

10. Канаун С. К. Метод самосогласованного поля в задаче об эффективных свойствах упругого композита. — ПМТФ, 1975, № 4.
11. Композиционные материалы/Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. М.: Мир, 1978.
12. Иванова В. С., Копьев И. М., Ботвина П. Р., Шермергор Т. Д. Упрочнение металлов волокнами. М.: Наука, 1973.
13. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982.
14. Новиков В. В. Эффективный коэффициент теплового расширения неоднородного материала. — ИФЖ, 1983, т. 44, № 6.
15. Yeh R. H. T. Variational bounds of the elastic moduli of two-phase materials. — J. Appl. Phys., 1971, v. 42, N 3.
16. Tsadi O., Cohen L. J. Elastic properties of filled and porous epoxy composites. — Int. J. Mech. Sci., 1967, v. 9, p. 539.
17. Crowson H. J., Arridge R. G. G. The elastic properties in bulk and shear of a glass bead-reinforced epoxy resin composite. — J. Materials Science, 1977, v. 12, p. 1254.

Поступила 14/VI 1984 г.

УДК 539.874

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

С. Н. КОСОПУКОВ

(Челябинск)

Вязкопластичность — один из наиболее достоверных и удобных способов учета зависимости прочностных свойств материалов от скорости нагружения [1, 2]. Значительный интерес для практики представляют аналитические решения задач квазистатического нагружения достаточно сложных элементов конструкций, для получения которых удобно линеаризовать основные нелинейные соотношения вязкопластичности.

Данная работа иллюстрирует использование одного из возможных способов линеаризации. Полученные решения для шарнирно-опертых и защемленных кольцевых пластин точно удовлетворяют как кинематическим условиям, так и уравнениям равновесия.

1. Обобщение простейших зависимостей для жестковязкопластического материала приведено в [1] и сводится к динамическому критерию текучести вида

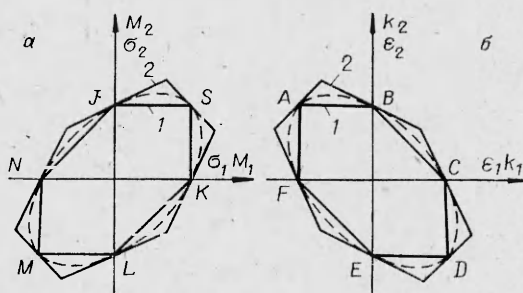
$$(1.1) \quad \sqrt{J_2} = k \left[1 + \Phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{I_2}}{\gamma} \right) \right],$$

где k — предел текучести при сдвиге; J_2, I_2 — вторые инварианты девиаторов напряжений и скоростей деформаций; γ — коэффициент, характеризующий отношение вязких и пластических свойств материала; Φ — символ некоторой функции; Φ^{-1} — символ обратной функции.

Ассоциированный закон течения остается в силе. В качестве исходного условия текучести по напряжениям здесь принято нелинейное условие Мизеса. Радиус круговой цилиндрической поверхности текучести в пространстве главных напряжений определяется также нелинейной комбинацией главных скоростей деформаций. Нетрудно видеть, что для плоского напряженного состояния несжимаемого материала точкам, лежащим на эллипсе, подобном эллипсу Мизеса, в плоскости главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$ соответствуют точки эллипса (фиг. 1) в плоскости главных скоростей деформаций $\epsilon_1 - \epsilon_2$. Для линеаризации исходного нелинейного соотношения достаточно заменить эллипсы некоторыми близкими к ним многоугольниками, сохраняя подобие таких многоугольников при изменении размеров. Например, если заменить эллипс $J_2 = \text{const}$ шестиугольником 1 (фиг. 1, а), подобным шестиугольнику Треска, то, заменяя эллипс $I_2 = \text{const}$ шестиугольником 1 или 2 (фиг. 1, б), для линейной функции Φ получим соответственно, соотношения

$$(1.2) \quad \max(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) = \sigma_T + \mu \max|\epsilon_\gamma|, \quad \max(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) = \sigma_T + (1/2)\mu|\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta|,$$

где индексы α, β отвечают максимальным и минимальным значениям величин; ϵ_α — максимальная по модулю скорость деформации; $\mu = 3k/2\gamma$ — коэффициент вязкости, определяемый экспериментально при одноосном напряженном состоянии.



