

УДК 539.4+539.37

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Ю. В. Немировский, Т. П. Романова

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
630090 Новосибирск  
E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Получено общее решение задачи о динамическом изгибе идеальной жесткопластической пластины переменной толщины с шарнирно опертым или защемленным криволинейным контуром, на которую действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Показано, что существует несколько механизмов деформирования пластин. Для каждого из них получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия реализации. Приведены примеры численных решений.

**Ключевые слова:** жесткопластическая пластина, криволинейный контур, переменная толщина, динамическая нагрузка, предельная нагрузка, остаточный прогиб.

**Введение.** Исследование динамического поведения элементов конструкций при воздействии нагрузок взрывного типа имеет большое значение для оценки степени их повреждаемости, анализа рисков и прогнозирования чрезвычайных ситуаций. Для решения таких задач широко применяется модель идеального жесткопластического тела [1]. На основе этой модели в работах [2–9] исследовано динамическое поведение криволинейных пластин с постоянной толщиной под действием динамических нагрузок.

При создании преград, защищающих от воздействия нагрузок взрывного типа, важнейшей является проблема выбора материала и его распределения по конструкции, обеспечивающего минимальную степень повреждаемости. Эта проблема непосредственно связана с проблемой оптимального проектирования, которая достаточно хорошо изучена применительно к статическим и динамическим гармоническим воздействиям на конструкции [10, 11]. В литературе неоднократно обсуждался вопрос о необходимости решения проблем оптимизации конструкций при воздействии динамических нагрузок [12]. Однако авторам настоящей работы не известны исследования по этой теме, за исключением работ [13] для балок и [14] для оболочек вращения. Предлагаемая статья продолжает исследования в данном направлении применительно к плоским пластинам со сложным выпуклым опорным контуром.

В работе предложена методика, основанная на модели идеального жесткопластического тела, которая позволяет рассчитывать криволинейные пластины переменной толщины определенного вида под действием кратковременных интенсивных динамических нагрузок. Методика может быть использована при проведении различных инженерных расчетов.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-08-08035-офи).

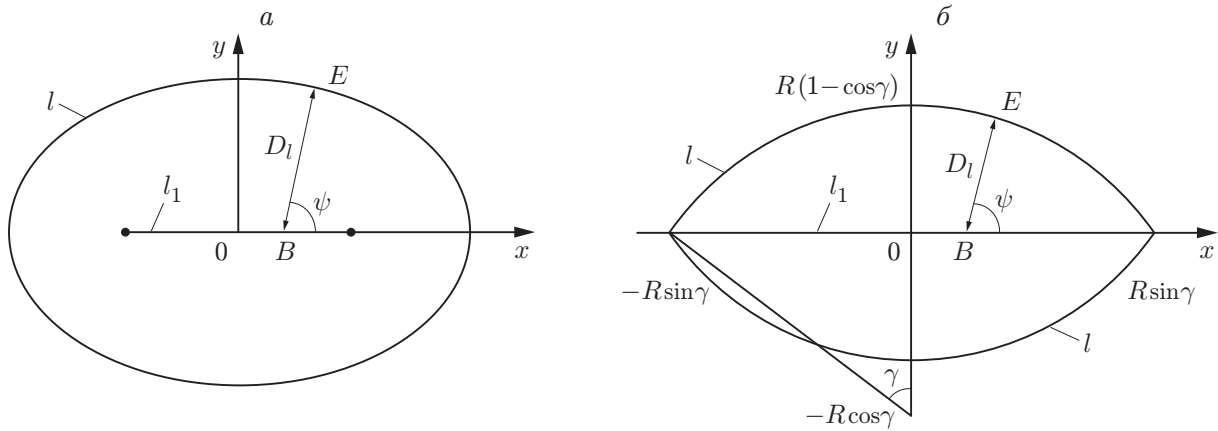


Рис. 1. Схема 1 деформирования пластины без особых точек (а) и с особыми точками (б) на контуре

1. Рассмотрим тонкую идеальную жесткопластическую пластину переменной толщины с криволинейным контуром, шарнирно опертым или защемленным. Пластина находится под действием равномерно распределенной по поверхности взрывной нагрузки интенсивностью  $P(t)$ , которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения  $P_{\max} = P(0)$  в начальный момент времени  $t = 0$  с последующим быстрым его уменьшением. Пластина имеет произвольный кусочно-гладкий выпуклый контур  $l$ , заданный в параметрической форме:  $x = x_1(\varphi)$ ,  $y = y_1(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Радиус кривизны контура  $l$  (за исключением особых точек) равен

$$R(\varphi) = L^3(\varphi)/(x_1'y_1'' - x_1''y_1').$$

Здесь  $L(\varphi) = \sqrt{x_1'^2(\varphi) + y_1'^2(\varphi)}$ ;  $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial\varphi$ . Для определенности будем рассматривать пластины, симметричные относительно оси  $x$ ; геометрические размеры пластины по оси  $y$  не больше, чем по оси  $x$ , особые точки контура расположены только на оси  $x$  (рис. 1).

Введем криволинейную ортогональную систему координат  $(\nu_1, \nu_2)$ , связанную с декартовой системой координат  $(x, y)$  соотношениями

$$x = x_1(\nu_2) - \nu_1 y_1'(\nu_2)/L(\nu_2), \quad y = y_1(\nu_2) + \nu_1 x_1'(\nu_2)/L(\nu_2).$$

Кривые  $\nu_1 = \text{const}$  находятся на расстоянии  $\nu_1$  от контура  $l$  и имеют радиус кривизны  $\rho_1 = R(\nu_2) - \nu_1$ . Прямые линии  $\nu_2 = \text{const}$  перпендикулярны контуру  $l$  (радиус кривизны  $\rho_2 = \infty$ ). В этом случае уравнение контура пластины  $l$  имеет вид  $\nu_1 = 0$ ,  $0 \leq \nu_2 \leq 2\pi$ .

Будем считать, что толщина пластины  $h$  является функцией параметра  $\nu_1$  и изменяется симметрично относительно срединной поверхности пластины. Рассматривается схема деформирования криволинейной пластины с определенной функцией толщины  $h(\nu_1)$ :  $h(\nu_1) = \text{const}$  при  $\nu_1 \geq \nu_1^c$  ( $\nu_1^c$  — некоторое заданное значение). Другие ограничения на функцию  $h(\nu_1)$  и величину  $P_{\max}$  приведены ниже.

В зависимости от значения  $P_{\max}$  возможны три схемы деформирования рассматриваемой пластины из жесткопластического материала. При нагрузках, не превышающих предельные нагрузки (“низких” нагрузках), пластина остается в состоянии покоя. При нагрузках, незначительно превышающих предельные (“средних” нагрузках), пластина деформируется в некоторую линейчатую поверхность. Как и в случае постоянной толщины [2, 4–8], деформирование пластины переменной толщины рассматриваемого типа сопровождается образованием во внутренней области пластины линейного пластического шарнира  $l_1$ . В силу симметрии пластины шарнир  $l_1$  расположен на оси  $x$ . В случае, если на контуре  $l$  имеются особые точки, шарнир  $l_1$  проходит через них.

