О ДРОБЛЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ КАПЛИ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

В. А. Бородин, Ю. Ф. Дитякин, В. И. Ягодкин

(*Москва*)

Распад капель жидкости рассмотрен в ряде теоретических работ. При этом использовались: метод малых возмущений (распад покоящейся капли [1]) и энергетический метод (распад капли под действием газового потока [2,3]).

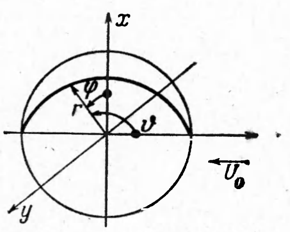
Изучать распад капли под действием газового потока можно также при помощи метода малых возмущений, подобно тому, как это сделано при исследовании устойчивости движения газового пузырька в жидкой среде [4].

В предлагаемой работе делается попытка теоретического изучения неустойчивых осесимметричных форм возмущений сферической капли идеальной жидкости, обтекаемой потоком другой идеальной жидкости, приводящих к ее распаду. Для решения этой задачи используется метод малых возмущений.

§ 1. Предполагается, что сферическая капля радиуса a идеальной жидкости (плотность ρ_1) движется относительно другой идеальной жидкости (плотность ρ_2) с постоянной скоростью U_0. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости капли относительно жидкости среды равен T.

Примем сферическую систему координат (r, ϑ, φ), начало которой находится в центре капли (фиг. 1).

Обозначим через $\Phi_1(r, \vartheta, \varphi, t)$ и $\Phi_2(r, \vartheta, \varphi, t)$ потенциалы скоростей возмущений для жидкости соответственно внутри и вне сферы радиуса a. Скорость потока на границе раздела $U(\vartheta) = {}^3/_2 U_0 \sin\vartheta$.



Потенциал возмущенного движения жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (1.1)$$

Скорости возмущений даются следующими выражениями:

$$v_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r},\qquad v_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta},\qquad v_\varphi=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \qquad (1.2)$$

Давление жидкости в возмущенном движении дается интегралом Лагранжа — Коши

$$\frac{p}{\rho}=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}-U_\vartheta v_\vartheta \qquad (1.3)$$

Зависимость потенциала скоростей от времени дается выражением

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi, t)=u(r, \vartheta, \varphi)\,e^{-i\beta t} \qquad (1.4)$$

где β — комплексная частота колебаний.

Граничными условиями задачи будут.

1°. Непрерывность нормальных составляющих на границе раздела

$$v_{n1}=v_{n2}+U_n \qquad \text{при } r=a+\zeta \qquad (1.5)$$

где ζ — радиальное отклонение возмущенной поверхности от сферы, а U_n — проекция скорости потока на нормаль к возмущенной поверхности раздела ($v_n = v_r$ с точностью до величин второго порядка малости)

$$F(r, \vartheta, \varphi, t) = r - a - \zeta(\vartheta, \varphi, t) = 0 \qquad (1.6)$$

Нормаль к возмущенной поверхности раздела с точностью до величин второго порядка малости дается уравнением

$$\mathbf{n} = \operatorname{grad} F = \mathbf{e}_r - \frac{1}{a}\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta - \frac{1}{a\sin\vartheta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \qquad (1.7)$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$ и $\mathbf{e}_\varphi$ — орты в сферической системе координат, так что

$$U_n = -U_\vartheta \frac{1}{a}\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta} \qquad (1.8)$$

Радиальное отклонение ζ определяется из соотношения

$$\frac{d\zeta}{dt} - \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)_{r=a} \qquad (1.9)$$

Положив

$$\zeta = \zeta^\circ(\vartheta, \varphi)\, e^{-i\beta t}$$

из уравнений (1.4), (1.5), (1.8) и (1.9), получим первое граничное условие в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1}{a}U_\vartheta \frac{1}{i\beta}\frac{\partial^2 u_1}{\partial r\partial\vartheta} = 0 \quad \text{при } r = a \qquad (1.10)$$

2°. Равенство разности возмущенных давлений на поверхности раздела давлению поверхностного натяжения

$$p_1 - p_2 = TH, \qquad H = -\frac{2}{a^2}\zeta - \frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}\right\} \qquad (1.11)$$

Здесь H — средняя кривизна поверхности раздела [1].