Фиг. 1

Такой метод линеаризации, в отличие от предложенного ранее Прагером [2], сохраняет изотропию упрочнения, связанного со скоростью деформации, предполагаемую исходным соотношением (1.1). Следует, однако, отметить, что исходное соотношение обладает еще одним замечательным свойством, а именно: не только нормаль к мгновенной поверхности текучести совпадает по направлению с вектором деформаций, но и нормаль к кривой $I_2 = \text{const}$ совпадает с вектором напряжений, т. е. эта кривая является поверхностью уровня диссипативной функции [3]. Для начального условия текучести Треска (шестиугольник 1, фиг. 1, а) таким свойством обладает только соотношение (1.2) (шестиугольник 1, фиг. 1, б), для начального условия текучести максимального приведенного напряжения (шестиугольник 2, фиг. 1, а) этим свойством обладает только шестиугольник 2 (фиг. 1, б).

Ниже будет использовано соотношение (1.2). Для пластин, подвергающихся осесимметричному изгибу, можно получить [4] в этом случае

$$(1.3) \quad \max |m_\alpha - m_\beta| = 1 + \nu |k_\nu|,$$

где $m_1 = M_1/M_0$; $m_2 = M_2/M_0$; M_1, M_2 — радиальный и окружной изгибающие моменты; $M_0 = \sigma_T h^2$; $m_3 = 0$; $k_3 = -(k_1 + k_2)$; k_1, k_2 — скорости изменения безразмерных кривизн; $\nu = 2\mu h / (3\sigma_T R)$; $R, 2h$ — наружный радиус и толщина пластины.

Скорости кривизн определяются выражениями

$$(1.4) \quad k_1 = -\frac{d^2 w}{d\rho^2}, \quad k_2 = -\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho},$$

где w, ρ — скорость прогиба и текущий радиус, отнесенные к радиусу R .

Задача о деформации шарнирно-опертой круглой пластины под действием равномерного давления при разных видах зависимости между напряжениями и скоростями деформаций рассмотрена в [1, 2, 4, 5]. Ниже решается задача о вязкопластической деформации кольцевых пластин.

2. Пусть шарнирно-опертая пластина с отверстием радиуса a нагружается по краю отверстия усилием P . Используя уравнение равновесия в виде

$$(2.1) \quad d(\rho m_1)/d\rho - m_2 = -p' \quad (p = p/(2\pi M_T))$$

либо

$$(2.2) \quad dm_1/d\rho + (m_1 - m_2)/\rho = -p/\rho,$$

краевые условия

$$(2.3) \quad m_1 = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \xi = a/R, \quad \rho = 1$$

и выражения (1.3), (1.4), можно показать, что точка J (см. фиг. 1, а) не может быть взята в качестве условия текучести на любом конечном интервале изменения ρ , а используя линию JN , нельзя построить в рассматриваемом случае статически допустимое поле внутренних усилий. Действительно, для точки J выполняются условия $m_1 = 0$, $m_2 = 1 + \nu k_2$, приводящие последовательно к выражениям $m_2 = p$, $k_2 = -k_1 = (p - 1)/\nu$. Но в соответствии с ассоциированным законом течения должны выполняться неравенства $-k_2 \leq k_1 \leq 0$, несовместные с написанными выше выражениями.

Если в качестве условия текучести принять линию JN , то должно выполняться условие $k_1 = -k_2$ (точка A , фиг. 1, б), приводящее к значению скорости окружной кривизны $k_2 = C/\rho^2$, где C — постоянная интегрирования.

Условие текучести $m_1 - m_2 = 1 + \nu k_2$, уравнение равновесия (2.2) и краевые условия (2.3) приводят к выражению

$$m_1 = (p - 1) \left[\frac{\xi^2 \ln \xi (1 - \rho^2)}{\rho^2 (1 - \xi^2)} - \ln \rho \right].$$

Нетрудно показать, что момент m_1 положителен при $\rho < 1$, а это противоречит условию текучести JN .

Соответствующее линии JS условие текучести

$$(2.4) \quad m_2 = 1 + \nu k_2, \quad m_1 > 0, \quad m_1 < m_2$$

и ассоциированное с ним условие для кривизны (точка B , фиг. 1, б) $k_1 = 0$ позволяют с использованием выражений (1.4), (2.1) и краевых условий (2.3) найти

$$(2.5) \quad w = w_0(1 - \rho)/(1 - \xi), \quad \nu w_0 = -(p - 1)(1 - \xi)^2 / \ln \xi; \quad m_1 = -(p - 1)[(1 - \xi) \times \\ \times \ln \rho - (1 - \rho) \ln \xi] / (\rho \ln \xi),$$

где w_0 — скорость прогиба края отверстия.

