\mathrm{Sh}(1, 0)\right] + o(\mathrm{Re}_\infty),$$

$$\mathrm{Sh}(\omega, \mathrm{Re}_\infty) = J(\lambda)\,J^{-1}\left(\frac{\lambda}{\rho\sigma}\right)\mathrm{Sh}(1, 0)\left\{1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}_\infty\,\mathrm{Sh}(1, 0)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\mathrm{Pr}_\infty + (\mathrm{Sc}_\infty - \mathrm{Pr}_\infty)\,J(\lambda)\,J^{-1}\left(\frac{\lambda}{\rho\sigma}\right)\right]\right\} + o(\mathrm{Re}_\infty).$$

Из формул (3.8) видно, что при числе Льюиса — Семенова $\mathrm{Le} = \mathrm{Pr}_\infty/\mathrm{Sc}_\infty = 1$ (с указанной точностью) имеется аналогия между процессами тепло- и массопереноса к частице.

Замечание. Первую формулу (3.7) можно получить непосредственно из уравнения (2.15) аналогично тому, как это делалось в [11]. Для этого умножим обе части уравнения (2.15) на Φ_0 и проинтегрируем по контрольному объему газа V с учетом тождеств

$$\Phi_0\Delta\Phi \equiv \operatorname{div}(\Phi_0 \operatorname{grad}\Phi) - \operatorname{div}(\Phi \operatorname{grad}\Phi_0) + \Phi\Delta\Phi_0,$$

$$\Phi_0(c_p\rho\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}T)_0 = \Phi_0 \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}h)_0 \equiv \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}\zeta) - \zeta\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}),$$

$$\zeta = \zeta(\Phi_0) = \int\limits_0^{T_0(\Phi_0)} c_p(\xi)\,\Phi^{\cdot}(\lambda, \xi)\,d\xi,$$

последние члены которых обращаются в нуль в силу гармоничности функции Φ_0 (2.4) и уравнения неразрывности (1.5); здесь функция $T_0(\Phi_0)$ получена обращением выражения $\Phi_0 = \Phi(\lambda, T_0)$ (1.8). Переходя далее по формуле Остроградского — Гаусса к поверхностным интегралам, окончательно получаем

$$\text{(3.9)}\quad \sum_{j=1}^{6} I_j = 0,\quad I_1 = -\int\limits_S \Phi_0\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dS,\quad I_2 = \int\limits_S \Phi\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}\,dS,$$

$$I_3 = \mathrm{Pe}_T\int\limits_S \rho\zeta(\Phi_0)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS,\quad I_4 = \int\limits_{\Sigma_R}\Phi_0\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\Sigma_R,$$

$$I_5 = -\int\limits_{\Sigma_R}\Phi\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}\,d\Sigma_R,\quad I_6 = -\mathrm{Pe}_T\int\limits_{\Sigma_R}\rho\zeta(\Phi_0)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,d\Sigma_R.$$

При вычислении первых трех интегралов (3.9) учтем граничные условия на поверхности частицы (2.4), (2.15), определение среднего числа Нуссельта (1.12) и условие непротекания газа через поверхность частицы (1.6). При вычислении последних трех интегралов используем представления (2.7), (2.8) для функции Φ_0, граничное условие на бесконечности (2.15) для функции Φ и формулы $d\Sigma_R = O(R^2)$, $\zeta(\Phi_0) \simeq \Phi_0^2/2 = O(R^{-2})$,

$\mathbf{v} \simeq \mathbf{i}$, справедливые при больших R. Устремляя с учетом сказанного радиус сферы R к бесконечности, получаем следующие выражения для интегралов:

$$(3.10) \qquad I_1 = 4\pi J(\lambda)\,\mathrm{Nu}\,(\lambda,\ \mathrm{Pe}_T),\ I_2 = -4\pi J(\lambda)\,\mathrm{Nu}\,(\lambda,\ 0),$$
$$I_3 = I_4 = I_6 = 0,\ I_5 = -2\pi J(\lambda)\,\mathrm{Nu}\,(\lambda,\ 0)\,\mathrm{Sh}\,(1,\ 0).$$

Используя теперь соотношения (2.11), (3.9), (3.10), приходим к первой формуле (3.7).