Учитывая соотношения (1.2), (1.3), (1.4), (1.9) и уравнение $\Delta u_1 = 0$, получим из (1.11) второе граничное условие

$$i\beta\rho_1 u_1 - i\beta\rho_2 u_2 + \frac{1}{a}U_\vartheta\rho_2\frac{\partial u_2}{\partial\vartheta} = -\frac{T}{i\beta}\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial r^3} + \frac{4}{a}\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\right) \quad \text{при } r = a \qquad (1.12)$$

Введем безразмерные величины

$$R = \frac{r}{a}, \qquad \sigma = i\beta\sqrt{\frac{a^3\rho_1}{T}}, \qquad M = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \psi = U_\vartheta\sqrt{\frac{a\rho_1}{T}} = \psi_0\sin\vartheta \qquad (1.13)$$

Здесь

$$\psi_0 = \frac{3}{2}U_0\sqrt{\frac{a\rho_1}{T}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{W}{M}}, \qquad W = \frac{aU_0^2\rho_2}{T}$$

Подставив (1.13) в (1.10) и (1.12), будем иметь

$$\sigma\frac{\partial u_1}{\partial R} - \psi_0\sin\vartheta\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial R\partial\vartheta} - \sigma\frac{\partial u_2}{\partial R} = 0 \quad \text{при } R = 1 \qquad (1.14)$$

$$\sigma^2 u_1 + \frac{\partial^3 u_1}{\partial R^3} + 4\frac{\partial^2 u_1}{\partial R^2} - M\sigma\left[\sigma u_2 - \psi_0\sin\vartheta\frac{\partial u_2}{\partial\vartheta}\right] = 0 \quad \text{при } R = 1 \qquad (1.15)$$

Амплитуды возмущенного потенциала скоростей u_1 и u_2 удовлетворяют уравнению Лапласа внутри сферы $R = 1$ и вне этой сферы соответственно.

§ 2. Частными (ограниченными) решениями уравнения Лапласа будут сферические функции

$$\begin{aligned} (u_1)_{mn} &= a_{mn}R^n P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi} \\ (u_2)_{mn} &= b_{mn}R^{-n-1} P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi} \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} &m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n \\ &n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right) \qquad (2.1)$$

В случае $\psi_0 = 0$ частные решения (2.1) удовлетворяют граничным условиям (1.14) и (1.15). Собственные значения задачи для этого случая — частоты колебаний сферической капли (Релей [1]) — даются выражением

$$\sigma^2 = -\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{nM+n+1} \tag{2.2}$$

В общем случае ($\psi_0 \neq 0$) напишем решения в виде

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (u_1)_{mn}, \qquad u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (u_2)_{mn} \tag{2.3}$$

Обозначив $x = \cos\vartheta$ и подставив (2.3) в (1.14) и (1.15), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left\{\left[\sigma n P_n^m(x) - n\psi_0 (x^2-1)\frac{d}{dx}P_n^m(x)\right] a_{mn} + \right.$$
$$\left. + \sigma(n+1) P_n^m(x) b_{mn}\right\} e^{im\varphi} = 0 \tag{2.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left\{[\sigma^2 + n(n-1)(n+2)] P_n^m(x) a_{mn} - M\sigma\left[\sigma P_n^m(x) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \psi_0 (x^2-1)\frac{d}{dx}P_n^m(x)\right] b_{mn}\right\} e^{im\varphi} = 0 \tag{2.5}$$

Используя функциональное соотношение для сферических функций

$$(x^2-1)\frac{dP_n^m}{dx} = \frac{n(n-m+1)}{2n+1} P_{n+1}^m - \frac{(n+1)(m+n)}{2n+1} P_{n-1}^m \tag{2.6}$$

преобразуем уравнения (2.4) и (2.5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{\infty} \left\{\left[-\frac{n^2(n-m+1)}{2n+1}\psi_0 P_{n+1}^m + n\sigma P_n^m + \frac{n(n+1)(n+m)}{2n+1}\psi_0 P_{n-1}^m\right] a_{mn} + \right.$$
$$\left. + (n+1)\sigma P_n^m b_{mn}\right\} e^{im\varphi} = 0 \tag{2.7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left\{[\sigma^2 + n(n-1)(n+2)] P_n^m a_{mn} + \left[\frac{n(n-m+1)}{2n+1} M\sigma\psi_0 P_{n+1}^m - \right.\right.$$
$$\left.\left. - M\sigma^2 P_n^m - \frac{(n+1)(n+m)}{2n+1} M\sigma\psi_0 P_{n-1}^m\right] b_{mn}\right\} e^{im\varphi} = 0 \tag{2.8}$$