Из полученного следует, что поверхность пластины становится конической, а скорость прогиба пропорциональна разности между действующей нагрузкой и предельным усилием для пластины из жесткопластического материала. Соблюдение условий текучести для построенного решения обусловлено выполнением неравенств

(2.4). Используя (2.5), найдем, что экстремальное значение $m_1 = (p-1)(e^x/ex - 1)$ ($x = \ln \xi / (\xi - 1)$).

Можно показать, что для любого значения ξ на отрезке (0,1) будут выполняться неравенства $x > 1$, $e^x/ex > 1$, т. е. экстремальное значение m_1 всегда положительно. Единственность точки экстремума и краевые условия (2.3) дают возможность сделать вывод, что первое из неравенств (2.4) выполняется всегда. Для определения условий выполнения второго из неравенств (2.4) рассмотрим величину

$$m_2 - m_1 = 1 + (p-1) \left[\frac{(1-\xi)(\ln \rho - 1)}{\rho \ln \xi} + 1 - \frac{1}{\rho} \right].$$

Поскольку второй член правой части может быть при больших p как угодно больше 1, исследуем выражение в квадратных скобках. Его экстремальное значение $f_1 = (x - e^{x-2})/x$, причем при $\xi < 0,203$ точка экстремума находится в интервале $[\xi, 1]$. Функция f_1 неотрицательна в интервале значений x [0,1587; 3,1462]. Для относительного радиуса отверстия ξ это соответствует условию

$$(2.6) \quad \xi \geq \xi_1 = 0,0504.$$

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что полученное решение (2.5) статически и кинематически допустимо для всех значений ξ , удовлетворяющих условию (2.6).

Для кольцевой пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q , решая уравнение равновесия

$$\frac{dm_1}{d\rho} + \frac{m_1 - m_2}{\rho} = \frac{q_1 \rho}{2} + \frac{q_1 \xi^2}{2\rho}, \quad q_1 = \frac{qR^2}{M_0}$$

при тех же краевых условиях (2.3) и условии текучести (2.4), можно получить

$$(2.7) \quad w = \frac{w_0(1-\rho)}{1-\xi}, \quad w_0 = \left[\frac{6}{(1-\xi)(1+2\xi)} - q_1 \right] \frac{(1-\xi)^3(1+2\xi)}{6 \ln \xi}.$$

Аналогичный проведенному выше анализ показывает, что первое неравенство из (2.4) выполняется всегда, а второе для любых значений q при условии $\xi > 0,1233$, т. е. полученное решение (2.7) применимо для достаточно малых значений относительного отверстия.

3. Пусть жесткозашемленная по наружному краю пластина нагружается усилием P , распределенным по краю отверстия. Очевидно, что на краю $\rho = 1$ в качестве кинематических краевых условий следует принять

$$(3.1) \quad w = 0, \quad dw/d\rho = 0.$$

Последнее условие связано с очевидной невозможностью образования пластических шарниров в вязкопластическом теле. Из этого условия следует, что кривизна $k_2 = 0$ при $\rho = 1$ и условие текучести на этом краю должно содержать точку N (см. фиг. 1, а). Простейший анализ показывает, что линия MN не может служить условием текучести для любой конечной области изменения радиуса. Отметим также, что напряженное состояние не может определяться сразу и линией NJ . Действительно, в этом случае в силу ассоциированного закона течения в конечной области должно выполняться равенство

$$(3.2) \quad k_1 = -k_2,$$

приводящее к дифференциальному уравнению для w

$$\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} = 0,$$

решением которого является выражение

$$(3.3) \quad w = C_1 \ln \rho + C_2.$$

В силу краевых условий (3.1) получим $w = 0$. Следовательно, вблизи края $\rho = 1$ должна существовать область конечных размеров, в которой напряженное состояние определяется точкой N :

$$(3.4) \quad m_2 = 0, \quad m_1 = -1 + \nu k_1.$$

Внутреннюю границу этой зоны отметим радиусом ρ_2 . Уравнение равновесия (2.1) в этом случае имеет решение

$$(3.5) \quad m_1 = -p + C/\rho,$$

где C — постоянная интегрирования.

