

УДК 534.13:533.6.011.5

ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕДОРАСШИРЕННЫХ СТРУЙ, ИСТЕКАЮЩИХ В ЗАТОПЛЕННОЕ ЩЕЛЕВОЕ ПРОСТРАНСТВО

С. П. Киселев, В. П. Киселев, В. Н. Зайковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
E-mails: kiselev@itam.nsc.ru, kiselevvp@itam.nsc.ru, zaikovskii@itam.nsc.ru

Представлены результаты экспериментального и численного моделирования сверхзвуковых недорасширенных струй, истекающих в затопленное щелевое пространство, образованное двумя параллельными дисками. Показано, что структура истекающей нерасчетной струи зависит от расстояния между дисками. Сила трения, действующая со стороны дисков на газ, приводит к существенному изменению структуры сверхзвуковой струи. На некотором расстоянии между дисками в сверхзвуковой струе возникает криволинейная ударная волна, за которой имеет место дозвуковое течение. В этом случае граница струи вместо обычной бочкообразной формы приобретает веерообразную форму.

Ключевые слова: щелевое пространство, плоский канал, сверхзвуковая струя, ударная волна, численное моделирование, разностная схема, эксперимент.

DOI: 10.15372/PMTF20200208

Введение. В данной работе приводятся результаты исследования сверхзвуковых недорасширенных струй, истекающих из прямоугольного канала в затопленное пространство между двумя параллельными дисками, образующими щелевое пространство. В работе [1], в которой исследовалось осесимметричное сверхзвуковое течение в радиальном сопле, образованном двумя параллельными дисками (на выходе из сопла перерасширенная струя истекала в окружающее пространство), обнаружено возникновение ударной волны внутри сопла, обусловленное отрывом пограничного слоя за счет возмущений, распространяющихся по пограничному слою из окружающей среды. Заметим, что радиальные сопла играют большую роль в современных технологиях. В работе [2] показано, что радиальные сопла можно использовать при холодном газодинамическом напылении для нанесения покрытий на внутреннюю поверхность труб. В сверхзвуковое радиальное сопло подаются металлические микрочастицы, которые ускоряются в нем до скорости порядка 500 м/с. Если поместить радиальное сопло в трубу, то при соударении ускоренных микрочастиц с внутренней поверхностью трубы на ней возникает прочное покрытие. Изучение этого явления стимулировало исследования сверхзвуковых течений газа в радиальных соплах [3–5]. Обнаружено, что в этих течениях за счет действия силы трения со стороны

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-01-00292-а) и в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 г. (код проекта АААА-А17-117030610124-0).

© Киселев С. П., Киселев В. П., Зайковский В. Н., 2020

стенок сопла образуется псевдоскачок, в котором происходят потери полного давления. В работе [6] исследовались автоколебания, которые возникают при истечении сверхзвуковой струи в окружающее пространство и могут оказывать влияние на качество покрытия. В указанных выше работах рассматривались течения, в которых параметры газа являются функциями только радиуса. В настоящей работе исследуются более сложные течения, в которых параметры газа зависят не только от радиуса, но и от полярного угла.

1. Постановка эксперимента. Исследовались недорасширенные сверхзвуковые струи, истекающие из прямоугольного канала в щелевое пространство. Схема канала и щелевого пространства в плоскостях x, z и x, y показана на рис. 1. Щелевое пространство $r_2 < r < r_e$ образовано двумя параллельными дисками радиусом $r_e = 36$ мм, надетыми на центральный стержень радиусом r_0 . Расстояние между дисками h менялось путем смещения внешнего диска по центральному стержню. В пространство между дисками вставлялась кольцевая прокладка с прямоугольным вырезом (см. рис. 1) с внутренним радиусом $r_0 = 5$ мм, внешним $r_2 = 20$ мм и толщиной h , равной величине зазора между дисками. Вырез образовывал плоский канал, который имел длину a и поперечное прямоугольное сечение с размерами b и h . Канал начинался в сечении $x_i = 7$ мм и заканчивался в сечении $x = r_2$. За каналом находилось щелевое пространство, заполненное воздухом при нормальных условиях. Вне канала расстояние между дисками заполнено прокладкой. В канал газ подается под давлением p_0 из форкамеры через щель с размерами $x_i < x < r_1$, $-b/2 < y < b/2$ (см. рис. 1, б). Форкамера представляла собой цилиндрическую трубу с внутренним радиусом $r_0 = 5$ мм и внешним радиусом $r_1 = 9$ мм (см. рис. 1, а), в которой в течение эксперимента поддерживались давление p_0 и температура T_0 .