Для того чтобы соотношения (2.7) и (2.8) выполнялись тождественно относительно координат φ и ϑ, необходимо приравнять нулю коэффициенты перед $e^{im\varphi}$ и $P_n^m(x)$. Это дает следующую бесконечную однородную систему уравнений для коэффициентов a_{mn} и b_{mn}:

$$-\frac{(n-1)^2(n-m)}{2n-1}\psi_0 a_{m,\,n-1} + n\sigma a_{mn} + \frac{(n+1)(n+2)(n+m+1)}{2n+3}\psi_0 a_{m,n+1} +$$
$$+ (n+1)\sigma b_{mn} = 0 \tag{2.9}$$

$$[\sigma^2 + n(n-1)(n+2)] a_{mn} + \frac{(n-1)(n-m)}{2n-1} M\sigma\psi_0 b_{m,\,n-1} -$$
$$- M\sigma^2 b_{mn} - \frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3} M\sigma\psi_0 b_{m,\,n+1} = 0 \tag{2.10}$$

$$(m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots;\ n = |m|,\ |m|+1,\ |m|+2, \ldots)$$

Для осесимметричных возмущений $m = 0$. Обозначив $a_{0n} = a_n$, $b_{0n} = b_n$, исключим константы b_n из (2.9) и (2.10). Так как в большинстве случаев отношение плотностей жидкостей среды и капли весьма мало, то произведем упрощение полученной системы уравнений, пренебрегая членами, содержащими величину M после замены

$$\psi_0 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{W}{M}}$$

согласно (1.13). Тогда будем иметь

$$c_{n,\,n-2}\,a_{n-2} + c_{nn}a_n + c_{n,\,n+2}\,a_{n+2} = 0 \qquad (n = 0,\,1,\,2,\,\ldots) \tag{2.11}$$

Здесь

$$c_{nn} = Z + n(n-1)(n+2) - \frac{9}{2}\,\frac{n^2(n+1)(2n^2+n-2)}{(4n^2-1)(2n+3)}\,W = Z + R_n - A_n W$$

$$c_{n,\,n-2} = \frac{9}{4}\,\frac{(n-1)^2(n-2)^2}{(2n-1)(2n-3)}\,W = C_{n-2}W \qquad Z = \sigma^2 \tag{2.12}$$

$$c_{n,\,n+2} = \frac{9}{4}\,\frac{(n+1)(n+2)^2(n+3)}{(2n+3)(2n+5)}\,W = B_n W$$

Как видим, система (2.11) распадается на две независимые системы уравнений для четных и нечетных значений n.

Условия разрешимости этих двух систем заключаются в равенстве нулю их определителей с элементами главной и соседних с ней диагоналей, получаемых по формулам (2.12) соответственно при четных и нечетных значениях n; остальные элементы определителей равны нулю.

Как видим, комплексная частота колебаний σ входит в полученные две системы только как $Z = \sigma^2$.

Приближенные значения Z можно получить, последовательно вырезая из определителей систем определители конечного порядка и приравнивая их нулю. Таким образом, будем получать алгебраические уравнения последовательно повышающейся степени относительно величины Z с коэффициентами, зависящими от одного параметра W.

Критические значения числа Вебера W, выше которых возмущения нарастают по времени ($\beta_i > 0$), определяют распад капли на части. Критические значения величины W соответствуют $\beta_i = 0$. Так как

$$Z = -\frac{a^3\rho_1}{T}\,\beta^2 \tag{2.13}$$

о на плоскости Z областью неустойчивости будет вся плоскость за исключением отрицательной действительной полуоси.

Собственные значения для случая Релея [1] лежат на действительной отрицательной полуоси плоскости Z. При возрастании числа W переход к неустойчивости соответствует либо переходу корня через нуль к действительным положительным значениям, либо переходу пары действительных корней в комплексные сопряженные значения.