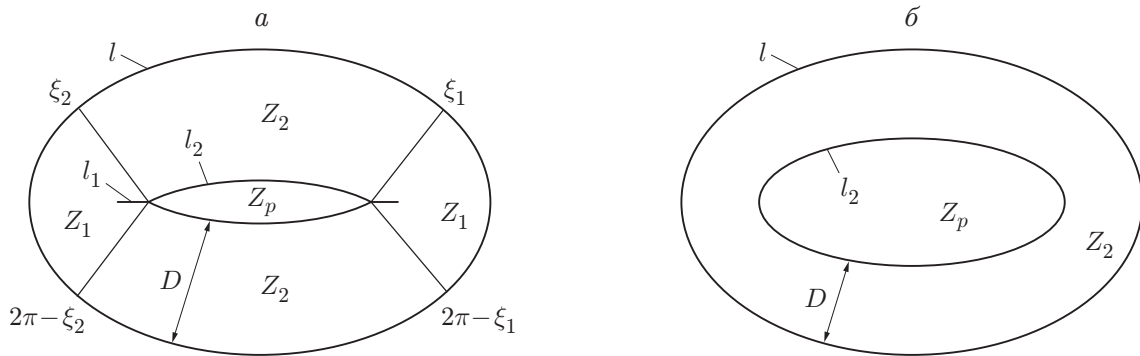


Рис. 2. Схемы деформирования:  
а — схема 2; б — схема 3

Пусть  $D_l(\nu_2)$  — расстояние от контура  $l$  до линии  $l_1$  по нормали к  $l$  (см. рис. 1) [2]:

$$D_l(\nu_2) = |y_1(\nu_2)/x_1'(\nu_2)|L(\nu_2).$$

Тогда шарнир  $l_1$  расположен в интервале  $x_1(\pi) - D_l(\pi) \leq x \leq x_1(0) - D_l(0)$  и задан уравнением

$$\nu_1 = D_l(\nu_2), \quad 0 \leq \nu_2 \leq \pi. \quad (1)$$

Нормальный изгибающий момент на линии  $l_1$  равен  $\sigma_0 h^2(D_l)/4$  ( $\sigma_0$  — предел текучести материала пластины). Такую схему движения будем называть схемой 1.

Как и в случаях изгиба балок [1], круглых и кольцевых пластин, прямоугольных и полигональных пластин [1], пластин со сложным контуром [2–9], при достаточно больших значениях  $P_{\max}$  динамическое деформирование пластины переменной толщины может сопровождаться возникновением области интенсивного пластического деформирования  $Z_p$ , движущейся поступательно. При этом возможны ситуации, когда часть шарнира  $l_1$  сохраняется (схема 2) либо шарнир  $l_1$  отсутствует (схема 3). Схема 2, представленная на рис. 2,а, соответствует “высоким” нагрузкам, схема 3, приведенная на рис. 2,б, — “сверхвысоким” нагрузкам. Во всех схемах деформирования нормаль к кривой  $l$ , направленная внутрь области, занятой пластиной, попадает либо на шарнир  $l_1$ , либо на контур  $l_2$  — контур области  $Z_p$ . Обозначим через  $Z_i$  область пластины (не включающую область  $Z_p$ ), из любой точки которой нормаль к контуру  $l$  попадает на кривую  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ). Можно показать, что нормаль к линии  $l_2$  является также нормалью к контуру  $l$  и расстояние  $D$  между  $l$  и  $l_2$  не зависит от параметра  $\nu_2$  [2, 4]. Уравнение для контура  $l_2$  области  $Z_p$  имеет вид  $\nu_1 = D$  ( $\xi_1 \leq \nu_2 \leq \xi_2$ ,  $2\pi - \xi_2 \leq \nu_2 \leq 2\pi - \xi_1$ ) [2, 4]. Область постоянной толщины пластины ( $\nu_1 \geq \nu_1^c$ ) должна включать область  $Z_p$ . Толщину пластины в области  $Z_p$  обозначим через  $h(\nu_1) = h_c$ . Линия  $l_2$  является пластическим шарниром с нормальным изгибающим моментом  $\sigma_0 h_c^2/4$ .

Схема 2 соответствует общему случаю деформирования пластины. В отсутствие областей  $Z_p$  и  $Z_2$  эта схема переходит в схему 1. Когда отсутствует область  $Z_1$ , схема 2 переходит в схему 3. Рассмотрим схему 2.

Уравнение движения пластины выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [15]:

$$K = A - N. \quad (2)$$

Здесь  $K$ ,  $A$  — мощности инерционных и внешних сил соответственно:

$$K = \iiint_V \rho_V \ddot{u} \dot{u}^* dV, \quad A = \iint_S P(t) \dot{u}^* dS,$$

$N$  — мощность внутренних сил;  $V$ ,  $S$  — объем и площадь пластины;  $\rho_V$  — плотность материала пластины;  $u$  — прогиб;  $dV$ ,  $dS$  — элементы объема и площади; точки над символами обозначают производные по времени; величины с верхним индексом “\*” — допустимые скорости. Выражение для  $N$  запишем ниже.

Обозначим через  $\dot{w}_c(t)$  скорость поступательного движения области  $Z_p$ , а через  $\dot{\alpha}$  — скорость угла поворота области  $Z_2$  на опорном контуре. Из условия непрерывности скоростей на границе областей  $Z_2$  и  $Z_p$  следует, что  $\dot{\alpha}$  не зависит от параметра  $\nu_2$ . Вследствие непрерывности скоростей на границах областей  $Z_1$  и  $Z_2$ , как и в [8], скорость угла поворота области  $Z_1$  на опорном контуре также равна  $\dot{\alpha}$ . Тогда выражения для скоростей прогибов пластины записываются следующим образом:

$$(\nu_1, \nu_2) \in Z_p: \quad \dot{u}(\nu_1, \nu_2, t) = \dot{w}_c(t), \quad (\nu_1, \nu_2) \in Z_i: \quad \dot{u}(\nu_1, \nu_2, t) = \dot{\alpha}(t)\nu_1 \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины в областях  $Z_1$  и  $Z_2$  равны

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \nu_1^2} = 0, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \nu_1} = \frac{\dot{\alpha}(t)}{R(\nu_2) - \nu_1}.$$

В областях  $Z_1$  и  $Z_2$  изгибающий момент  $M_{22} = \sigma_0 h^2(\nu_1)/4$ . На контуре  $l$  пластины  $u(0, \nu_2, t) = \dot{u}(0, \nu_2, t) = 0$ ,  $M_{11} = -\sigma_0 h^2(0)(1 - \eta)/4$ , где  $\eta = 0$  при защемлении контура  $l$  и  $\eta = 1$  при его шарнирном опирании.