В качестве рабочего газа использовался холодный воздух с температурой $T_0 = 300$ К. Давление газа в форкамере p_0 в различных экспериментах менялось в диапазоне $0,9 \text{ МПа} \leq p_0 \leq 1,0 \text{ МПа}$. Истечение газа из щелевого пространства происходило в окружающее пространство, которое было заполнено воздухом при нормальных условиях (давление $p_\infty = 0,1 \text{ МПа}$, температура $T_\infty = 300 \text{ К}$). В проводимых экспериментах измерялось

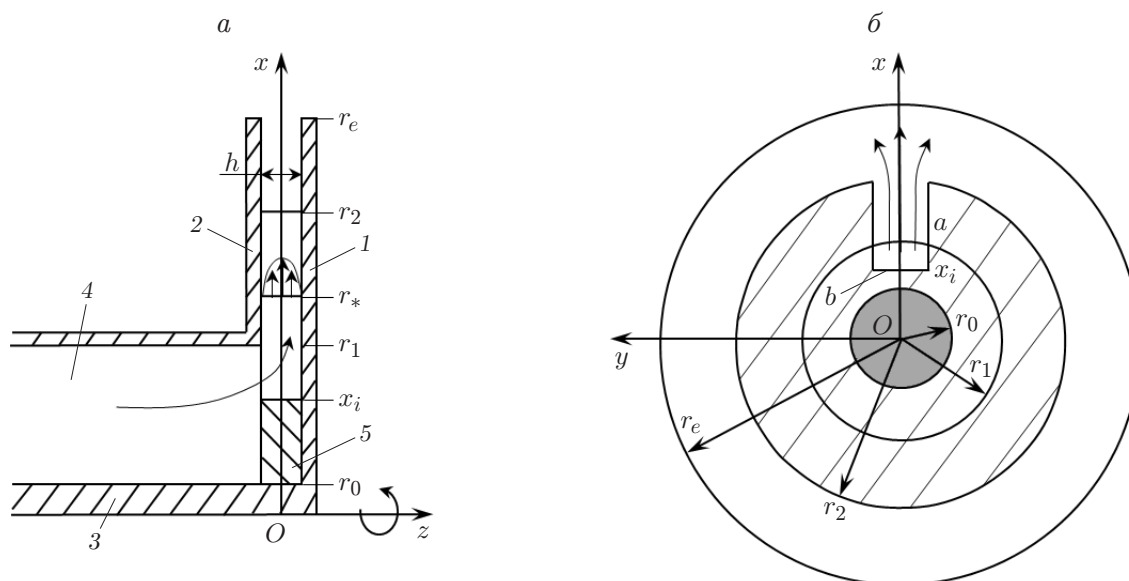


Рис. 1. Схема течения в канале и щелевом пространстве в плоскостях x, z (а) и x, y (б):

1 — внешний диск, 2 — внутренний диск, 3 — центральный стержень, 4 — форкамера, 5 — прокладка

давление на поверхности внешнего диска, для чего на внешнем диске в радиальном направлении сделано 11 дренажных отверстий диаметром $d_i = 0,8$ мм. С помощью пневмометрических трубок дренажные отверстия соединены с тензометрическими датчиками давления на кремниевых интегральных мембранах, разработанными в Институте теоретической и прикладной механики СО РАН. Погрешность измерения статического давления составляла 0,5 %.

2. Методика численного расчета задачи об истечении струи в затопленное щелевое пространство. В работах [3, 4] показано, что для расчета сверхзвукового течения газа в радиальном сопле шириной $h < 2$ мм можно использовать канальное приближение, в котором параметры газа не зависят от поперечной координаты z , а влияние стенок сопла моделируется силой трения в правой части уравнения движения газа. Уравнения двумерной модели получаются путем осреднения трехмерных уравнений по поперечному сечению z . Уравнения неразрывности, движения и энергии газа для средних параметров газа в плоскости x, y имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + H = 0, \quad (2.1)$$

где

$$f = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho(e + \mathbf{v}^2/2) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u(e + p/\rho + \mathbf{v}^2/2) \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho v(e + p/\rho + \mathbf{v}^2/2) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_x \\ \tau_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = \rho RT, \quad e = C_v T,$$

$$\tau_x = \frac{C_f \rho u |\mathbf{v}|}{h}, \quad \tau_y = \frac{C_f \rho v |\mathbf{v}|}{h}, \quad C_f = \frac{12}{\text{Re}} + \frac{0,06}{(2 \text{Re})^{0,25}},$$

$$\text{Re} = \frac{\rho |\mathbf{v}| h}{\mu}, \quad \mu = \mu_0 \frac{T_0 - T_1}{T - T_1} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2},$$