4. Случай степенной зависимости вязкости от температуры. Частицы различной формы. Для частицы заданной формы задача определения интенсивности процесса конвективного тепломассообмена, согласно формулам (3.7), (3.8), сводится к вычислению интегралов $J(\lambda)$, $J(\lambda/\rho\sigma)$ (1.11) и определению среднего числа Шервуда $\mathrm{Sh}(1,\ 0)$, соответствующего решению линейной вспомогательной задачи для уравнения Лапласа (2.6).

Получим сначала выражения для интегралов J для некоторых типичных случаев.

Рассмотрим случай степенной зависимости вязкости от температуры

$$(4.1) \qquad \mu\,(T_*) = \mu_0 T_*^n, \quad \mu_0 = \mathrm{const}.$$

Далее, как и в [10], предполагается, что газ имеет постоянную теплоемкость и постоянные числа Прандтля Pr и Шмидта Sc. Выражение (4.1) вместе с этими предположениями соответствует следующим функциям, которые определяют задачу (1.1)—(1.4):

$$\lambda(T) = \omega(T) = \rho\sigma = [1 + (T_s/T_\infty - 1)T]^n.$$

Поэтому в случае степенной зависимости вязкости газа от температуры средние числа Нуссельта и Шервуда задаются формулами (3.7) (или (3.8)), где

$$(4.2) \qquad J\,(\lambda) = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1-(T_s/T_\infty)^{n+1}}{1-(T_s/T_\infty)}\right], \quad J\left(\frac{\lambda}{\rho\sigma}\right) = 1.$$

Формулы (3.8), (4.2) для случая сферической частицы $\mathrm{Sh}(1,\ 0) = 1$ с точностью до нормировки и переобозначений были получены в [10].

Исследуем теперь влияние сжимаемости газа на конвективный тепломассообмен частицы с потоком. Будем считать, что коэффициенты теплопроводности и диффузии постоянны и не зависят от температуры

$$(4.3) \qquad \lambda = \sigma = 1.$$

Учтем также, что для малых скоростей газа давление в потоке слабо отличается от невозмущенного давления на бесконечности (это отличие имеет порядок квадрата числа Маха). Это позволяет в уравнении состояния $p_* = \rho_* R T_*$ (p_* — давление, R — газовая постоянная) заменить величину p_* на $p_\infty = \rho_\infty R T_\infty$ и после перехода к безразмерным переменным для плотности получить следующее выражение:

$$(4.4) \qquad \rho = \rho(T) = [1 + (T_s/T_\infty - 1)T]^{-1}.$$

Из равенств (4.3), (4.4) следует, что средние числа Нуссельта и Шервуда определяются формулами (3.7), где

$$J\,(\lambda) = 1, \quad J\left(\frac{\lambda}{\rho\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{T_s}{T_\infty}\right).$$

Составим отношение полученного среднего числа Шервуда к вспомогательному числу Шервуда, соответствующему случаю несжимаемой жидкости:

$$\frac{\mathrm{Sh}\,(\omega,\ 0)\,|_{\rho=\rho(T)}}{\mathrm{Sh}\,(\omega,\ 0)\,|_{\rho=1}} = \frac{2T_\infty}{T_s + T_\infty}.$$

Из этой формулы видно, что сжимаемость газа приводит к уменьшению интенсивности процесса массопереноса к «горячей» частице при

$T_s > T_\infty$ (по сравнению с аналогичным процессом в несжимаемой жидкости) и увеличивает массоперенос в случае «холодной» частицы при $T_s < T_\infty$.

Приведем теперь несколько конкретных значений для среднего числа Шервуда Sh (1, 0) для частиц несферической формы (в случае сферы Sh (1, 0) = 1).