Учитывая (3.4), (3.5) и выражение для k_1 (1.4), можно получить уравнение

$$\frac{d^2 w}{d\rho^2} = \frac{p-1}{\nu} - \frac{C}{\nu \rho},$$

решение которого при краевых условиях (3.1) имеет вид

$$(3.6) \quad w = \frac{(p-1)(\rho-1)}{2\nu} - \frac{C}{\nu} (\rho \ln \rho - \rho + 1).$$

При $\rho < \rho_2$ условие текучести должно представляться линией NJ :

$$(3.7) \quad m_2 - m_1 = 1 + \nu k_2, \quad m_1 < 0.$$

Соответственно должно выполняться условие (3.2), и перемещение представляется выражением (3.3); условие текучести (3.7) и уравнение равновесия принимают вид

$$m_2 - m_1 = 1 - \nu C_1 / \rho^2, \quad \rho dm_1 / d\rho = -(p-1) - \nu C_1 / \rho^2.$$

Если считать, что пластическое течение в интервале $[\rho_2, \xi]$ характеризуется условием (3.7), учитывая краевые условия

$$\text{при } \rho = \xi \quad m_1 = 0,$$

$$\text{при } \rho = \rho_2 \quad m_2 = 0, \quad m_1 = -1 + \nu C_1 / \rho_2^2,$$

можно получить уравнение, связывающее величины ρ_2 , p , C_1 :

$$(3.8) \quad (p-1)(\ln \rho_2 - \ln \xi) + \frac{\nu C_1}{2} \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) = 1.$$

Условие непрерывности величин m_1 и $dw/d\rho$ при $\rho = \rho_2$ дает еще два уравнения:

$$(3.9) \quad -p + \frac{C}{\rho_2} = -1 + \frac{\nu C_1}{\rho_2^2}, \quad \frac{p-1}{\nu} (\rho_2 - 1) - \frac{C \ln \rho_2}{\nu} = \frac{C_1}{\rho_2}.$$

Система уравнений (3.8), (3.9) сводится к одному трансцендентному уравнению относительно ρ_2

$$(3.10) \quad (p-1) \left[2(1 + \ln \rho_2)(\ln \rho_2 - \ln \xi) + \rho_2(\rho_2 - 1 - \rho_2 \ln \rho_2) \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) \right] = 2(1 + \ln \rho_2).$$

Скорость перемещения края отверстия w_0 после этого может быть вычислена по формуле

$$(3.11) \quad \nu w_0 = (p-1)(\rho_2 - 1)^2 / 2 - C(\rho_2 \ln \rho_2 - \rho_2 + 1) + \nu C_1(\ln \rho_2 - \ln \xi).$$

Условием применимости полученного решения является выполнение неравенства (3.7), которое в свою очередь можно заменить неравенством

$$(3.12) \quad dm_1 / d\rho|_{\rho=\xi} \leq 0.$$

Очевидно, знак равенства в последнем выражении соответствует при заданном p предельному значению $\xi_{\text{пр}}$, при котором еще напряженное состояние характеризуется двумя зонами (3.4) и (3.7). Присоединяя это равенство в виде

$$p-1 = -\nu C_1 / \xi_{\text{пр}}^2$$

к системе уравнений (3.8), (3.9), найдем

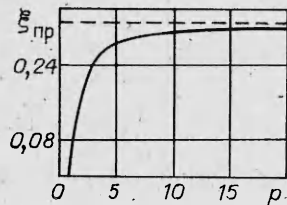
$$\xi_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\rho_2(1 + \rho_2 \ln \rho_2 - \rho_2)}{1 + \ln \rho_2}},$$

где ρ_2 определяется из уравнения

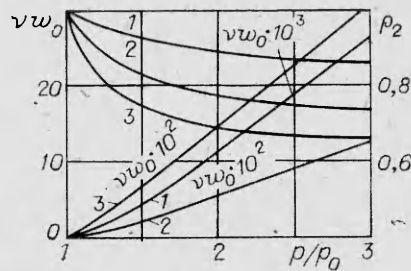
$$(p-1) \left[\ln \rho_2 - \ln \sqrt{\frac{\rho_2(1 + \rho_2 \ln \rho_2 - \rho_2)}{1 + \ln \rho_2}} - \frac{1}{2} + \frac{\rho_2 - 1 + \rho_2 \ln \rho_2}{2\rho_2(1 + \ln \rho_2)} \right] = 1.$$