ρ, p, e, T — плотность, давление, удельная внутренняя энергия, температура газа; u, v — компоненты скорости вдоль осей x и y ; $\mathbf{v}^2 = u^2 + v^2$ — квадрат модуля скорости; τ_x, τ_y — компоненты силы трения, действующей со стороны дисков на газ; C_f, C_v — коэффициенты сопротивления и теплоемкости; μ — динамическая вязкость; R — газовая постоянная; Re — число Рейнольдса. Коэффициент сопротивления C_f состоит из двух членов, первый из которых дает зависимость от числа Рейнольдса для ламинарного течения, а второй — для турбулентного. Коэффициент в числителе второго члена выбирался из условия наилучшего соответствия результатов расчетов и экспериментов в задаче о сверхзвуковом течении газа в радиальном сопле [3–5]. Число Рейнольдса Re в выражении для C_f вычислялось при температуре, равной полусумме статической температуры газа и температуры стенки сопла: $T' = (T + T_W)/2$. В настоящей работе статическая температура T находилась из решения системы уравнений (2.1), а температура стенки равна температуре торможения: $T_W = T_0$. Влияние вязкости приводит к появлению в правых частях уравнений движения силы трения τ_x, τ_y , действующей на газ со стороны стенок сопла.

Система уравнений (2.1) решалась численно в предположении, что действие силы трения со стороны стенок сопла распространяется на всю область течения, являющегося

инварианта $J_- = u - 2c/(\gamma - 1)$ вдоль характеристики C_- ($dx/dt = u - c$). На выходе из сопла на линии GF ставилось граничное условие вытекания в область газа, находящегося при нормальных условиях $p = p_\infty$, $T = T_\infty$. Если на границе GF число Маха $M > 1$, то на границе ставились условия симметрии, если $M < 1$, то задавалось p_∞ , остальные условия находились из соотношений на характеристиках C_+ , C_0 . В начальный момент времени задавался разрыв параметров газа в среднем сечении канала $x = x_R$, где $x_R = (r_2 - x_i)/2$. Слева от разрыва ($x < x_R$) задавались такие же параметры, как в камере высокого давления: p_0 , T_0 , $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, справа, в канале и щелевом пространстве, задавались такие же условия, как на выходе из сопла: p_∞ , T_∞ , $u_\infty = 0$, $v_\infty = 0$. В результате распада разрыва возникало течение, которое через некоторое время устанавливалось и не зависело от времени.

Задача решалась численно методом установления по разностной схеме, описанной ниже. Для численного решения системы уравнений (2.1) использовалась разностная схема, которая является комбинацией схемы первого порядка и разностной схемы Лакса — Вендроффа [8]. Краткое описание разностной схемы для одномерного нестационарного случая приведено в [3], ее обобщение на двумерный нестационарный случай не вызывает затруднений. Использование данной схемы позволяет уменьшить осцилляции на ударной волне и контактном разрыве. Численный расчет течения в канале и щелевом пространстве (см. рис. 2) проводился на нерегулярной разностной сетке. В конвергентном сопле и канале задавалось 176×24 ячеек, в радиальном сопле — 202×347 ячеек. Сходимость результатов расчетов проверялась путем измельчения данной сетки в два и четыре раза.

3. Результаты исследования и их обсуждение. На рис. 3–5 приведены результаты численных расчетов и эксперимента в случае истечения струи из канала шириной $b = 4$ мм в щелевое пространство с расстоянием между дисками $h = 0,2$ мм. Параметры газа в форкамере равны $p_0 = 1,0$ МПа, $T_0 = 300$ К. Сначала рассмотрим результаты расчета течения газа без учета силы трения (в этом случае в уравнениях (2.1) полагалось $H = 0$). Для этого случая на рис. 3,а приведены линии тока и поля числа Маха $M(x, y)$, а на рис. 4 показаны рассчитанные распределения давления p/p_0 и числа Маха M на оси струи. Видно, что из канала в затопленное щелевое пространство вытекает звуковая недорасширенная струя со степенью нерасчетности $n = 5,5$ (см. рис. 4,а) ($n = p_E/p_\infty$ — параметр нерасчетности, $M(x_E)$, $p_E = p(x_E)$ — число Маха и давление на выходе из канала $x = x_E = 20$ мм). Границей струи является линия тока, отклоняющаяся от оси за счет поворота вектора скорости в центрированной волне разрежения. Центрированная волна разрежения выходит из угловой точки ($x = x_B$, $y = b/2$) (точка B на рис. 2). Затем волна разрежения отражается от оси струи и выходит на границу струи, от которой отражается в виде волны сжатия. В результате граница струи деформируется в направлении оси струи и приобретает характерную куполообразную форму, возникающую при сверхзвуковом истечении недорасширенных струй во внешнюю область [10, 11]. Поскольку внутри струи течение является сверхзвуковым, из щелевого пространства ($x = 36$ мм) вытекает сверхзвуковая струя.