Согласно (2.11) и (2.12) уравнения собственных значений соответственно при нечетных и четных индексах n имеют вид

$$\Delta(Z, W) = \lim_{n\to\infty}\Delta_n(Z, W) = 0, \qquad D(Z, W) = \lim_{n\to\infty} D_n(Z, W) = 0 \tag{2.14}$$

где

$$\Delta_n(Z, W) =$$

$$= \begin{vmatrix} Z + R_1 - A_1W & B_1W & 0 & \ldots \\ C_1W & Z + R_3 - A_3W & B_3W & \ldots \\ 0 & C_3W & Z + R_5 - A_5W & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & Z + R_{2n-3} - A_{2n-3}W & B_{2n-3}W \\ \cdots & 0 & C_{2n-3}W & Z + R_{2n-1} - A_{2n-1}W \end{vmatrix} \tag{2.15}$$

$$D_n(Z, W) =$$

$$= \begin{vmatrix} Z + R_2 - A_2W & B_2W & 0 & \dots & \\ C_2W & Z + R_4 - A_4W & B_4W & \dots & \\ 0 & C_4W & Z + R_6 - A_6W & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & Z + R_{2n-2} - A_{2n-2}W & B_{2n-2}W & \\ \dots & 0 & C_{2n-2}W & Z + R_{2n} - A_{2n}W & \end{vmatrix} \qquad (2.16)$$

Как не трудно убедиться (2.17)

$$\Delta_n(Z, W) = (Z + R_{2n-1} - A_{2n-1}W)\,\Delta_{n-1}(Z, W) - C_{2n-3}B_{2n-2}W^2\Delta_{n-2}(Z, W)$$

$$D_n(Z, W) = (Z + R_{2n} - A_{2n}W)D_{n-1}(Z, W) - C_{2n-2}B_{2n-2}W^2D_{n-2}(Z, W) \qquad (2.18)$$

причем

$$\Delta_n(Z, W) = Z^n + P_{n1}(W)\,Z^{n-1} + \ldots + P_{n,\,n-1}(W)\,Z + P_{nn}(W) \qquad (2.19)$$

где

$$P_{nk}(W) = p_{nk}^{(n-k)}W^k + p_{n,\,k-1}^{(n-k)}W^{k-1} + \ldots + p_{n1}^{(n-k)}W + p_{n0}^{(n-k)} \qquad (2.20)$$

а числа $p_{ns}^{(n-k)}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, k)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$p_{ns}^{(n-k)} = R_{2n-1}p_{n-1,\,s}^{(n-k)} - A_{2n-1}p_{n-1,\,s-1}^{(n-k)} + p_{n-1,\,s}^{(n-k-1)} - C_{2n-3}B_{2n-3}p_{n-2,\,s-2}^{(n-k)} \qquad (2.21)$$

Здесь

$$p_{ij}^{(m)} = 0 \quad \text{при } j > i - m,\ i < 0,\ j < 0,\ m < 0, \qquad p_{i0}^{(i)} = 1$$

Аналогично для $D_n(z, W)$ будем иметь

$$q_{ns}^{(n-k)} = R_{2n}\,q_{n-1,\,s}^{(n-k)} - A_{2n}q_{n-1,\,s-1}^{(n-k)} + q_{n-1,\,s}^{(n-k-1)} - C_{2n-2}B_{2n-2}\,q_{n-2,\,s-2}^{(n-k)}$$

Здесь (2.22)

$$q_{ij}^{(m)} = 0 \quad \text{при } j > i - m,\ i < 0,\ j < 0,\ m < 0, \qquad p_{i0}^{(i)} = 1$$

В частности, если в уравнениях (2.14) положить $Z = 0$, то получим рекуррентные формулы для определения коэффициентов полиномов $P_{nn}(W)$ и $Q_{nn}(W)$

$$p_{ns} = R_{2n-1}\,p_{n-1,\,s} \quad A_{2n-1}\,p_{n-1,\,s-1} - C_{2n-3}\,B_{2n-3}\,p_{n-2,\,s-2}$$

$$q_{ns} = R_{2n}\,q_{n-1,\,s} - A_{2n}\,q_{n-1,\,s-1} - C_{2n-2}\,B_{2n-2}\,q_{n-2,\,s-2} \qquad (2.23)$$

Из (2.15) и (2.16) при $n = 1$ имеем

$$p_{11} = -A_1, \qquad p_{10} = R_1 = 0, \qquad q_{11} = -A_2, \qquad q_{10} = R_2$$

Корни полиномов P_{nn} и Q_{nn} дадут значения W, выше которых формы возмущений, соответствующие им, неустойчивы. Если окажется, что все корни Z уравнений (2.14) действительны, то эти значения величины W будут критическими.

Для того чтобы корни Z какого-либо из уравнений (2.14) стали комплексными (при $W = 0$, как указывалось выше, все корни этих уравнений действительны и отрицательны), необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения при некотором значении W менял знак. Из этого условия можно найти критические значения W_k для случая наличия комплексных корней.