Учитывая распределение скорости прогибов (3) и то, что в области  $Z_p$  выполняется условие  $h(\nu_1) = h_c$ , причем  $dV = h(\nu_1) ds$  и  $ds = L(1 - \nu_1/R) d\nu_1 d\nu_2$ , получаем

$$K = \rho_V \left( \ddot{\alpha} \dot{\alpha}^* \iint_{Z_1 \cup Z_2} h(\nu_1) \nu_1^2 ds + \ddot{w}_c \dot{w}_c^* \iint_{Z_p} h ds \right) = \rho_V \left( \ddot{\alpha} \dot{\alpha}^* \Sigma_1 + \ddot{w}_c \dot{w}_c^* h_c \iint_{Z_p} ds \right),$$

$$A = P(t) \left( \dot{\alpha}^* \iint_{Z_1 \cup Z_2} \nu_1 ds + \dot{w}_c^* \iint_{Z_p} ds \right) = P(t) \left( \dot{\alpha}^* \Sigma_2 + \dot{w}_c^* \iint_{Z_p} ds \right),$$

$$\Sigma_1(\xi_1, \xi_2, D) = 2 \left\{ \int_0^{\xi_1} L \left[ \int_0^{D_l(\nu_2)} h \nu_1^2 \left( 1 - \frac{\nu_1}{R} \right) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \right. \\ \left. + \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left[ \int_0^{D(t)} h \nu_1^2 \left( 1 - \frac{\nu_1}{R} \right) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \int_{\xi_2}^{\pi} L \left[ \int_0^{D_l(\nu_2)} h \nu_1^2 \left( 1 - \frac{\nu_1}{R} \right) d\nu_1 \right] d\nu_2 \right\},$$

$$\Sigma_2(\xi_1, \xi_2, D) = 2 \left\{ \int_0^{\xi_1} L \left[ \int_0^{D_l(\nu_2)} \nu_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{R} \right) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \right. \\ \left. + \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left[ \int_0^{D(t)} \nu_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{R} \right) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \int_{\xi_2}^{\pi} L \left[ \int_0^{D_l(\nu_2)} \nu_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{R} \right) d\nu_1 \right] d\nu_2 \right\}.$$

Выражение для мощности внутренних сил  $N$  в (2) представим в виде

$$N = \sum_{i=1}^4 N_i,$$

где  $N_1, N_2, N_3, N_4$  — мощности внутренних сил на контуре  $l$ , внутри областей  $Z_1$  и  $Z_2$ , на линии  $l_2$  и на линии  $l_1$  соответственно:

$$N_1 = (1 - \eta)\sigma_0 \frac{h^2(0)}{4} \oint_l [\dot{\theta}^*]_l dl \quad (dl = L d\nu_2), \quad N_2 = \frac{\sigma_0}{4} \iint_{Z_1 \cup Z_2} h^2(\nu_1) \varkappa_2^* ds,$$

$$N_3 = \sigma_0 \frac{h^2(D)}{4} \oint_{l_2} [\dot{\theta}^*]_{l_2} dl_2, \quad N_4 = \frac{\sigma_0}{4} \int_{l_1} h^2(D_l(\nu_2)) [\dot{\theta}^*]_{l_1} dl_1,$$

$[\dot{\theta}]_m$  — разрыв угловой скорости на линии  $m$ ;  $dl, dl_1, dl_2$  — элементы длины линий  $l, l_1, l_2$ . Из (3) с учетом того, что нормаль к линии  $l_2$  является нормалью к контуру  $l$ , следует  $[\dot{\theta}]_l = [\dot{\theta}]_{l_2} = \dot{\alpha}$ . Тогда

$$N_1 = (1 - \eta)\sigma_0 \frac{h^2(0)}{2} \dot{\alpha}^* \int_0^\pi L d\nu_2,$$

$$N_2 = \frac{\sigma_0}{4} \dot{\alpha}^* \iint_{Z_1 \cup Z_2} h^2(\nu_1) \frac{1}{R(\nu_2) - \nu_1} ds =$$

$$= \frac{\sigma_0}{2} \dot{\alpha}^* \left[ \int_0^{\xi_1} \frac{L}{R} \left( \int_0^{D_l(\nu_2)} h^2 d\nu_1 \right) d\nu_2 + \left( \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{L}{R} d\nu_2 \right) \int_0^{D(t)} h^2 d\nu_1 + \int_{\xi_2}^\pi \frac{L}{R} \left( \int_0^{D_l(\nu_2)} h^2 d\nu_1 \right) d\nu_2 \right],$$

$$N_3 = \sigma_0 \frac{h^2(D)}{4} \dot{\alpha}^* \int_{l_2} dl_2 = \frac{\sigma_0}{2} h^2(D) \dot{\alpha}^* \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left( 1 - \frac{D}{R} \right) d\nu_2.$$

Для определения  $N_4$  вычислим  $[\dot{\theta}]_{l_1}$  и  $dl_1$ . Из уравнения (1) для линии  $l_1$  получим  $dl_1 = \sqrt{(1 - D_l/R)^2 L^2 + (\partial D_l / \partial \nu_2)^2} d\nu_2$ . Так как  $(\partial D_l / \partial \nu_2)^2 = (y_1'^2 L^2 / x_1'^2)(1 - D_l/R)^2$ , то

$$dl_1 = \frac{(1 - D_l/R)L^2}{|x_1'|} d\nu_2.$$

Разрыв угловой скорости на линии  $l_1$  обозначим  $[\dot{\theta}]_{l_1} = 2\dot{\beta}$ . Для вычисления угла  $\beta$  из точки  $E(0, \nu_2)$  контура  $l$ , такой что  $\nu_2 \in (0, \xi_1)$  или  $\nu_2 \in (\xi_2, \pi)$ , на недеформированной пластине проведем нормаль к  $l$  до пересечения с линией  $l_1$  в точке  $B$  (рис. 1, 3);  $|BE| = D_l(\nu_2)$ . Отрезок  $BE$  пересекает линию  $l_1$  под углом  $\psi$  ( $\text{tg } \psi = -x_1'/y_1'$ ). Через отрезок  $BE$  проведем плоскость  $BEC$ , перпендикулярную исходной поверхности пластины ( $BC \perp BE$ ) (см. рис. 3). Проведем также плоскость  $ECD$ , касающуюся деформированной поверхности

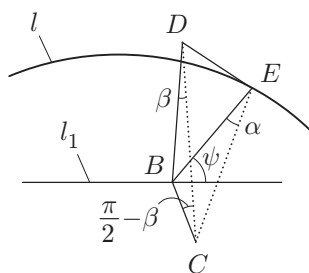


Рис. 3. Дополнительные построения для вычисления разрыва угловой скорости на линии  $l_1$