Картина течения существенно меняется при учете силы трения, действующей со стороны боковых стенок дисков на течение газа (см. рис. 3,б,в и сплошные линии на рис. 4). Вместо куполообразной струи возникает расширяющаяся струя. В канале реализуется дозвуковое течение, которое под действием силы трения ускоряется до скорости звука $M(x_E) = 1$ на выходе из канала. Из канала в щелевое пространство вытекает звуковая недорасширенная струя $n = 5$, которая ускоряется в центрированной волне разрежения до сверхзвуковой скорости. Границей струи является линия тока, проходящая через вершину центрированной волны разрежения (точка B на рис. 2). В точке B вектор скорости газа разворачивается в центрированной волне разрежения на заданный угол $\varphi = 35^\circ$, величина

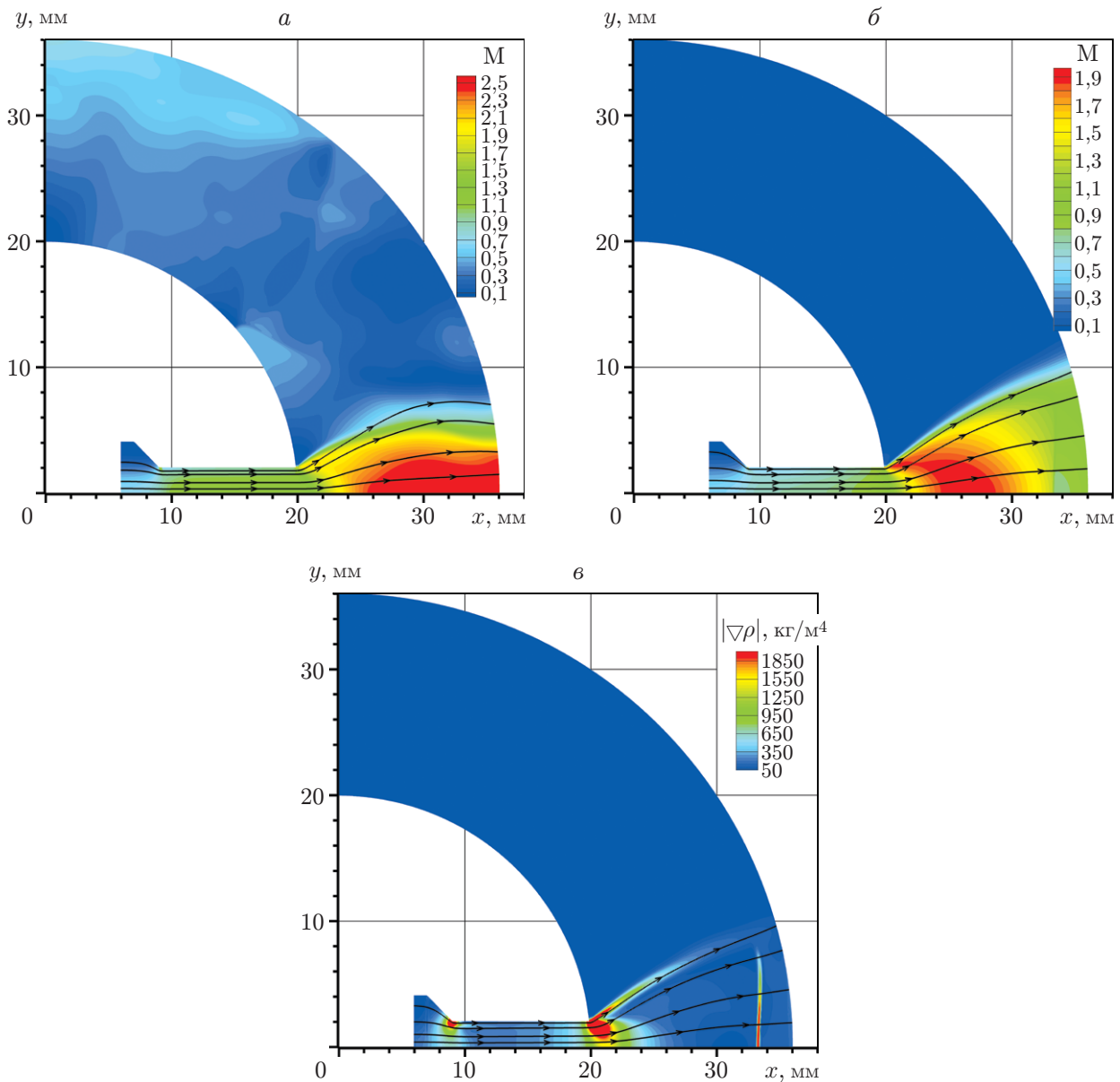


Рис. 3. Расчетные поля числа Маха $M(x, y)$ (*a*, *б*) и градиента плотности $|\nabla\rho|(x, y)$ (*в*) и линии тока установившегося течения сверхзвуковой струи из канала в щелевое пространство шириной $h = 0,2$ мм:
a — без учета силы трения, *б*, *в* — с учетом силы трения

