

Здесь v_m — скорость потока в отсутствие сферы; значения v_m и $\text{grad } v_m$, а также массовой силы g_m вычисляются в точке q_i . Как следует из вывода, погрешность формулы (2.7) имеет порядок R^5 . При $R \neq 0$ за счет влияния границ потока погрешность может быть $\sim R^2 R^4$.

Согласно формуле (2.7) сила воздействия потока на сферу постоянного объема определяется ускорением жидкой частицы в отсутствие сферы и ускорением сферы и не зависит ни от скорости движения сферы в потоке, ни от скорости жидкости.

Формула (2.7) согласуется с формулой Н. Е. Жуковского [1]

$$F = \frac{3}{2}\rho Va$$

полученной для неподвижной сферы в потоке с потенциалом, равным произведению функции от координат на функцию от времени (a — абсолютное ускорение жидкости в точке, совпадающей с центром сферы, V — ее объем).

Для газового пузырька в отсутствие вязкости следует положить $F = 0$ в силу пренебрежимо малой массы газа. Тогда (2.7) дает, что ускорение газового пузырька равно трем ускорениям жидкости. Этот факт ранее был известен для однородного потока (без градиента скорости) [5].

Автор благодарит Г. Ю. Степанова за полезные замечания.

Поступила 24 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы. Собр. соч., т. 2, Гидродинамика. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1949.
2. Гуревич М. И. Аэродинамическое воздействие поезда на малое тело. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
3. Якимов Ю. Л. Движение цилиндра в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
4. Якимов Ю. Л. Силы, действующие на малую сферу в произвольном потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1971, № 9.
5. Биркгоф Г. Гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

УДК 539.374

О ВОЛНАХ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ С СИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

В. Л. Гонсовский, Ю. А. Россихин

(Воронеж)

Рассматриваются волны напряжений в вязкоупругой среде с сингулярным ядром наследственности. Показано, что в такой среде в отличие от моделей Максвелла и стандартного линейного тела распространяются волны, у которых напряжения меняются непрерывно при переходе через волновой фронт.

Задачи о распространении волн напряжений в полубесконечных вязкоупругих стержнях рассматривались в работах [1–5], в которых с помощью интегральных преобразований Лапласа и Фурье были получены решения для моделей Максвелла [4], Фойгта и стандартного линейного тела [5]. Однако использование интегральных преобразований вызывает определенные вычислительные трудности, связанные с переходом от изображения к оригиналу, для устранения которых часто используются приближенные методы: асимптотические формулы [6], разложения вблизи фронта [3], а также различные аппроксимации [7, 8].

Ниже исследуются волны напряжений в вязкоупругом стержне, наследственные свойства которого описываются соотношениями Больцмана — Вольтерра с сингулярным ядром наследственности [9].

Напряжение $\sigma(x, t)$ в вязкоупругом полубесконечном стержне с заданной на конце нагрузкой $\sigma(0, t)$ имеет вид [10]

$$(1) \quad \sigma(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \sum (0, p) \exp\{-pxc_{\infty}^{-1}\lambda(p) + pt\} dp$$

$$(2) \quad \sum (0, p) = \int_0^{\infty} \sigma(0, t) \exp(-pt) dt, \quad \lambda(p) = [1 + v_{\sigma} K(p)]^{1/2}$$

$$v_{\sigma} = \Delta J J_{\infty}^{-1}, \quad \Delta J = J_0 - J_{\infty}, \quad c_{\infty}^{-2} = \rho J_{\infty}$$

где J_0, J_{∞} — соответственно нерелаксированное и релаксированное значения податливости, $K(p)$ — трансформанта Лапласа ядра последействия, ρ — плотность среды.

Допустим, что граничное напряжение $\sigma(0, t)$ задано при помощи единичной функции Хевисайда $H(t)$

$$(3) \quad \sigma(0, t) = \sigma_0 H(t), \quad \Sigma(0, p) = \sigma_0 p^{-1}$$

Задача о распространении импульсной нагрузки в такой среде рассматривалась в [11].