пластины по прямой  $EC$ . Тогда  $\angle BEC = \alpha$ . Через точку  $B$  проведем плоскость  $BCD$ , нормальную линии  $l_1$ . Получим  $\angle BCD = \pi/2 - \beta$  и, следовательно,  $\angle BDC = \beta$ . Так как  $|BC| = |BE| \alpha$  и  $|BC| = |BD| \beta$ , то  $\beta = \alpha |BE|/|BD|$ . Тогда

$$\dot{\beta} = \dot{\alpha} \sin \psi = \dot{\alpha} |x'_1|/L.$$

Подставляя вычисленные значения в выражение для  $N_4$ , получим

$$N_4 = \dot{\alpha}^* \frac{\sigma_0}{2} \left[ \int_0^{\xi_1} h^2(D_l(\nu_2)) \left(1 - \frac{D_l}{R}\right) L d\nu_2 + \int_{\xi_2}^{\pi} h^2(D_l(\nu_2)) \left(1 - \frac{D_l}{R}\right) L d\nu_2 \right].$$

Полная мощность внутренних сил пластины  $N$  определяется выражением

$$N = \dot{\alpha}^* \sigma_0 \Sigma_3, \quad \Sigma_3(\xi_1, \xi_2, D) = \frac{1}{\dot{\alpha}^* \sigma_0} \sum_{i=1}^4 N_i.$$

Заметим, что если  $h(\nu_1) = \text{const}$ , то

$$N = (2 - \eta) \dot{\alpha}^* \sigma_0 \frac{h^2}{4} \int_0^{2\pi} L d\nu_2.$$

Подставляя выражения для  $K$ ,  $A$ ,  $N$  в (2) и учитывая, что  $\dot{\alpha}^*$ ,  $\dot{w}_c^*$  независимы, получим уравнения движения в случае деформирования по схеме 2:

$$\rho_V \ddot{\alpha} \Sigma_1 = P(t) \Sigma_2 - \sigma_0 \Sigma_3; \quad (4)$$

$$\rho_V h_c \ddot{w}_c = P(t). \quad (5)$$

Из условия непрерывности скоростей на границах областей  $Z_2$  и  $Z_p$ ,  $Z_2$  и  $Z_1$  следует

$$\dot{\alpha} D = \dot{w}_c; \quad (6)$$

$$D(t) = D_i(\xi_i(t)) \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

Начальные условия имеют вид

$$\dot{\alpha}(0) = \alpha(0) = \dot{w}_c(0) = w_c(0) = 0. \quad (8)$$

Начальные значения  $D_0 = D(0)$ ,  $\xi_{i0} = \xi_i(0)$  для функций  $D(t)$ ,  $\xi_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) определяются в зависимости от значения  $P_{\max}$  (см. ниже).

Система уравнений (4)–(7) описывает движение в случае деформирования по схеме 2. В случае схемы 3 область  $Z_1$  отсутствует, а движение определяется уравнениями (4)–(6) при замене  $\Sigma_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) на  $\Omega_i(D) = \Sigma_i(0, \pi, D)$ . В случае схемы 1 области  $Z_2$  и  $Z_p$  отсутствуют, а поведение пластины описывается уравнением (4) при замене  $\Sigma_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) на  $\Omega_i^* = \Sigma_i(\xi_m, \xi_m, D_{\max})$ , где значение  $\xi_m$  такое, что  $D_{\max} = \max_{\nu_2} D_l(\nu_2) = D_l(\xi_m)$ .

**2.** Проведем анализ деформирования пластины. Если  $0 < P_{\max} \leq P_0$  (“низкие” нагрузки), где  $P_0$  — предельная нагрузка, то пластина остается в состоянии покоя. Величину  $P_0$  определим из уравнения (4) при замене  $\Sigma_i$  на  $\Omega_i^*$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) в момент начала движения  $t = 0$ , считая  $\ddot{\alpha}(0) = 0$ . Тогда

$$P_0 = \sigma_0 \Omega_3^* / \Omega_2^*. \quad (9)$$

Если  $P_0 < P_{\max} \leq P_1$  (“средние” нагрузки), где  $P_1$  — нагрузка, соответствующая появлению области  $Z_p$ , то движение пластины происходит в соответствии со схемой 1.

Нагрузку  $P_1$  определим следующим образом. Дифференцируя (6) по времени и исключая величины  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{w}_c$  с помощью (4), (5), получим соотношение

$$-\frac{\rho V \dot{D}}{D} \Sigma_1 = P(t) \left( \Sigma_2 - \frac{\Sigma_1}{D h_c} \right) - \sigma_0 \Sigma_3. \quad (10)$$

При возникновении областей  $Z_2$  и  $Z_p$  в момент времени  $t = 0$  область  $Z_1$  занимает всю пластину и  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_m$ ,  $D = D_{\max}$ . Тогда из (10) получаем

$$P_1 = \frac{\sigma_0 \Omega_3^*}{\Omega_2^* - \Omega_1^* / (D_{\max} h_c)}. \quad (11)$$

Из (9), (11) следует, что  $P_0 < P_1$  независимо от вида функции  $h(\nu_1)$ . В случае схемы 1 уравнение движения (4) запишем в виде

$$\ddot{\alpha}(t) = F[P(t) - P_0], \quad F = \Omega_2^* / (\rho V \Omega_1^*). \quad (12)$$

Начальные условия имеют вид (8). В момент времени  $t = T$  нагрузка снимается, и пластина некоторое время движется по инерции.

При  $0 \leq t \leq T$ , интегрируя уравнение движения (12), получаем

$$\dot{\alpha}(t) = F \left( \int_0^t P(\tau) d\tau - P_0 t \right), \quad \alpha(t) = F \left( \int_0^t \int_0^\lambda P(\tau) d\tau d\lambda - P_0 \frac{t^2}{2} \right).$$

При  $T < t \leq t_f$  движение пластины происходит по инерции до остановки в момент  $t_f$  и описывается уравнением

$$\ddot{\alpha}(t) = -F P_0$$

с полученными начальными условиями  $\dot{\alpha}(T)$ ,  $\alpha(T)$ . Момент  $t_f$  определяется из условия

$$\dot{\alpha}(t_f) = 0. \quad (13)$$

Интегрируя уравнение движения, получаем равенства

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(T) - F P_0 (t - T); \quad (14)$$

$$\alpha(t) = \alpha(T) + \dot{\alpha}(T)(t - T) - F P_0 (t - T)^2 / 2.$$

Из (13), (14) следует

$$t_f = \frac{1}{P_0} \int_0^T P(t) dt.$$

Прогибы вычисляются из уравнений (3), максимальный остаточный прогиб определяется по формуле

$$u_{\max} = D_{\max} F \left[ \frac{1}{2 P_0} \left( \int_0^T P(t) dt \right)^2 - \int_0^T t P(t) dt \right]. \quad (15)$$