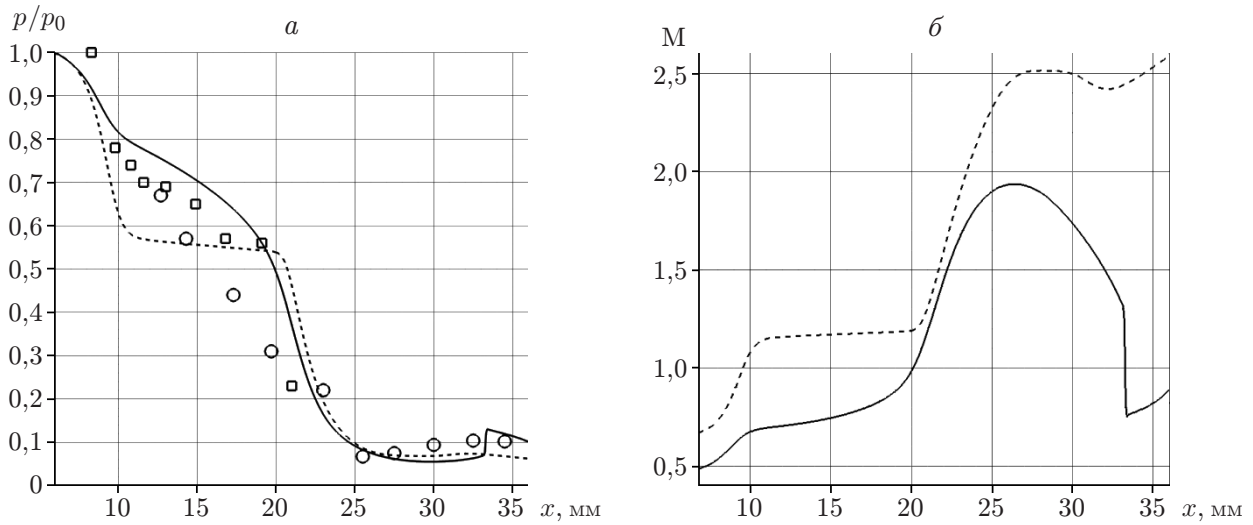


Рис. 4. Распределения давления p/p_0 (а) и числа Маха M (б) на оси струи, истекающей из канала в щелевое пространство шириной $h = 0,2$ мм: точки — результаты двух экспериментов, штриховая линия — расчет без учета силы трения, сплошная — расчет с учетом силы трения

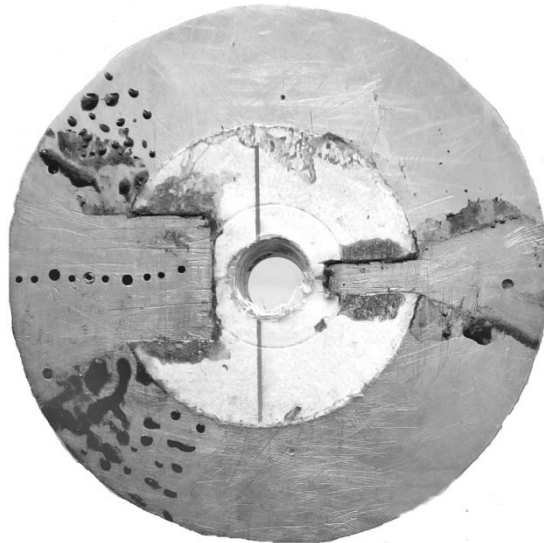


Рис. 5. Сажемасляное покрытие поверхности внешнего диска при наличии двух каналов шириной $b = 4,7$ мм, $b = 18$ мм

которого практически не меняется вниз по течению. Действие силы трения со стороны дисков вызывает затухание волны разрежения, которое проявляется в уменьшении скорости газа при удалении от центра волны разрежения. На рис. 4,б видно, что без учета силы трения поток ускоряется до значения числа Маха $M = 2,4$, а при учете силы трения число Маха в потоке не превышает значения $M = 1,7$. Затухание центрированной волны разрежения приводит к тому, что от оси струи отражается слабая волна разрежения, которая при выходе на границу струи не вносит существенных возмущений в течение. В результате не меняется направление вектора скорости на линии тока, образующей границу струи. В этом случае граница струи остается прямолинейной и наклоненной под углом $\varphi = 35^\circ$ к оси x . Под действием силы трения происходит торможение сверхзвукового течения газа [3, 11], поэтому сверхзвуковая область заканчивается криволинейной