Для тонкого кругового диска справедлива формула [2]

$$\mathrm{Sh}\,(1,\ 0) = 2/\pi \approx 0{,}637.$$

Рассмотрим теперь частицу, которая представляет собой эллипсоид вращения с полуосями a и b, где a — экваториальный радиус, b — полярный радиус, расположенный вдоль оси вращения. Выбирая за характерный масштаб длины экваториальный радиус a для параметра Sh(1, 0), имеем [12]

$$\mathrm{Sh}\,(1,\ 0) = \begin{cases} (\chi^2 + 1)^{-1/2}\,[\mathrm{arcctg}\,\chi]^{-1}, & a \geqslant b, \\ (\chi^2 - 1)^{-1/2}\,[\mathrm{arcth}\,\chi]^{-1}, & a \leqslant b, \end{cases}$$

$$\chi = \left|\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1\right|^{-1/2}, \quad \mathrm{arcth}\,\chi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\chi+1}{\chi-1}\right).$$

Рассмотрим твердую «гантелевидную» частицу, состоящую их двух соприкасающихся сфер радиусов a_1 и a_2. Для среднего числа Шервуда Sh(1, 0) в этом случае имеем [13]

$$\mathrm{Sh}\,(1,\ 0) = -\frac{a_2}{a_1+a_2}\left[\psi\left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right) + \psi\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right) + 2\gamma\right], \tag{4.5}$$

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) \quad \left(\lim_{x\to 0} x\psi(x) = -1, \quad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2, \quad \psi(1) = -\gamma\right).$$

Здесь за характерный масштаб длины выбран радиус первой сферы a_1, $\psi = \psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции, $\Gamma = \Gamma(x)$ — гамма-функция, $\gamma = 0{,}577215\ldots$ — постоянная Эйлера.

В частном случае частицы, состоящей из двух соприкасающихся сфер равного радиуса $a_1 = a_2 = a$, из формулы (4.5) получаем

$$\mathrm{Sh}(1,\ 0) = 2\ln 2 \approx 1{,}386.$$

Замечание. В отличие от случая несжимаемой жидкости [11] в формулы (3.7), (3.8) нельзя добавить члены, пропорциональные $\mathrm{Pe}^2 \ln \mathrm{Pe}$, так как в случае вязкого теплопроводного сжимаемого газа уже неизвестно соответствующее асимптотическое разложение поля скоростей вдали от частицы (естественно, за исключением главного члена **i**). Поэтому для получения следующих членов асимптотического разложения по малому числу Рейнольдса нужно исследовать уже полную задачу, привлекая, помимо (1.1), (1.2), (1.5), еще и уравнения движения газа.

Поступила 1 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Acrivos A., Taylor T. D.** Heat and mass transfer from a single sphere in Stokes flow.— Phys. Fluids, 1962, vol. 5, N 4.
2. **Brenner H.** Forced convection heat and mass transfer at small Peclet numbers from a particle of arbitrary shape.— Chem. Engng Sci., 1963, vol. 18, N 2.
3. **Rimmer P. L.** Heat transfer from a sphere in a stream of small Reynolds number.— J. Fluid Mech., 1968, vol. 32, N 1.
4. **Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.** О массо- и теплообмене сферической частицы в ламинарном потоке вязкой жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
5. **Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сысков Ю. Н.** Диффузия к обтекаемой реагирующей частице произвольной формы.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 2.
6. **Taylor T. D.** Mass transfer from single spheres in Stokes flow with surface reactions.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1963, vol. 6, N 11.

7. **Гупало Ю. П., Полянин А. Д. и др.** Конвективная диффузия к твердой частице в потоке газа при нелинейной кинетике гетерогенной химической реакции.— ДАН СССР, 1977, т. 237, № 1.
8. **Полянин А. Д.** О конвективном массотеплообмене реагирующей частицы при малых числах Пекле.— ДАН СССР, 1982, т. 262, № 2.
9. **Полянин А. Д.** О химической реакции с выделением тепла на поверхности движущейся в газе теплопроводной частицы.— ПМТФ, 1982, № 1.
10. **Бенилов М. С., Рогов Б. В., Тирский Г. А.** Об ионном токе насыщения на электрический зонд в медленно движущейся плазме.— ПМТФ, 1982, № 3.
11. **Полянин А. Д.** Асимптотический анализ некоторых нелинейных задач о массо- и теплообмене частиц с потоком при малых числах Пекле.— ДАН СССР, 1982, т. 264, № 6.
12. **Хаппель Дж., Бреннер Г.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
13. **Reed L. D.** Low Knudsen number heat transfer from two spheres in contact.— Trans. ASME. J. Heat Transfer, 1975, N 4.