Для определения форм возмущений получим уравнения узловых линий на возмущенной поверхности капли. Из (1.2) при $m = 0$ (осевая симметрия возмущений) и $R = 1$ скорость поднятия поверхности капли дается соотношением

$$v_{r1} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n P_n(x) e^{-i\beta t} \tag{2.24}$$

Если переход к неустойчивости совершается при $Z = 0$, то $\beta = 0$ и коэффициенты a_n действительны и уравнения узловых линий возмущенной поверхности принимают вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2k a_{2k} P_{2k}(x) = 0 \tag{2.25}$$

если собственные значения и значения W_k определены из системы (2.11) при $n =$ четному числу и

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) a_{2k+1} P_{2k+1}(x) = 0 \tag{2.26}$$

при $n =$ нечетному числу.

Ввиду однородности систем (2.11) коэффициенты a_{2n} пропорциональны a_2, а коэффициенты a_{2n+1} пропорциональны a_1. Из уравнений (2.25) и (2.26) можно определить значения $x = \cos\vartheta$ и, следовательно, угла ϑ, соответствующие узловым линиям нейтрального возмущения. Таблицы полиномов Лежандра для значений индекса n от нуля до $n = 32$ можно найти в работе [5].

Деля левую и правую части уравнений системы (2.11) на величины C_{nn}, получим

$$a_n = \alpha_n a_{n-2} + \beta_n a_{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad \left(\alpha_n = -\frac{c_{n,\,n-2}}{c_{nn}},\ \beta_n = -\frac{c_{n,\,n+2}}{c_{nn}}\right) \tag{2.27}$$

При больших значениях n величины α_n и β_n имеют порядок

$$O\left(\frac{9}{16}\frac{W}{n}\right)$$

т. е. рассматриваемая система будет вполне регулярной [6], начиная с некоторого достаточно большого n.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{a_{2k+1}}{a_1} &= \alpha_3\alpha_5 \ldots \alpha_{2k+1} s_{2k+1}, & \gamma_{2k+1} &= \alpha_{2k+1}\beta_{2k-1} \\ \frac{a_{2k}}{a_2} &= \alpha_4\alpha_6 \ldots \alpha_{2k} s_{2k}, & \gamma_{2k} &= \alpha_{2k}\beta_{2k-2} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Считая коэффициенты a_1 и a_2 известными и отбрасывая уравнения, соответствующие $n = 0{,}2$ и $n = 1$, из (2.27) получим

$$\begin{aligned} s_3 &= 1 + \gamma_5 s_5, & s_4 &= 1 + \gamma_6 s_6 \\ s_5 &= s_3 + \gamma_7 s_7, & s_6 &= s_4 + \gamma_8 s_8 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{2k+1} &= s_{2k-1} + \gamma_{2k+3} s_{2k+3}, & s_{2k} &= s_{2k-2} + \gamma_{2k+2} s_{2k+2} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Решения систем (2.9) в непрерывных дробях имеют вид

$$s_{2k+1} = s_{2k-1}\left(\frac{1}{1 - \dfrac{\gamma_{2k+3}}{1 - \dfrac{\gamma_{2k+5}}{1 - \ldots}}}\right) \quad (s_1 = 1) \tag{2.30}$$

$$s_{2k} = s_{2k-2}\left(\frac{1}{1 - \dfrac{\gamma_{2k+2}}{1 - \dfrac{\gamma_{2k+4}}{1 - \ldots}}}\right) \quad (s_2 = 1) \tag{2.31}$$

§ 3. Из уравнений

$$P_{nn}(W) = 0 \quad (n = 1, 3, 5, \ldots), \qquad Q_{nn}(W) = 0 \quad (n = 2, 4, 6, \ldots) \tag{3.1}$$