ударной волной (см. рис. 3, в). На оси струи криволинейная ударная волна превращается в прямую ударную волну, за которой при $x > 32$ мм реализуется дозвуковое течение. При пересечении линиями тока криволинейного фронта ударной волны происходит изменение угла наклона вектора скорости, которое приводит к незначительному изменению формы границы струи. На рис. 4, а показана зависимость безразмерного давления p/p_0 от координаты x вдоль оси струи, полученная в двух экспериментах и численных расчетах. На точность экспериментальных результатов существенное влияние оказывают шероховатость поверхности дисков, их непараллельность, конечный размер дренажных отверстий. В работе [3] для осесимметричного сверхзвукового течения в радиальном сопле исследовано влияние шероховатости и непараллельности поверхности дисков путем проведения нескольких независимых экспериментов. В данной работе для оценки экспериментальной ошибки выполнено два независимых эксперимента при одинаковой геометрии канала и параметрах в форкамере $p_0 = 1,0$ МПа, $T_0 = 300$ К. Результаты этих двух экспериментов показаны точками на рис. 4, а. Максимальный разброс экспериментальных точек наблюдается в окрестности выходного сечения канала, где относительная разность измеренных давлений составляет $\Delta p/p \leq 15$ %. Другим источником ошибки является конечный размер дренажных отверстий, который приводит к разбросу экспериментальных данных по координате x на величину порядка 1 мм. На рис. 4, а видно, что экспериментальные значения и результаты расчета удовлетворительно согласуются. Экспериментальные данные свидетельствуют об увеличении давления в окрестности точки $x \approx 33$ мм. Численный расчет с учетом силы трения (сплошная кривая на рис. 4) показывает, что увеличение давления обусловлено образованием замыкающей ударной волны в точке $x = 33$ мм. Заметим, что при расчете без учета силы трения (см. рис. 4) замыкающая ударная волна отсутствует.

На рис. 5 приведена фотография сажемасляного покрытия на внешней поверхности диска после выдува газа через два канала шириной $b = 4,7$ мм, $b = 18$ мм. Расстояние между дисками $h = 0,2$ мм и параметры газа в форкамере были такими же, как в численных расчетах (см. рис. 3, 4). На рис. 5 видно, что внутри канала и в струе сажемасляное покрытие отсутствует. Отчетливо видны границы струи, которые можно считать прямолинейными и расположенными под углом φ , определяемым поворотом вектора скорости при вытекании газа из канала в затопленное щелевое пространство. В правой струе шириной $b = 4,7$ мм верхняя граница расположена под углом $\varphi_u = 26^\circ$ к оси струи, нижняя — под углом $\varphi_d = 22^\circ$. В левой струе шириной $b = 18$ мм верхняя граница расположена под углом $\varphi_u = 35^\circ$ к оси струи, нижняя — под углом $\varphi_d = 30^\circ$. Значительный разброс значений угла наклона границы струи, по-видимому, обусловлен непараллельностью дисков в эксперименте.

Расстояние между дисками h существенно влияет на структуру течения в струе, вследствие того что сила сопротивления, действующая на газ со стороны боковых стенок, обратно пропорциональна расстоянию между дисками: $\tau_x = C_f \rho u |v|/h$. При увеличении расстояния между дисками h сила сопротивления уменьшается, поэтому течение в струе становится подобным течению, в котором сила сопротивления отсутствует. При уменьшении расстояния между дисками сила сопротивления увеличивается, что приводит к изменению структуры течения в недорасширенной сверхзвуковой струе.

На рис. 6, 7 приведены результаты численного и экспериментального исследований истечения струи из канала шириной $b = 7$ мм с размером сечения $r_2 = 15$ мм в щелевое пространство. По сравнению со случаем, показанным на рис. 3, расстояние между дисками уменьшено до значения $h = 0,15$ мм, параметры газа в форкамере в расчетах и эксперименте равны $p_0 = 0,95$ МПа, $T_0 = 300$ К.

На рис. 6 видно, что структура струи в затопленном щелевом пространстве изменилась: струя состоит из областей сверхзвукового и дозвукового течений (см. рис. 6, а).