Подставляя (3) в (1), получим

$$(4) \quad \sigma(x, t) = \frac{\sigma_0}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} p^{-1} \exp\{-p\lambda(p)xc_{\infty}^{-1} + pt\} dp$$

Рассмотрим в качестве ядра последействия дробно-экспоненциальную функцию Ю. Н. Работнова [9]

$$(5) \quad E_{\gamma}(-1, t, s_{\sigma}) = t^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t, s_{\sigma})^{\gamma}}{\Gamma[\gamma(n+1)]}, \quad K(p) = \frac{s_{\sigma}^{\gamma}}{s_{\sigma}^{\gamma} + p^{\gamma}}$$

Здесь $s_{\sigma(\varepsilon)}$ — частота ретардаций (релаксаций), γ — параметр дробности ($0 < \gamma \leq 1$).

Подставляя (5) в (4), с учетом (2) получим

$$(6) \quad \sigma(x, t) = \frac{\sigma_0}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} p^{-1} \exp[-p(p^{\gamma} + s_{\varepsilon}^{\gamma})^{1/2}(p^{\gamma} + s_{\sigma}^{\gamma})^{-1/2}xc_{\infty}^{-1} + pt] dp$$

$$(s_{\varepsilon}^{\gamma} s_{\sigma}^{\gamma} = J_0 J_{\infty}^{-1})$$

Подынтегральная функция в формуле (6) при $\gamma \neq 1$ имеет полюс первого порядка в точке $p = 0$ и точки разветвления $p = 0$ и $p = \infty$. Точки $p_{1,2} = (-1)^{1/\gamma} s_{\varepsilon, \sigma}$ не являются особыми, так как они попадают на второй лист римановой поверхности. К многозначным функциям теорема обращения применима лишь для первого листа римановой поверхности ($|\arg p| < \pi$), а поэтому интегрирование в формуле (6) следует вести по контуру, изображенному на фиг. 1, при $R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$. Учитывая, что интеграл (6) отличен от нуля при условии

$$(7) \quad \operatorname{Re}[pt - \lambda(p)xc_{\infty}^{-1}] \rightarrow -\infty, \quad |p| \rightarrow \infty, \quad 1/2\pi < |\arg p| < \pi$$

(условие прохождения волны через точку x), выражение для $\sigma(x, t)$ запишется в виде

$$(8) \quad \sigma(x, t) = \sigma_0 \left[1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{s} F(x, t, s) ds \right] H\left(t - \frac{x}{c_{\infty}}\right)$$

$$F(x, t, s) = \exp\left\{sxc_{\infty}^{-1} R_1^{1/2} R_2^{-1/2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - st\right\} \sin\left[sxc_{\infty}^{-1} R_1^{1/2} R_2^{-1/2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right]$$

$$R_1^2 = s_{\varepsilon}^{2\gamma} + 2(ss_{\varepsilon})^{\gamma} \cos(\pi\gamma) + s^{2\gamma}, \quad R_2^2 = s_{\sigma}^{2\gamma} + 2(ss_{\sigma})^{\gamma} \cos(\pi\gamma) + s^{2\gamma}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{\sin \pi\gamma}{s^{-\gamma} s_{\varepsilon}^{\gamma} + \cos \pi\gamma}, & \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{\sin \pi\gamma}{s^{-\gamma} s_{\sigma}^{\gamma} + \cos \pi\gamma} \end{aligned} \right)$$

Заметим, что при $\gamma = 1$ (модель стандартного линейного тела) выражение для напряжения исследовалось в работе [5].