Если  $P_1 < P_{\max} \leq P_2$  ("высокие" нагрузки), где  $P_2$  — нагрузка, при которой исчезают область  $Z_1$  и шарнир  $l_1$ , то движение начинается с невырожденной областью  $Z_p$  при  $D_{\min} < D_0 < D_{\max}$ , где  $D_{\min} = \min_{\nu_2} D_l(\nu_2) = \min(D_l(0), D_l(\pi))$ . Для пластин с гладким

опорным контуром  $D_{\min} = \min(R(0), R(\pi))$ . Начальные значения  $D_0, \xi_{i0}$  определяются из равенств (7) и уравнения (10) с учетом условия  $\dot{\alpha}(0) = 0$ :

$$P_{\max} \left( \Sigma_2(\xi_{10}, \xi_{20}, D_0) - \frac{\Sigma_1(\xi_{10}, \xi_{20}, D_0)}{D_0 h_c} \right) = \sigma_0 \Sigma_3(\xi_{10}, \xi_{20}, D_0). \quad (16)$$

Для пластин, имеющих на контуре особые точки, шарнир  $l_1$  не исчезает и  $D_{\min} = 0$ ; в этом случае нагрузка  $P_2$  не определяется. Для пластин с гладким контуром  $l$  нагрузку  $P_2$  определим из (16) при  $D = D_{\min}, \xi_1 = 0, \xi_2 = \pi$ :

$$P_2 = \frac{\sigma_0 \Sigma_3(0, \pi, D_{\min})}{\Sigma_2(0, \pi, D_{\min}) - \Sigma_1(0, \pi, D_{\min}) / (D_{\min} h_c)}.$$

В первой фазе деформирования ( $0 < t \leq t_1$ ) движение происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (4)–(7) с начальными условиями (8) и (16). В этой фазе размер области  $Z_p$  уменьшается по закону (10) ( $\dot{D} > 0$ ). Время  $t_1$ , соответствующее исчезновению области  $Z_p$ , определяется из равенства  $D(t_1) = D_{\max}$ , при этом  $\xi_1(t_1) = \xi_2(t_1) = \xi_m$ . В данный момент определяются значения  $\dot{\alpha}(t_1), \alpha(t_1), \dot{w}_c(t_1), w_c(t_1)$ . В этой фазе возможна остановка движения при  $D(t_{1f}) < D_{\max}$  в момент  $t_{1f}$ , определяемый из уравнения  $\dot{\alpha}(t_{1f}) = 0$ . Если  $t_1 < t_{1f}$ , то движение продолжается во второй фазе.

Вторая фаза движения пластины ( $t_1 < t \leq t_f$ ) происходит по схеме 1 до остановки в момент времени  $t_f$ . Деформирование описывается уравнением (12) с начальными условиями, определенными в конце первой фазы движения. Время остановки определяется условием (13). Все прогибы в пластине вычисляются из уравнений (3) с учетом всех фаз движения.

Если  $P_{\max} > P_2$  (“сверхвысокие” нагрузки), то движение пластины начинается по схеме 3 с невырожденной областью  $Z_p$ . Значение  $D_0$  определяется из уравнения (10) при замене  $\Sigma_i$  на  $\Omega_i(D_0)$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) с учетом условия  $\dot{\alpha}(0) = 0$ :

$$P_{\max} (\Omega_2(D_0) - \Omega_1(D_0) / (D_0 h_c)) = \sigma_0 \Omega_3(D_0). \quad (17)$$

В первой фазе деформирования ( $0 < t \leq t_1$ ) движение пластины происходит по схеме 3 и описывается уравнениями (4)–(6) при замене  $\Sigma_i$  на  $\Omega_i(D)$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) с начальными условиями (8) и (17). В этой фазе размер области  $Z_p$  уменьшается по закону (10) при замене  $\Sigma_i$  на  $\Omega_i(D)$ . Время  $t_1$ , соответствующее появлению области  $Z_2$ , определяется из равенства  $D(t_1) = D_{\min}$ . В этот момент находятся значения  $\dot{\alpha}(t_1), \alpha(t_1), \dot{w}_c(t_1), w_c(t_1), \xi_1(t_1) = 0, \xi_2(t_1) = \pi$ . В данной фазе возможна остановка движения при  $D(t_{2f}) < D_{\min}$  в момент  $t_{2f}$ , определяемый из уравнения  $\dot{\alpha}(t_{2f}) = 0$ . Если  $t_1 < t_{2f}$ , то движение продолжается во второй фазе.

Движение во второй ( $t_1 < t \leq t_2$ ) и третьей ( $t_2 < t \leq t_f$ ) фазах аналогично движению в первой и второй фазах деформирования в случае “высоких” нагрузок при соответствующих начальных значениях. Все прогибы вычисляются из равенств (3) с учетом всех фаз движения.

**3.** Рассмотрим ограничения, налагаемые на функцию  $h(\nu_1)$  и величину  $P_{\max}$  при использовании предлагаемой схемы деформирования. Эти условия можно получить, сравнивая предельную нагрузку  $P_0$  с предельной нагрузкой для других возможных схем движения. Если значение  $h_c$  достаточно большое, то в некоторой центральной области  $Z_c$  ( $\nu_1^c \leq \nu_1 \leq D_l(\nu_2)$ , где  $0 \leq \nu_2 \leq 2\pi$  ( $\nu_1^c \leq D_{\min}$ ) или  $\xi_1^c \leq \nu_2 \leq \xi_2^c$  и  $2\pi - \xi_2^c \leq \nu_2 \leq 2\pi - \xi_1^c$  ( $\nu_1^c > D_{\min}$ )) изгибающий момент  $M_{22} = \sigma_0 h_c^2 / 4$  будет значительно больше, чем в остальной части пластины. Следовательно, область  $Z_c$  не деформируется и движение пластины происходит при наличии центральной жесткой области  $Z_c$ , движущейся поступательно



со скоростью  $\dot{\alpha}\nu_1^c$ . Определим предельную нагрузку  $P_0^c$  для такой схемы деформирования. Мощность внешних сил  $A^c$  равна

$$A^c = P(t) \left( \iint_{Z_1 \cup Z_2} \dot{\alpha}^* \nu_1 ds + \iint_{Z_c} \dot{\alpha}^* \nu_1^c ds \right) = P(t) \dot{\alpha}^* \Sigma_2^c,$$

$$\Sigma_2^c(\xi_1^c, \xi_2^c, \nu_1^c) = 2 \left\{ \int_0^{\xi_1^c} L \left[ \int_0^{D_l(\nu_2)} \nu_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{R} \right) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \int_{\xi_1^c}^{\xi_2^c} L \left[ \int_0^{\nu_1^c} \nu_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{R} \right) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \right.$$

$$\left. + \int_{\xi_2^c}^{\pi} L \left[ \int_0^{D_l(\nu_2)} \nu_1 \left( 1 - \frac{\nu_1}{R} \right) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \nu_1^c \int_{\xi_1^c}^{\xi_2^c} L \left[ \int_{\nu_1^c}^{D_l(\nu_2)} \left( 1 - \frac{\nu_1}{R} \right) d\nu_1 \right] d\nu_2 \right\}.$$

Тогда  $P_0^c = \sigma_0 \Sigma_3(\xi_1^c, \xi_2^c, \nu_1^c) / \Sigma_2^c(\xi_1^c, \xi_2^c, \nu_1^c)$ .

