УДК 517.977.5

УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ВНУТРЕННЕЙ МАССЫ

Ф. Л. Черноусько

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия
E-mail: chern@ipmnet.ru

Рассматривается задача об изменении ориентации твердого тела в пространстве с помощью движения внутренней массы. Показана принципиальная возможность произвольной переориентации тела за счет специальных движений внутренней массы. Предложены способы управления внутренними движениями, обеспечивающие заданную переориентацию.

Ключевые слова: твердое тело, относительное движение, управление, ориентация.

DOI: 10.15372/PMTF20190209

Введение. Заданные движения твердого тела относительно центра масс могут быть реализованы с помощью вспомогательных внутренних масс, совершающих специальные перемещения относительно тела. Данный принцип управления движением используется, в частности, в микророботах [1, 2] и в роботах, движущихся внутри труб [3]. Такие роботы, называемые также капсульными роботами или вибророботами, могут совершать поступательные движения при наличии сил сопротивления внешней среды; они не имеют внешних движителей (колес, ног, гусениц, винтов, пропеллеров), могут быть выполнены герметичными и использоваться для работы в агрессивных и ранимых средах.

Одномерные поступательные движения систем с внутренними подвижными массами исследованы в ряде работ (см., например, [4–8]), в которых определена средняя скорость перемещения таких систем при наличии различных сил внешнего сопротивления среды, в том числе сухого трения и вязкого трения с линейным, квадратичным и более общими законами сопротивления, зависящими от скорости движения. Найдены оптимальные значения геометрических и механических параметров, а также законы оптимального управления, обеспечивающие наибольшую среднюю скорость перемещения. Полученные теоретические результаты подтверждены в экспериментальных работах [7, 8].

Двумерные и трехмерные движения систем, управляемых с помощью внутренних подвижных масс, значительно сложнее, чем в одномерном случае. Двумерные движения таких систем по плоскости при наличии сухого трения исследованы в [9].

Представляет интерес изучение динамики систем с внутренними подвижными массами при отсутствии внешних сил. Если такая система в начальный момент времени покоится, то ее центр масс остается неподвижным, и поступательное движение этой системы в пространстве невозможно. Однако ориентация этой системы в пространстве может измениться в результате перемещения внутренних масс. Данный способ переориентации можно

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 18-11-00307).

использовать не только в случае капсульных роботов при малых значениях внешних сил, но и для управления угловым положением аппаратов в космическом пространстве.

В работах [10, 11] исследованы оптимальные двумерные (плоские) движения твердого тела, управляемого с помощью внутренней подвижной массы, в отсутствие внешних сил. Определены плоские движения внутренней массы, соответствующие максимально быстрому повороту тела вокруг неподвижной оси, в случае если внутренняя масса мала по сравнению с массой тела [10], а также в общем случае [11].

В настоящей работе рассматривается пространственная (трехмерная) переориентация твердого тела, управляемого с помощью подвижной внутренней массы в отсутствие внешних сил.

1. Постановка задачи управления движением. Рассмотрим замкнутую механическую систему, состоящую из твердого тела P массой M и материальной точки Q массой m. Точка Q снабжена двигателем (актюатором) и может перемещаться относительно тела P. Будем полагать, что внешние силы, действующие на систему $P+Q$, пренебрежимо малы, поэтому единственными силами, действующими на систему, являются силы взаимодействия P и Q.

Предположим, что в начальный момент времени $t=0$ тела P и Q находятся в состоянии покоя. Тогда при всех t центр масс O системы $P+Q$ остается неподвижным. Обозначим через C центр масс твердого тела P и введем декартову систему координат $Cx_1x_2x_3$, связанную с телом P. В качестве осей Cx_i этой системы выберем главные центральные оси инерции тела P. Обозначим через $\boldsymbol{R}_C = OC$ и $\boldsymbol{R}_Q = OQ$ радиус-векторы точек C и Q относительно точки O, а через $\boldsymbol{r} = CQ$ — радиус-вектор точки Q относительно точки C. Имеем

$$\boldsymbol{R}_Q = \boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{r}.$$