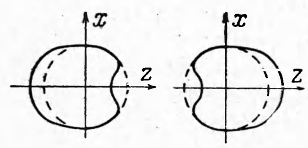
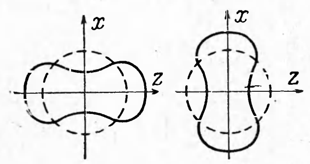
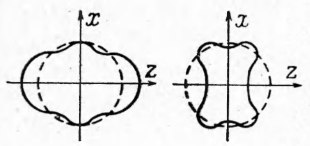
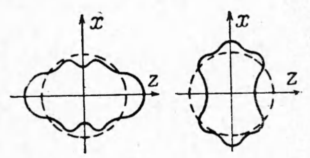
выведенных из (2.20) при $k = n$, с соотношениями из (2.23) для их коэффициентов получены последовательные приближения[1] значений корней W, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Порядок определителя	Корни уравнений						
	$P_{2n-1,\ 2n-1}(W) = 0$				$Q_{2n,\ 2n}(W) = 0$		
1					1.95		
2	0	5.833			1.65	6.63	
3	0	3.175	17.70		1.6288	4.042	15.194
4	0	2.966	6.65	38.35	1.628	3.716	7.288
5	0	2.946	5.22	11.70	1.626	3.670	5.935
6	0	2.943	5.12	8.016			5.580
7	0	2.943	4.92	7.565			
8	0			6.875			

Все корни уравнений (3.1) и (3.2) положительны.

Таблица 2

W	ϑ	Форма возмущений либо либо	Примечание
2.94	90°		Сдвиг по направлению потока
4.92	90°		
6.88	90°		
1.63	52°		Раздвоение по направлению потока или образование тора
3.67	47°.90°		Образование двух капель и тора или одного тора
5.58	40°		Образование двух капель и двух торов или тора

[1] Авторы благодарят Л. Н. Бритневу, которая принимала участие в проведении расчетов.

Уравнения узловых линий (2.25), (2.26) дают значения углов ϑ, приведенные в табл. 2. Там же даны схемы форм возмущений поверхности капли, соответствующие различным собственным значениям числа W, полученным по скорости деформации поверхности капли согласно (2.24).

Следовательно, система при нечетных значениях индекса n дает единственную форму возмущения — сдвиг по направлению потока, а при четных значениях индекса n имеют место различные формы возмущений (табл. 2), которые могут, в зависимости от значений числа W, привести к образованию капель или торов.

Зависимость дискриминанта уравнения (2.14) от величины W не меняет знака, как показали расчеты, проведенные для $0 \leqslant W \leqslant 8$; это значит, что уравнение (2.14) не имеет комплексных корней в этом интервале и значения числа W, приведенные в табл. 1 и 2, будут критическими и определяют распад капли. Следует заметить, что аналогичный вывод о действительности корней Z уравнения собственных значений был получен также в задаче об устойчивости движения газового пузырька [4].

Исследования распада капель различных жидкостей, обдуваемых газовым потоком, показывают, что между экспериментальными значениями критической величины W_k, полученными различными исследователями, имеются значительные расхождения. Так, для капель воды в работах [3,7] получено $W_k = 5$—7, а в работе [8] значения $W_k = 1.3$—1.8 при числах Рейнольдса обтекающего потока порядка $2 \cdot 10^3$. Наиболее достоверными значениями W_k следует считать, по-видимому, полученные в [8], так как только в этой работе экспериментально определялись как скорость потока, так и скорость капли и, следовательно, значения относительной скорости капли можно считать более точными, чем в работах [3,7].

Полученное критическое значение W_k, соответствующее первой неустойчивой форме возмущений, согласуется с результатами работы [8]. Это свидетельствует о слабом влиянии распределения давлений по поверхности капли на ее распад, так как в работе принималось потенциальное обтекание капли.

Поступила 28 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Релей, J. Теория звука, ОГИЗ, 1944, т. 2.
2. Hinze J. O. Fundamentals of the hydrodynamic mechanism of splitting in dispersion process. Amer. Inst. Chem. Eng. Journ., 1955, I, p. 200—209.
3. Isshiki N. Theoretical and experimental study of atomization of liquid drop in high speed gas stream. Rept. Transp. Techn. Research. Inst., 1959, No 35.
4. Hartunian R. A., Sears W. R. On the instability of small gas bubble moving uniformly in various liquids. Journ. Fluid Mech., 1957, vol. 3, Part I, p. 27—47.
5. Tallqvist C. Sechsstellige Tafeln der 32 ersten Kugelfunktionen. Acta Soc Scient. Fennicae Nov. Ser. A, 1938, t. II, No 11.
6. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. Л.—М., ОНТИ, 1936.
7. Волынский М. С. О дроблении капель в потоке воздуха. ДАН СССР, 1948, т. XII, вып. 3.
8. Бухман С. В. Экспериментальное исследование распада капель. Вест. АН Казахской ССР, 1954, № 11.