Пластины переменной толщины могут деформироваться с образованием краевых пластических шарниров  $\bar{l}$  не по периметру контура опирания, а на некотором расстоянии  $\nu_1^a$  от контура  $l$  внутри пластины; при этом область вблизи контура пластины остается недеформированной. Уравнение контура  $\bar{l}$  имеет вид  $\nu_1 = \nu_1^a$  ( $\xi_1^a \leq \nu_2 \leq \xi_2^a$ ,  $2\pi - \xi_2^a \leq \nu_2 \leq 2\pi - \xi_1^a$ ). На контуре  $\bar{l}$  изгибающий момент равен  $M_{11} = -\sigma_0 h^2(\nu_1^a)/4$ . Из (9) следует, что предельная нагрузка  $\bar{P}_0$  для защемленной криволинейной пластины с контуром  $\bar{l}$  равна

$$\bar{P}_0 = \sigma_0 \bar{\Omega}_3 / \bar{\Omega}_2,$$

где

$$\bar{\Omega}_3(\xi_1^a, \xi_2^a, \nu_1^a) = \frac{1}{2} \left[ h^2(\nu_1^a) \int_{\xi_1^a}^{\xi_2^a} L \left( 1 - \frac{\nu_1^a}{R} \right) d\nu_2 + \int_{\xi_1^a}^{\xi_2^a} \frac{L}{R} \left( \int_{\nu_1^a}^{D_l(\nu_2)} h^2 d\nu_1 \right) d\nu_2 + \right.$$

$$\left. + \int_{\xi_1^a}^{\xi_2^a} h^2(D_l(\nu_2)) \left( 1 - \frac{D_l}{R} \right) d\nu_2 \right],$$

$$\bar{\Omega}_2(\xi_1^a, \xi_2^a, \nu_1^a) = 2 \int_{\xi_1^a}^{\xi_2^a} L \left[ \int_{\nu_1^a}^{D_l(\nu_2)} (\nu_1 - \nu_1^a) \left( 1 - \frac{\nu_1}{R} \right) d\nu_1 \right] d\nu_2.$$

При этом также возможна ситуация, когда одновременно с образованием краевого шарнира  $\bar{l}$  ( $\nu_1 = \nu_1^a$ ) некоторая центральная часть пластины  $\bar{Z}_c$  ( $\nu_1^c \leq \nu_1 \leq D_l(\nu_2)$ ) остается жесткой (рис. 4). Определим предельную нагрузку  $\bar{P}_0^c$  для такой схемы деформирования. Мощность внешних сил  $\bar{A}^c$  равна

$$\bar{A}^c = P(t) \left( \iint_{\bar{Z}_1 \cup \bar{Z}_2} \dot{\alpha}^* \nu_1 ds + \iint_{\bar{Z}_c} \dot{\alpha}^* \nu_1^c ds \right) = P(t) \dot{\alpha}^* \bar{\Sigma}_2^c,$$

$$\bar{\Sigma}_2^c(\xi_1^c, \xi_2^c, \nu_1^c) = 2 \left\{ \int_{\xi_1^c}^{\xi_2^c} L \left[ \int_{\nu_1^c}^{D_l(\nu_2)} (\nu_1 - \nu_1^c) \left( 1 - \frac{\nu_1}{R} \right) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \right.$$

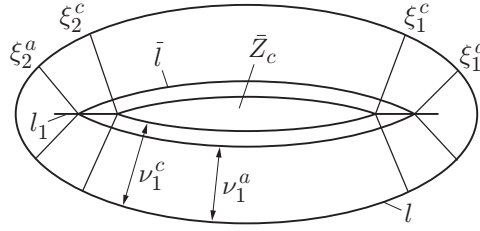


Рис. 4. Схема 1 деформирования пластины в случае, когда одновременно с образованием краевого шарнира  $\bar{l}$  ( $\nu_1 = \nu_1^a$ ) центральная часть пластины  $\bar{Z}_c$  ( $\nu_1^c \leq \nu_1 \leq D_l(\nu_2)$ ) остается жесткой

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\xi_1^c}^{\xi_2^c} L \left[ \int_{\nu_1^a}^{\nu_1^c} (\nu_1 - \nu_1^a) \left(1 - \frac{\nu_1}{R}\right) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \int_{\xi_2^c}^{\xi_2^a} L \left[ \int_{\nu_1^a}^{D_l(\nu_2)} (\nu_1 - \nu_1^a) \left(1 - \frac{\nu_1}{R}\right) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \\
 & + \nu_1^c \int_{\xi_1^c}^{\xi_2^c} L \left[ \int_{\nu_1^c}^{D_l(\nu_2)} \left(1 - \frac{\nu_1}{R}\right) d\nu_1 \right] d\nu_2 \}.
 \end{aligned}$$

Тогда  $\bar{P}_0^c = \sigma_0 \bar{\Omega}_3(\xi_1^a, \xi_2^a, \nu_1^a) / \bar{\Sigma}_2^c(\xi_1^c, \xi_2^c, \nu_1^c)$ .

Если функция  $h(\nu_1)$  имеет такой вид, что выполняется неравенство  $P_0 < \min(P_0^c, \bar{P}_0, \bar{P}_0^c)$ , то пластина будет деформироваться по схемам 1–3 (см. пп. 1, 2). Поскольку предложенная модель движения получена в предположении, что  $h(\nu_1) = \text{const} = h_c$  в области  $Z_p$ , из (16), (17) следует, что должны выполняться ограничения на величину  $P_{\max}$ :

— для пластин с гладким контуром  $l$

$$P_{\max} \leq \frac{\sigma_0 \Omega_3(\nu_1^c)}{\Omega_2(\nu_1^c) - \Omega_1(\nu_1^c) / (\nu_1^c h_c)};$$

— для контура, имеющего особые точки,

$$P_{\max} \leq \frac{\sigma_0 \Sigma_3(\xi_1^c, \xi_2^c, \nu_1^c)}{\Sigma_2(\xi_1^c, \xi_2^c, \nu_1^c) - \Sigma_1(\xi_1^c, \xi_2^c, \nu_1^c) / (\nu_1^c h_c)},$$

где величины  $\xi_i^c$  ( $i = 1, 2, \xi_1^c \leq \xi_2^c$ ) определяются равенством  $\nu_1^c = D_l(\xi_i^c)$ . Для пластин постоянной толщины модель применима при любых значениях величины  $P_{\max}$ . При нагрузках с  $P_{\max} \leq P_1$  модель верна для любой функции  $h(\nu_1)$ , а деформирование происходит по схеме 1.