Поскольку центр масс O системы $P+Q$ неподвижен, имеет место равенство

$$M\boldsymbol{R}_C + m(\boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{r}) = 0.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{R}_C = -\mu\boldsymbol{r}, \qquad \mu = m/(M+m). \tag{1.1}$$

На систему $P+Q$ не оказывают влияния внешние силы, поэтому ее импульс и момент импульса сохраняются постоянными и равными нулю. Закон сохранения импульса принимает вид

$$M\boldsymbol{v}_C + m(\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{v}_C = \dot{\boldsymbol{R}}_C$ — абсолютная скорость точки C; $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ — скорость движения точки Q относительно системы $Cx_1x_2x_3$; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость твердого тела P.

Закон сохранения момента импульса для системы $P+Q$ можно записать в виде

$$M\boldsymbol{R}_C\times\boldsymbol{v}_C + J\cdot\boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{R}_C+\boldsymbol{r})\times(\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1.3}$$

где J — тензор инерции тела P относительно его центра масс C.

Из уравнения (1.2) находим

$$\boldsymbol{v}_C = -\mu(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}) \tag{1.4}$$

(μ введено в (1.1)). Подставляя $\boldsymbol{R}_C$ из (1.1) и $\boldsymbol{v}_C$ из (1.4) в уравнение (1.3) и проводя упрощения, получаем уравнение

$$cJ\cdot\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}) = 0, \qquad c = (M+m)/(Mm), \tag{1.5}$$

которое описывает зависимость угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела P от положения $\boldsymbol{r}$ и скорости $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ движения точки Q в относительной системе координат $Cx_1x_2x_3$, связанной с телом P.

2. Построение решения задачи управления. Введем обозначение

$$\boldsymbol{b} = cJ \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}), \tag{2.1}$$

с учетом которого основное уравнение (1.5) запишем в виде

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = 0. \tag{2.2}$$

Отсюда следует равенство

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{r} = 0,$$

означающее, что векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны. Поэтому тройка взаимно перпендикулярных векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b}$ образует базис в трехмерном пространстве, и любой вектор можно представить в виде линейной комбинации этих векторов.

Следовательно, вектор $\boldsymbol{v}$ скорости точки Q можно искать в виде

$$\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{r} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b}, \tag{2.3}$$

где α, β, γ — скалярные величины, подлежащие определению. Подставляя выражение (2.3) в уравнение (2.2) и проводя упрощения, получаем

$$(1 - \gamma r^2)\boldsymbol{b} + \beta \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b} = 0.$$

В силу ортогональности векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b}$ данное равенство выполняется лишь при условиях

$$\beta = 0, \qquad \gamma = r^{-2}. \tag{2.4}$$

Таким образом, из соотношений (2.3), (2.4) следует

$$\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{r} + r^{-2} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b}, \tag{2.5}$$

где величина α может быть произвольной.

В случае если пространственное движение тела P задано, зависимость $\boldsymbol{\omega}(t)$ можно считать известной. Тогда с использованием уравнений (2.1), (2.5) получаем

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \alpha \boldsymbol{r} + c r^{-2} \boldsymbol{r} \times (J \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2.6}$$

Здесь константа c определена из соотношения (1.5). Векторное дифференциальное уравнение (2.6) позволяет определить зависимость $\boldsymbol{r}(t)$ при заданном $\boldsymbol{\omega}(t)$, причем скалярная функция $\alpha(t)$ может быть произвольной. Интегрируя это уравнение при заданном начальном условии

$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0, \tag{2.7}$$

можно определить траекторию $\boldsymbol{r}(t)$ точки Q в системе координат $Cx_1x_2x_3$, связанной с твердым телом P. Движение по данной траектории обеспечивает реализацию заданной зависимости $\boldsymbol{\omega}(t)$.

3. Частные случаи задачи управления. Рассмотрим некоторые частные случаи зависимости (2.6).