Наряду с точным решением (8) представляет интерес разложение величины $\sigma(x, t)$ близки волнового фронта в ряд по степеням $(t - t_0)^\gamma$. Этот ряд получается на основе «прямого» метода, изложенного в работах [7, 8]

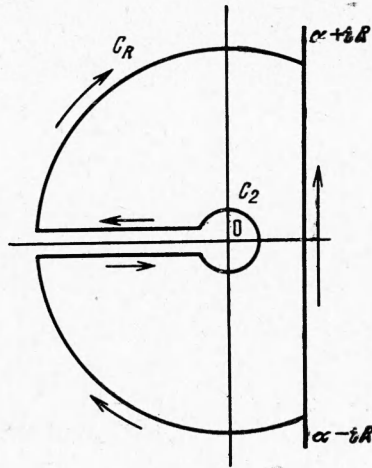
$$(9) \quad \sigma(x, t) \approx \sigma_0 \exp\{-1/2\gamma (s_\varepsilon^\gamma - s_\sigma^\gamma) t_0 (t - t_0)^{\gamma-1}\} \quad (\gamma \neq 1)$$

$$(10) \quad \sigma(x, t) \approx \sigma_0 [1 + a_2 t_0 (t - t_0) + (1/2 a_2^2 t_0 - a_3) t_0 (t - t_0)^2] \exp\{-a_1 t_0 (t - t_0)\} \quad (\gamma=1)$$

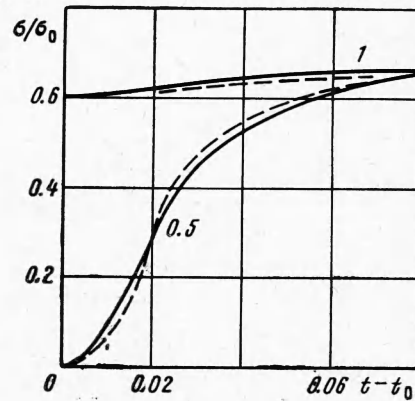
$$t_0 = x c_\infty^{-1}, \quad a_1 = 1/2 (s_\varepsilon - s_\sigma), \quad a_2 = 1/8 (s_\varepsilon - s_\sigma) (s_\varepsilon + 3s_\sigma)$$

$$a_3 = 1/16 (s_\varepsilon - s_\sigma) [(s_\varepsilon + s_\sigma)^2 + 4s_\sigma^2]$$

Принципиальное различие формул (7) и (8) состоит в том, что при дробном γ напряжение непрерывно вблизи волнового фронта в отличие от модели стандартного линейного тела, для которого напряжения терпят разрыв.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 2 приведены результаты расчета напряжения $\sigma(x, t)$ при помощи интеграла (8) (сплошные линии) и формул (9), (10) (пунктирные линии) при $t_0 = 2$ для $s_\varepsilon/s_\sigma = 1.5$. Значения параметра γ указаны цифрами у кривых.

Вычисления проводились на ЭВМ «Мир-1».

При дробном γ в стержне распространяется волна, значение напряжения на фронте которой равно нулю и меняется непрерывно при переходе через волновой фронт.

Поступила 1 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
2. Дейвис Р. М. Волны напряжений в твердых телах. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М., «Мир», 1965.
4. Lee E. H., Kanter I. Wave propagation in finite rods of viscoelastic material. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, No. 9, pp. 1115—1122.
5. Morrison J. A. Wave propagation in rods of voigt material with three-parameter models. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, No. 2, pp. 153—169.
6. Testa R. B. Longitudinal impact of a semi-infinite circular viscoelastic rod. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3, pp. 687—689.
7. Schapery R. A. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. 2. Proc. 4-th U. S. National Congress Appl. Mech., vol. 2, Berkeley, Calif., 1962, vol. 2. N. Y., ASME, 1962, pp. 1075—1085.
8. Arenz R. J. Uniaxial wave propagation in realistic viscoelastic materials. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 1, pp. 17—21.
9. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
10. Berry D. S., Hunter S. C. The propagation of dynamic stresses in viscoelastic rods. J. Mech. Phys. Solids, 1956, vol. 4, No. 2, pp. 72.
11. Гонцовский В. Л., Россизин Ю. А. О распространении импульсивной нагрузки в вязкоупругой среде. Тр. Научн.-исслед. ин-та матем. Воронежск. ун-та, 1972, вып. 6, стр. 63—66.