Если функция  $h(\nu_1)$  и константы  $h_c, \nu_1^c$  таковы, что  $P_0^c < \min(P_0, \bar{P}_0, \bar{P}_0^c)$ , то следует рассматривать задачу о движении криволинейной пластины переменной толщины с жесткой шайбой, расположенной в центральной части пластины. В случае  $h(\nu_1) = \text{const}$  при  $0 \leq \nu_1 \leq \nu_1^c$  эта задача подробно рассмотрена в [16].

Если выполняется условие

$$\bar{P}_0 < \min(P_0, P_0^c, \bar{P}_0^c), \tag{18}$$

то пластина деформируется только в центральной области с контуром  $\bar{l}$  ( $\nu_1 = \nu_1^a$ ). При этом значение  $\nu_1^a$  соответствует минимальному значению  $\bar{P}_0$ , для которого выполняется неравенство (18), а значения  $\xi_i^a$  определяются равенством  $\nu_1^a = D_l(\xi_i^a)$  ( $i = 1, 2, \xi_1^a \leq \xi_2^a$ ), если контур  $\bar{l}$  проходит через линию  $l_1$ , или  $\xi_1^a = 0, \xi_2^a = \pi$ , если контур  $\bar{l}$  окружает линию  $l_1$  (эти случаи соответствуют рис. 2 при  $D = \nu_1^a$  и замене  $l$  на  $\bar{l}$ ). В рассматриваемом случае

поведение пластины подобно поведению, исследованному в п. 2, при замене контура  $l$  на заземленный контур  $\bar{l}$ .

4. В качестве примера рассмотрим динамическое поведение пластины с контуром, состоящим из двух дуг окружности радиусом  $R$  с центральным углом  $2\gamma$  (см. рис. 1, б). Для такой пластины в полярной системе координат ( $r = R - \nu_1$ ,  $\varphi = \nu_2$ ) имеем  $L = R$ ,  $D_l(\varphi) = R[1 - \cos \gamma / \cos(\gamma - \varphi)]$ ,  $D_{\max} = D_l(\gamma) = R(1 - \cos \gamma)$  ( $0 \leq \varphi \leq \gamma$ ,  $0 < \gamma \leq \pi/2$ ). В зависимости от значения  $P_{\max}$  возможны два механизма деформирования такой пластины. При “средних” нагрузках поверхность пластины деформируется в конусообразную (схема 1). При “высоких” нагрузках в центральной части пластины образуется область  $Z_p$ , движущаяся поступательно. Контур области  $Z_p$  состоит из двух дуг окружности радиусом  $R - D$  с центральным углом  $2(\gamma - \xi_D)$ , где  $0 < \xi_D \leq \gamma$ . При  $\xi_D = \gamma$  области  $Z_p$  и  $Z_2$  отсутствуют. Будем считать, что  $h = h(r)$ . Уравнения движения такой пластины в случае схемы 2 имеют вид (4)–(7), где

$$\xi_1 = \xi_D, \quad \xi_2 = \pi - \xi_D,$$

$$\Sigma_1(\xi_D) = 4 \left\{ \int_0^{\xi_D} \left[ \int_{\frac{R \cos \gamma}{\cos(\gamma - \varphi)}}^R hr(R - r)^2 dr \right] d\varphi + (\gamma - \xi_D) \int_{\frac{R \cos \gamma}{\cos(\gamma - \xi_D)}}^R hr(R - r)^2 dr \right\},$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2(\xi_D) = & \frac{2R^3}{3} \left\{ \xi_D - \cos^2 \gamma [2 \operatorname{tg} \gamma - 3 \operatorname{tg}(\gamma - \xi_D)] + \right. \\ & + \cos^3 \gamma \left( \ln \frac{\cos \gamma [1 - \sin(\gamma - \xi_D)]}{\cos(\gamma - \xi_D)(1 - \sin \gamma)} - \frac{\operatorname{tg}(\gamma - \xi_D)}{\cos(\gamma - \xi_D)} \right) + \\ & \left. + (\gamma - \xi_D) \left( 1 - \frac{\cos \gamma}{\cos(\gamma - \xi_D)} \right)^2 \left( 1 + \frac{2 \cos \gamma}{\cos(\gamma - \xi_D)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_3(\xi_D) = & (1 - \eta)h^2(R)\gamma R + \int_0^{\xi_D} \left( \int_{\frac{R \cos \gamma}{\cos(\gamma - \varphi)}}^R h^2(r) dr \right) d\varphi + \\ & + (\gamma - \xi_D) \left[ \int_{\frac{R \cos \gamma}{\cos(\gamma - \xi_D)}}^R h^2(r) dr + h^2 \left( \frac{R \cos \gamma}{\cos(\gamma - \xi_D)} \right) \frac{R \cos \gamma}{\cos(\gamma - \xi_D)} \right] + \\ & + R \cos \gamma \int_0^{\xi_D} h^2 \left( \frac{R \cos \gamma}{\cos(\gamma - \varphi)} \right) \frac{d\varphi}{\cos(\gamma - \varphi)}. \end{aligned}$$

На рис. 5 приведена зависимость от угла  $\gamma$  предельной нагрузки  $p_0$  и нагрузки  $p_1$  ( $p_i = P_i R^2 / M_0$ ,  $i = 0, 1$ ,  $M_0 = \sigma_0 h^2(R) / 4$ ), вычисленных по формулам (9), (11), для рассматриваемой шарнирно опертой пластины ( $\eta = 1$ ). Кривые 1, 2 соответствуют значениям  $p_0$  и  $p_1$  при  $h(r) = h(R)$ . Кривые 3 (для  $p_0$ ) и 4 (для  $p_1$ ) соответствуют случаю

$$h(r) = \begin{cases} h(R)[1 + (R - r)/(2D_{\max})], & R \leq r \leq R - D_{\max}/2, \\ 5h(R)/4, & R - D_{\max}/2 \leq r \leq R \cos \gamma, \end{cases} \quad (19)$$