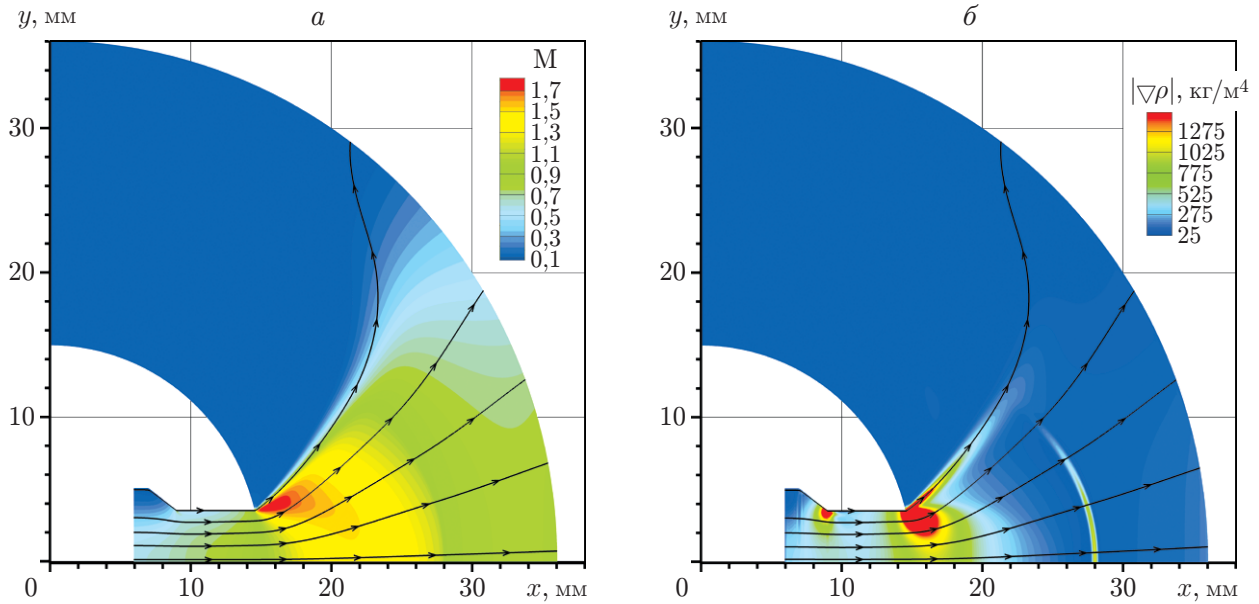


Рис. 6. Расчетные поля числа Маха $M(x, y)$ (а) и градиента плотности $|\nabla\rho|(x, y)$ (б) при установившемся течении сверхзвуковой струи из канала в щелевое пространство шириной $h = 0,15$ мм

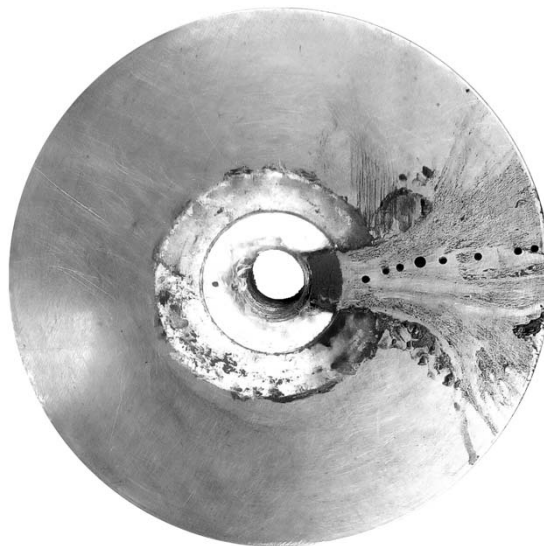


Рис. 7. Сажемастное покрытие поверхности внешнего диска при установившемся течении сверхзвуковой струи из канала в щелевое пространство шириной $h = 0,15$ мм

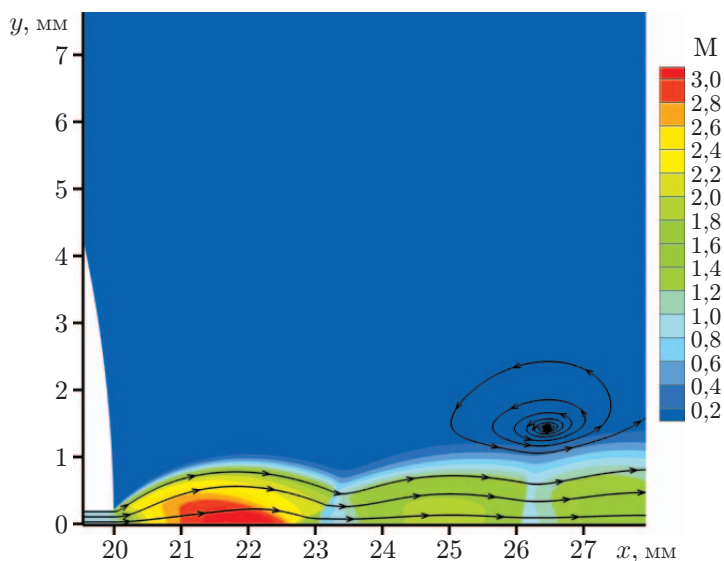


Рис. 8. Расчетные поля числа Маха $M(x, y)$ и линии тока в узкой сверхзвуковой струе при $b = 0,2$ мм, $h = 0,2$ мм

Эти области разделены криволинейной ударной волной, которая пересекает ось струи в точке $x = 28$ мм (см. рис. 6, б). В сверхзвуковой области граница струи линейно расширяется вниз по течению, а в дозвуковой области происходит экспоненциальное расширение струи. В результате граница струи приобретает веерообразную форму. Аналогичная форма струи наблюдается в эксперименте (рис. 7). Как указывалось выше, при уменьшении расстояния h между дисками увеличивается сила сопротивления, вследствие чего центрированная волна разрежения затухает быстрее. В отличие от случая, показанного на рис. 3, ударная волна находится ближе к выходному сечению из канала, что приводит к уменьшению сверхзвуковой области и увеличению дозвуковой области течения. В дозвуковой области течения происходит интенсивное расширение струи в поперечном направлении, которая приобретает характерную веерообразную форму.