Потребуем, чтобы точка Q двигалась относительно тела P с относительной скоростью, имеющей заданное значение V, т. е.

$$|\boldsymbol{v}| = V. \tag{3.1}$$

Возводя в квадрат обе части равенства (2.5), получаем

$$v^2 = \alpha^2 r^2 + r^{-2} b^2,$$

откуда с учетом (3.1) находим

$$\alpha = \pm r^{-2} (V^2 r^2 - b^2)^{1/2}.$$

Для реализации данного подхода должно выполняться неравенство

$$b^2 \leqslant V^2 r^2. \tag{3.2}$$

Обозначим через J_i главные центральные моменты инерции твердого тела P ($i = 1, 2, 3$) и, не нарушая общности, примем

$$J_1 \geqslant J_2 \geqslant J_3.$$

Тогда для вектора $\boldsymbol{b}$ из (2.1) справедлива оценка

$$b^2 \leqslant [(cJ_1)^2 + r^4]\omega^2.$$

Следовательно, для выполнения условия (3.2) достаточно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$[(cJ_1)^2 + r^4]\omega^2 \leqslant V^2 r^2. \tag{3.3}$$

Неравенство (3.3) налагает условия на значения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{r}$ и выполняется, если вектор $\boldsymbol{r}(t)$ не близок к нулю, а угловая скорость $\boldsymbol{\omega}(t)$ мала.

Простейшим допущением является условие $\alpha = 0$, при котором уравнение (2.6) принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{r}} = cr^{-2} \boldsymbol{r} \times (J \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{3.4}$$

Умножая обе части уравнения (3.4) скалярно на вектор $\boldsymbol{r}$, получаем $r^2 = \mathrm{const}$. Из начального условия (2.7) получаем

$$r(t) \equiv r_0, \tag{3.5}$$

и уравнение (3.4) принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times (cr_0^{-2} J \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}).$$

В соответствии с (3.5) траектория $\boldsymbol{r}(t)$ расположена на сфере радиусом r_0 с центром в точке C.

Второе и третье слагаемые в правой части соотношения (2.6) являются линейными функциями угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, поэтому скалярную величину α из (2.6) зададим также в виде линейной функции $\boldsymbol{\omega}$:

$$\alpha = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{q}$ — некоторый вектор, не зависящий от $\boldsymbol{\omega}$. Тогда уравнение (2.6) принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r} + cr^{-2} \boldsymbol{r} \times (J \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{3.6}$$

обобщающий соотношение (3.4).

Пусть заданы начальная и конечная ориентации твердого тела P в пространстве. Известно, что заданное изменение ориентации тела можно осуществить путем одного поворота тела вокруг некоторой оси, орт $\boldsymbol{e}$ которой неподвижен в пространстве. Этот орт неподвижен также относительно тела P, т. е. в системе координат $Cx_1x_2x_3$. При этом угловую скорость тела можно представить в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega(t)\boldsymbol{e}. \tag{3.7}$$

Здесь $\Omega(t)$ — некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^T \Omega(t)\,dt = \varphi_0, \tag{3.8}$$

T — время поворота; φ_0 — заданный угол поворота. Введем текущий угол φ поворота тела P относительно оси $\boldsymbol{e}$ с помощью соотношений

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega(t), \qquad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(T) = \varphi_0. \tag{3.9}$$

Используя равенства (3.7), (3.9), уравнение (3.6) можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\varphi} = (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{r} + cr^{-2}\boldsymbol{r}\times(J\cdot\boldsymbol{e}) + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}. \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) для $\boldsymbol{r}(t)$ зависит не от вида функции $\Omega(t)$, а лишь от постоянных величин c, J, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{q}$, причем вектор $\boldsymbol{q}$ можно принять равным нулю. Это уравнение следует интегрировать по φ от 0 до φ_0 при начальном условии

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0,$$

вытекающем из (2.7).