УДК 536.75+536—12.01+533.7

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА И СООТНОШЕНИЯ ВЗАИМНОСТИ ОНЗАГЕРА В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛОТНЫХ СМЕСЕЙ ГАЗОВ

В. И. Курочкин, С. Ф. Макаренко, Г. А. Тирский

(*Москва*)

В последние годы в литературе проявляется повышенный интерес к получению кинетических уравнений для плотных газов и газовых смесей и их решению в гидродинамическом приближении [1—10]. Наибольший практический успех в этом направлении, приводящий не только к гидродинамическим уравнениям, но и к уравнениям переноса с явными выражениями для кинетических коэффициентов, был достигнут на основе рассмотрения кинетической теории плотных газов для модели твердых сферических молекул, развитой Энскогом [11] с помощью неких интуитивных соображений. Энског получил обобщенное уравнение Больцмана, в котором он формально учитывал только парные столкновения [12]. Однако при учете изменения свободного объема, приходящегося на одну молекулу, и экранировки молекулами друг друга в этой теории фактически учитываются тройные корреляции. В дальнейшем было показано, что χ-фактор в уравнении Энскога есть не что иное, как локально-равновесная парная корреляционная функция [1].

Попытки расширить область применимости теории Энскога на более реальные потенциалы взаимодействия были сделаны в [2—7]. В [13] дано развитие метода Энскога на случай многоатомных газов. Сравнение рассчитанных по этой теории коэффициентов вязкости и теплопроводности для кислорода и водорода в широком диапазоне значений температуры и давления вплоть до жидкого состояния дало неплохое совпадение с экспериментом.

Обобщение теории Энскога на случай плотных газовых смесей сделано Торном [12]. Однако, как было показано в [14], результаты Торна не согласуются с выводами термодинамики необратимых процессов, в частности, не совпадают выражения для векторов диффузионных сил $\mathbf{d}_i$, полученные из кинетической теории и методами термодинамики необратимых процессов. Этот факт послужил причиной пересмотра уравнения Энскога для плотных смесей газов. В [15, 16] было предложено и исследовано модифицированное уравнение Энскога. В [16] оно применялось для смесей газов, для линеаризованной формы уравнения методом проекционных операторов были получены кинетические коэффициенты, которые удовлетворяли соотношениям взаимности Онзагера. Дальнейшее исследование модифицированного уравнения Энскога проведено в [17—19], в частности, для его решения применялся метод Чепмена — Энскога.

Следует отметить, что это уравнение выводится на основании тех же предпосылок, что и исходное уравнение Энскога. Модификация касается лишь вопроса о локализации функции χ, однако решение этого вопроса позволяет добиться соответствия между результатами кинетической теории плотных газов Энскога и термодинамикой необратимых процессов. Естественно, что аналогичная модификация кинетических уравнений и гидродинамических следствий из них может быть проведена и для теорий [2—7].

В данной работе на основе метода Чепмена — Энскога получены выражения для «физических» коэффициентов переноса (коэффициентов диффузии, термодиффузии, теплопроводности) и доказано, что они удовлетворяют соотношениям Онзагера. Кроме того, показано, что для плотных газовых смесей вектор $\mathbf{d}_i$, который появляется в методе Чепмена — Энскога, уже нельзя отождествить с термодинамическим вектором диффузионных сил, как это имеет место для разреженных газов. Уравнения переноса тепла и массы получены в виде, совпадающем с соответствующими выражениями, выведенными в термодинамике необратимых процессов.