Результаты анализа ударно-волновой картины в сверхзвуковой струе показывают, что ее структура должна зависеть от ширины струи на входе в сопло b . На рис. 8 показана картина истечения узкой струи, ширина которой на входе в сопло $b = 0,2$ мм уменьшена в 20 раз по сравнению со случаем, показанным на рис. 3, б, при том же расстоянии между дисками сопла $h = 0,2$ мм. В этом случае центрированная волна разрежения не успевает затухнуть и достигает оси струи, от которой отражается волной разрежения. После выхода на границу струи волна разрежения отражается от нее волной сжатия, в результате граница сверхзвуковой струи приобретает характерную куполообразную форму. По мере смещения вниз по потоку под действием силы трения происходит затухание и расширение струи.

Заключение. В работе численно и экспериментально исследовано истечение сверхзвуковых недорасширенных струй из канала с прямоугольным сечением в целевое пространство между двумя параллельными дисками, заполненное воздухом при нормальных условиях. Исследовалось влияние ширины канала и расстояния между дисками на структуру течения. Показано, что при определенных значениях параметров (ширина втекающей струи и расстояние между дисками) наблюдается существенная перестройка течения под действием силы трения, действующей со стороны стенок дисков на газ. В случае если сила трения отсутствует или мала, сверхзвуковая струя в сопле имеет куполообразную форму.

Образование такой струи обусловлено наличием центрированной волны разрежения, возникающей в угловой точке при истечении струи из канала в щелевое пространство. Волна разрежения отражается от оси струи и взаимодействует с границей струи, в результате чего возникает волна сжатия. При этом граница струи деформируется, принимая куполообразную форму. Если сила трения велика, то картина течения в струе меняется, а граница струи приобретает веерообразную форму. При истечении газа из канала в щелевое пространство в угловой точке также возникает центрированная волна разрежения, в которой газ в струе ускоряется до сверхзвуковой скорости. Однако под действием силы трения скорость течения в центрированной волне разрежения затухает при увеличении расстояния от центра волны. В результате отраженная от оси волна разрежения не возмущает границы струи. В этом случае начальный участок границы струи является прямолинейной линией тока, расположенной под некоторым углом к оси струи. Угол наклона определяется поворотом вектора скорости, происходящим при пересечении линиями тока центрированной волны разрежения. К прямолинейному участку струи может примыкать криволинейный участок, на котором происходит более интенсивное расширение струи. Появление этого участка обусловлено образованием ударной волны, которая замыкает область сверхзвукового течения. За ударной волной течение в струе является дозвуковым. Дозвуковая струя интенсивно расширяется в боковые области, давление в которых равно внешнему давлению. Если дозвуковая область имеет достаточно большие размеры, то возникает второй участок границы струи с интенсивным расширением в боковые области. Распределения давления вдоль оси струи и форма границы струи, полученные в расчетах и экспериментах, хорошо согласуются.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Moller P. S.** Radial flow without swirl between parallel disks having both supersonic and subsonic region // *J. Basic Engng.* 1966. V. 88, N 1. Ser. D. P. 153–154.
2. **Kiselev S. P., Kiselev V. P., Klinkov S. V., et al.** Study of the gas-particle radial supersonic jet in the cold spraying // *Surface Coatings Technol.* 2017. V. 313. P. 24–30.
3. **Kiselev S. P., Kiselev V. P., Zaikovskii V. N.** Gas flows in radial micro-nozzles with pseudo-shocks // *Shock Waves.* 2018. V. 28, N 4. P. 829–849.
4. **Kiselev S. P., Kiselev V. P., Liapidevskii V. Yu., Zaikovskii V. N.** Modeling of gas flows in radial micro-nozzles // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. V. 894, N 1. P. 012042-1–012042-6.
5. **Киселев С. П., Киселев В. П., Зайковский В. Н.** Сверхзвуковые течения газа в радиальных соплах // *ПМТФ.* 2017. Т. 58, № 6. С. 78–90.
6. **Киселев С. П., Киселев В. П., Зайковский В. Н.** О механизме автоколебаний сверхзвуковой радиальной струи, истекающей в затопленное пространство // *ПМТФ.* 2016. Т. 57, № 2. С. 53–63.
7. **Ландау Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1988.
8. **Lax P. D., Wendroff B.** Systems of conservation laws // *Comm. Pure Appl. Math.* 1960. V. 13. P. 217–237.
9. **Годунов С. К.** Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. М.: Наука, 1977.
10. **Крайко А. Н.** Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус Пресс, 2010.
11. **Абрамович Г. Н.** Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976.

*Поступила в редакцию 30/IX 2019 г.,
после доработки — 30/IX 2019 г.
Принята к публикации 30/IX 2019 г.*