Очевидно, что, если выражение в квадратных скобках последнего равенства приравнять нулю, полученное значение $\xi_{\text{пр}} = \xi_{\text{к}}$ соответствует минимальному размеру отверстия, для которого найденное выше решение будет верным при любой величине p . Зависимость величины $\xi_{\text{пр}}$ от нагрузки p показана на фиг. 2. Критическое значение $\xi_{\text{к}} = 0,3234$ (штриховая линия). Результаты расчетов по формулам (3.8)–(3.11) зависимости прогиба края отверстия и значения ρ_2 от действующей нагрузки приведены на фиг. 3 (линии 1–3 соответствуют $\xi = 0,8; 0,6; 0,4$). Здесь $p_0 = 1 - \ln^{-1} \xi$ — предельная нагрузка для жесткопластической пластины с тем же значением ξ .

Закономерно предположить, что в тех случаях, когда нарушается условие (3.12), вблизи отверстия появляется еще одна пластическая зона, в которой условие текуче-



Ф и г. 2



Ф и г. 3

сти соответствует линии JS (точка J , как было показано, не может служить условием текучести для пластины на конечном интервале изменения радиуса).

Пусть границе зоны отвечает радиус ρ_1 ($\xi < \rho_1 < \rho_2$). В соответствии с ассоциированным законом течения $k_1 = 0$, что приводит к выражению для скорости перемещения в этой зоне

$$w = \frac{(w_0 - w_1)(\rho_1 - \rho)}{\rho_1 - \xi} + w_1,$$

где w_1 — скорость прогиба при $\rho = \rho_1$.

Уравнение равновесия с учетом условия текучести $m_2 = 1 + vk_2$ можно записать в виде $d(\rho m_1)/d\rho = p - 1 + vC_3/\rho$, $C_3 = (w_1 - w_0)/(\rho_1 - \xi)$.

Решая последнее уравнение с учетом равенства $m_1 = 0$ на границах интервала $[\rho_1, \xi]$, получим выражение

$$(3.13) \quad (p - 1)(\rho_1 - \xi) + vC_3(\ln \xi - \ln \rho_1) = 0.$$

Из условий непрерывности m_1 и $dw/d\rho$ при $\rho = \rho_1$ имеем

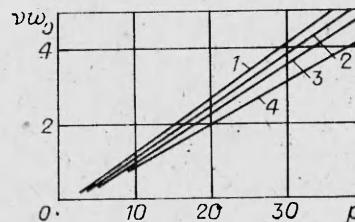
$$(3.14) \quad \frac{C_1}{\rho_1} = -C_3, \quad (p - 1)(\ln \rho_2 - \ln \rho_1) + \frac{vC_1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) = 1.$$

Система уравнений (3.9), (3.13), (3.14) позволяет определить неизвестные величины C , C_1 , C_3 , ρ_1 , ρ_2 при заданных значениях p и ξ . После чего скорость перемещения края отверстия определится по формуле

$$v\omega_0 = \frac{(p - 1)(\rho_2 - 1)^2}{2} - C(\rho_2 \ln \rho_2 - \rho_2 + 1) - vC_1(\ln \rho_2 - \ln \rho_1) + vC_3(\rho_1 - \xi).$$

Подробный анализ показывает, что полученное решение применимо для $\xi \geq \xi_{кр} \xi_1 = 0,0163$. Кривая $\xi_{пр} - p$ (см. фиг. 2) разделяет области двух- и трехзонной схем течения пластины. Результаты расчетов зависимости $v\omega_0 - p$ для значений $\xi < \xi_{кр}$ приведены на фиг. 4 ($\xi = 0,1; 0,2; 0,25; 0,3$ — линии 1—4).

Следует отметить одну интересную особенность полученных решений задач вязкопластической деформации в случае линейной функции Φ . Линейная зависимость характерных скоростей прогиба от нагрузки (2.5), (2.7) при наличии одного режима течения для всей пластины достаточно закономерна, однако аналогичная зависимость при наличии нескольких зон с подвижными границами несколько неожиданна. Тем не менее для известных решений (см. [1, 2, 4—6], фиг. 3, 4), несмотря на громоздкость анализа, отклонения от линейной зависимости во всех случаях невелики и отмечаются только в области значений нагрузки, близкой к предельной статической. Например, для круглой пластины, нагружаемой равномерным давлением [4], отклонения от линейной зависимости во всем диапазоне скоростей перемещений не превышают 1% от предельной статической нагрузки.