В случае $\boldsymbol{q} = 0$ уравнение (3.10) с учетом условия (3.5) принимает наиболее простой вид

$$\frac{\boldsymbol{d}r}{d\varphi} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}_1, \tag{3.11}$$

где $\boldsymbol{e}_1$ — постоянный вектор:

$$\boldsymbol{e}_1 = cr_0^{-2}J\cdot\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}. \tag{3.12}$$

Решение уравнения (3.11) можно представить в виде суммы двух взаимно перпендикулярных векторов

$$\boldsymbol{r} = \lambda\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\tau}, \qquad \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{\tau} = 0 \tag{3.13}$$

(λ — постоянный скалярный коэффициент). Из уравнения (3.11) следует, что скалярное произведение $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_1$ постоянно. Тогда в соответствии с (3.13), (3.5) получаем

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_1 = \lambda e_1^2 = \boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{e}_1,$$

откуда находим

$$\lambda = (\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{e}_1)e_1^{-2}.$$

В результате равенство (3.13) принимает вид

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{e}_1}{e_1^2}\,\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\tau}.$$

Поскольку согласно (3.5) длина вектора $\boldsymbol{r}$ является постоянной, а векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{\tau}$ — взаимно перпендикулярными, длина вектора $\boldsymbol{\tau}$ также постоянна и равна

$$\tau = \sqrt{r_0^2 - (\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{e}_1)^2}\,.$$

Из равенств (3.11), (3.13) следует, что вектор $\boldsymbol{\tau}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\varphi} = \boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{e}_1,$$

которое описывает равномерное (по переменной φ) вращение вектора $\boldsymbol{\tau}$ в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{e}_1$.

Таким образом, траектория движения точки Q относительно тела P представляет собой окружность, лежащую в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{e}_1$, задаваемому равенством (3.12). Найденное движение точки Q обеспечивает заданную переориентацию тела P.

Заключение. Показано, что управлять ориентацией твердого тела в пространстве в отсутствие внешних сил можно с помощью определенных движений внутренней массы относительно тела. Представлены некоторые способы построения траекторий этих движений, которые при определенных условиях могут представлять собой движение по окружностям.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Schmoeckel F., Worn H.** Remotely controllable mobile microrobots acting as nano positioners and intelligent tweezers in scanning electron microscopes // Proc. of the Intern. conf. on robotics and automation (IEEE), Seoul (Korea), May 21–26, 2001. N. Y.: IEEE, 2001. V. 4. P. 3903–3913.
2. **Vartholomeos P., Papadopoulos E.** Dynamics, design and simulation of a novel micro-robotic platform employing vibration microactuators // Trans. ASME. J. Dynam. Systems, Measurement Control. 2006. V. 128, N 1. P. 122–133.
3. **Gradetsky V., Solovtsov V., Kniazkov M., et al.** Modular design of electro-magnetic mechatronic microrobots // Proc. of the 6th Intern. conf. on climbing and walking robots (CLAWAR), Catania (Italy), 17–19 Sept. 2003. Catania: Prof. Engng Publ., 2003. P. 651–658.
4. **Черноусько Ф. Л.** Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, № 6. С. 915–941.
5. **Черноусько Ф. Л.** Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // Прикл. математика и механика. 2008. Т. 72, № 2. С. 202–215.
6. **Болотник Н. Н., Фигурина Т. Ю., Черноусько Ф. Л.** Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, № 1. С. 3–22.
7. **Li H., Firuta K., Chernousko F. L.** Motion generation of the Capsubot using internal force and static friction // Proc. of the 45th IEEE conf. on decision and control. San Diego: IEEE, 2006. P. 6575–6580.
8. **Chernousko F. L.** Locomotion of multibody robotic systems: dynamics and optimization // Theoret. Appl. Mech. (Serbia). 2018. V. 45, N 1. P. 17–33.
9. **Chernousko F. L.** Two-dimensional motions of a body containing internal moving masses // Meccanica. 2016. V. 51, N 12. P. 3203–3209.
10. **Черноусько Ф. Л.** Оптимальное управление движением двухмассовой системы // Докл. АН. 2018. Т. 480, № 5. С. 528–532.
11. **Shmatkov A. M.** Time-optimal rotation of a body by displacement of a mass point // Dokl. Phys. 2018. V. 63, N 8. P. 337–341.

Поступила в редакцию 19/XI 2018 г.,
после доработки — 19/XI 2018 г.
Принята к публикации 26/XI 2018 г.