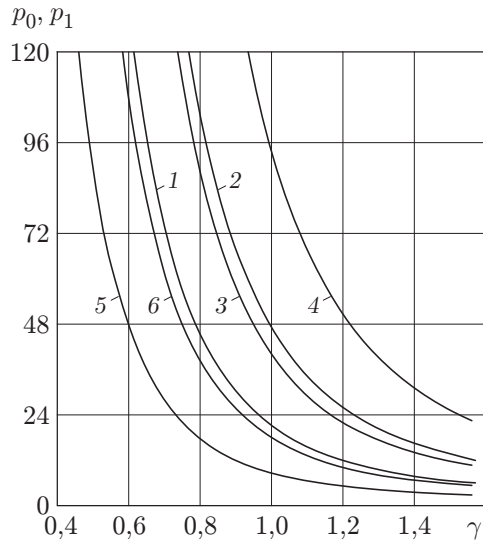


Рис. 5

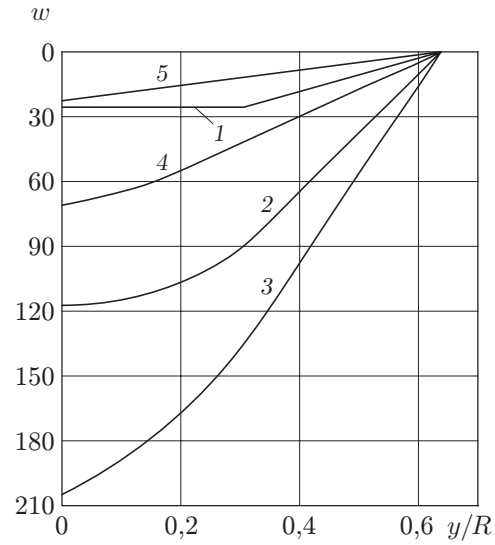


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость безразмерных предельной нагрузки  $p_0$  (1, 3, 5) и нагрузки  $p_1$  (2, 4, 6) от угла  $\gamma$ :

1, 2 — в случае постоянной толщины пластины:  $h(r) = h(R)$ ; 3, 4 — в случае изменения толщины по закону (19); 5, 6 — в случае изменения толщины по закону (20)

Рис. 6. Безразмерные прогибы  $w$  в сечении  $x = 0$  шарнирно опертой пластины с контуром, состоящим из двух дуг окружности радиусом  $R$  с центральным углом  $2\gamma$  ( $\gamma = 1,2$ ,  $D_{\max} = 0,638R$ ), под действием нагрузки в виде прямоугольного импульса:

1–3 — прогибы в случае изменения толщины по закону (20) (1 —  $t = T$ ; 2 —  $t = t_1 = 2,79T$ ; 3 —  $t = t_f = 6,2T$ ); 4, 5 — остаточные прогибы пластины (4 — в случае постоянной толщины:  $h(r) = h(R)$  ( $t_f = 3,22T$ ); 5 — в случае изменения толщины по закону (19) ( $t_f = 1,8T$ ))

кривые 5 (для  $p_0$ ) и 6 (для  $p_1$ ) — случаю

$$h(r) = \begin{cases} h(R)[1 - (R - r)/(2D_{\max})], & R \leq r \leq R - D_{\max}/2, \\ 3h(R)/4, & R - D_{\max}/2 \leq r \leq R \cos \gamma. \end{cases} \quad (20)$$

Прогибы  $w = uR^2 \rho_V h(R)/(M_0 T^2)$  рассматриваемой шарнирно опертой пластины при  $\gamma = 1,2$ ,  $D_{\max} = 0,638R$  в сечении  $x = 0$  приведены на рис. 6. На пластину действует нагрузка в виде прямоугольного импульса:  $P(t) = 38,37M_0/R^2$  при  $0 \leq t \leq T$ ,  $P(t) = 0$  при  $t > T$ . Кривые 1–3 соответствуют прогибам в случае изменения толщины по закону (20) в моменты времени  $t = T$ ,  $t = t_1 = 2,79T$ ,  $t = t_f = 6,2T$  соответственно ( $\xi_D(0) = 0,2$ ). Кривая 4 соответствует остаточным прогибам рассматриваемой пластины в случае  $h(r) = h(R)$  ( $t_f = 3,22T$ ). При изменении толщины по закону (19) деформирование пластины происходит по схеме для “средних” нагрузок, так как  $P_0 = 21,34M_0/R^2$  и  $P_1 = 50,58M_0/R^2 > P_{\max}$ . При  $t_f = 1,8T$  максимальный остаточный прогиб в центре пластины, вычисленный по формуле (15), равен  $w = 21,16$  (кривая 5).

Из рис. 5, 6 следует, что изменение толщины пластины оказывает существенное влияние как на величину предельных нагрузок, так и на остаточные прогибы. При нагрузках выше предельных, изменяя толщину пластины, можно в несколько раз увеличить предельную нагрузку, а остаточный прогиб уменьшить и тем самым улучшить качество конструкции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Комаров К. Л.** Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
2. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамика пластического деформирования пластин с криволинейным контуром // Прикл. механика. 2001. Т. 37, № 12. С. 68–78.
3. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Пластическое деформирование двусвязных пластин с криволинейным контуром при динамических нагрузках // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. Минск: Технопринт, 2001. С. 515–525.
4. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамическая пластическая повреждаемость одно- и двусвязных эллиптических пластин // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 2. С. 142–154.
5. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Моделирование и анализ процесса штамповки тонкостенных конструкций с гладкими выпуклыми контурами // Механика оболочек и пластин: Сб. докл. 20-й Междунар. конф. по теории оболочек и пластин, Н. Новгород, 17–19 сент. 2002 г. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002. С. 231–239.
6. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Повреждаемость плоских преград с невогнутыми контурами при воздействии взрывных нагрузок // Науч. вестн. Новосиб. гос. техн. ун-та. 2002. № 2. С. 77–85.
7. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамика пластических плит в форме неправильных овалов // Современные проблемы механики и прикладной математики: Материалы Междунар. шк., Воронеж, 4–8 июня 2002 г. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2003. Ч. 1. С. 182–196.
8. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамическое поведение жесткопластических пластин в форме сектора // Прикл. механика. 2004. Т. 40, № 4. С. 93–101.
9. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Повреждаемость жесткопластических двусвязных криволинейных пластин в вязкой среде под действием взрывных нагрузок // Тр. 7-й Всерос. науч.-техн. конф. “Наука. Промышленность. Оборона”, Новосибирск, 19–21 апр. 2006 г. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 2006. С. 317–323.
10. **Рейтман М. И.** Методы оптимального проектирования деформируемых тел / М. И. Рейтман, Г. С. Шапиро. М.: Наука, 1976.
11. **Оптимальное проектирование конструкций:** Библиогр. указ. / Под ред. Ю. В. Немировского, В. Н. Мазалова. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1975. Т. 1, 2.
12. **Якимава Х.** Проектирование оптимальных динамически нагружаемых конструкций // Новые направления в строительном проектировании. М.: Стройиздат, 1989. С. 245–262.
13. **Немировский Ю. В.** Оптимальное проектирование однородных и слоистых пластических балок при динамическом нагружении // Проблемы оптимального проектирования сооружений: Докл. 5-го Всерос. семинара, Новосибирск, 7–8 апр. 2005 г. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 2005. С. 261–267.
14. **Люкшин Б. А., Ковалев В. А.** Расчет упругопластических оболочек вращения переменной толщины при динамическом нагружении // Механика сплошных сред: Сб. ст. / Под ред. Т. М. Платовой. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та, 1983. С. 10–17.
15. **Ерхов М. И.** Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978.
16. **Немировский Ю. В., Романова Т. П.** Динамическое деформирование криволинейной пластины с жесткой вставкой // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 2. С. 126–138.