Ф и г. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мнр, 1968.
2. Прагер В. Линейзация в теории вязкопластических сред. — Сб. пер. Механика, 1962, № 2(72).
3. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
4. Быковцев Г. И., Семькина Т. Д. О вязкопластическом течении круглых пластин

- и оболочек вращения. — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 4.
 5. Эпплеби Е., Прагер В. Об одной задаче вязкопластичности. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Е. Прикл. мех., 1962, т. 29, № 2.
 6. Косоруков С. Н. Вязкопластическая деформация кольца. — ПМ, 1976, т. 12, № 11.

Поступила 9/VII 1984 г.

УДК 539.376

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА О ДЕФОРМИРОВАНИИ МЕМБРАНЫ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. Ю. ЦВЕЛОДУБ

(Новосибирск)

1. Обратные задачи о деформировании мембраны в условиях ползучести за заданное время в выпуклую поверхность при минимальных энергетических затратах возникают, например, при расчете технологического оборудования для обработки материалов давлением в режиме ползучести [1].

Рассмотрим мембрану, занимающую в плоскости $x_1 O x_2$ область S , ограниченную контуром γ , и деформируемую под действием внешних сил q , нормальных к ее плоскости, и p_k ($k = 1, 2$), приложенных к γ и лежащих в ее плоскости. Уравнения равновесия имеют вид [2]

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1, 2), \quad h \sigma_{kl} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_l} = -q,$$

где σ_{kl} ($k, l = 1, 2$) — компоненты тензора напряжений; h — толщина мембраны; w — ее прогиб; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Компоненты тензора деформаций ε_{kl} ($k, l = 1, 2$) связаны с компонентами перемещений u_k ($k = 1, 2$) в плоскости $x_1 O x_2$ и прогибом w следующими зависимостями [2]:

$$(1.2) \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_l} \quad (k, l = 1, 2).$$

Считаем, что полные деформации материала мембраны складываются из упругих деформаций, подчиняющихся закону Гука, и деформаций ползучести:

$$(1.3) \quad \varepsilon_{kl} = a_{klmn} \sigma_{mn}^e + \varepsilon_{kl}^v \quad (k, l = 1, 2),$$

причем скорости деформаций ползучести $\eta_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^v$ (точка означает дифференцирование по времени t) являются потенциальными функциями напряжений

$$(1.4) \quad \eta_{kl} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} \quad (k, l = 1, 2),$$

где $\Phi = \Phi(\sigma_{kl}^e)$ — потенциал ползучести, представляющий собой выпуклую однородную степени $n + 1$ функцию относительно σ_{kl}^e ($k, l = 1, 2$) [3]. Тогда $\Phi = [1/(n + 1)]W$, где $W = \sigma_{kl}^e \eta_{kl}$ — удельная мощность рассеиваемой при ползучести энергии, что влечет выпуклость функций $W = W(\sigma_{kl}^e)$ и $W = W(\eta_{kl}^v)$ [3], для любых двух состояний имеет место неравенство [4]

$$(1.5) \quad W^{(2)} - W^{(1)} \geq \frac{n+1}{n} \sigma_{kl}^{(1)} (\eta_{kl}^{(2)} - \eta_{kl}^{(1)}).$$

Сформулируем обратную задачу, исследование которой — цель данной работы: какие внешние силы $q = q(x_1, x_2, t)$, $p_k = p_k(s, t)$ ($k = 1, 2$), где s — длина дуги контура γ , $0 \leq t < t_*$, нужно приложить к мембране, находящейся при $t < 0$ в естественном недеформированном состоянии, чтобы при $t = t_*$ после их мгновенного снятия и соответствующей упругой разгрузки получить заданные значения остаточных прогибов $w_* = w_*(x_1, x_2)$ и чтобы работа этих сил, затраченная на деформирование мембраны, была минимальной? Другими словами, среди всех возможных путей нагружения, приводящих за заданное время t_* к заданной остаточной форме поверхности первоначально плоской мембраны, необходимо выбрать оптимальный в смысле энергетических затрат путь.

Считаем, что заданная поверхность выпуклая, т. е.

$$(1.6) \quad \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 > 0,$$